PROBABILITÉS

VI SAVOIR FAIRE

VII COMPLÉMENTS

PROBABILITÉS

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des probabilités, souvent oubliés...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

! Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

Deuxième jet...

I ALGÈBRES

▶ 1. Définition

Déf. 1 Ω est un ensemble non vide. On appelle **algèbre sur Ω ou de Ω** tout sous-ensemble $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω tel que :

- Ω appartient à $\mathcal{A}$.
- $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire).
- $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie ; autrement dit si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ appartient encore à $\mathcal{A}$.

▶ 2. Exemples

Ω est un ensemble non vide.

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une algèbre sur Ω.
- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une algèbre sur Ω.
- Si A est une partie de Ω, $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une algèbre sur Ω.
- Si $\{A, B, C\}$ est une partition de Ω, $\{\emptyset, A, B, C, A\cup B, B\cup C, C\cup A, \Omega\}$ est une algèbre sur Ω.
- L'intersection d'algèbres sur Ω est une algèbre sur Ω.

▶ 3. Propriétés

Th. 1 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur un ensemble non vide Ω.

▷ $\emptyset$ est un élément de $\mathcal{A}$.

▷ $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie ; autrement dit si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ appartient encore à $\mathcal{A}$.

▷ Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$, $A\backslash B$ et $A\Delta B$ sont encore des éléments de $\mathcal{A}$.

▶ 4. Algèbre engendrée

Th. 2 et **déf. 2** Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble (...) non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$.

L'intersection des algèbres de Ω contenant $\mathcal{C}$ est une algèbre sur Ω contenant $\mathcal{C}$.

C'est la plus petite algèbre sur Ω, au sens de l'inclusion, contenant $\mathcal{C}$.

On l'appelle **l'algèbre sur Ω engendrée par $\mathcal{C}$**.

Prop. 1 • Si A est une partie de Ω, l'algèbre sur Ω engendrée par $\{A\}$ est $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

• Si A, B, C sont trois parties de Ω constituant une partition de Ω, l'algèbre sur Ω engendrée par $\{A, B, C\}$ est $\{\emptyset, A, B, C, A\cup B, B\cup C, C\cup A, \Omega\}$.

• Si A_1, A_2, ..., A_n sont n parties de Ω constituant une partition de Ω, l'algèbre sur Ω engendrée par $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est l'ensemble des réunions finies d'éléments de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

II TRIBUS OU σ-ALGÈBRES. ESPACES PROBABILISABLES

▶ 1. Ensembles dénombrables

Déf. 3 Un ensemble est **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$; autrement dit s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
Un ensemble est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Prop. 2 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable.

Prop. 3 Toute partie d'un ensemble fini ou dénombrable est un ensemble fini ou dénombrable.

Prop. 4 Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

Prop. 5 Tout produit cartésien $\boxed{\text{fini}}$ d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

Prop. 6 Soit f une application de E dans F. Si A est une partie finie ou dénombrable de E, $f(A)$ est une partie finie ou dénombrable de F.

▶ 2. Définitions

Déf. 4 Ω est un ensemble non vide. On appelle **tribu** sur Ω ou **σ-algèbre** tout sous-ensemble $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω tel que :

- Ω appartient à $\mathcal{A}$.
- $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire).
- Si $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable)

★ On notera bien que $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ et non de Ω.

Déf. 5 On appelle **espace probabilisable** tout couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une tribu ou une σ-algèbre sur Ω

▶ 3. Exemples

Ω est un ensemble non vide.

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.
- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.
- Si A est une partie de Ω, $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.
- Si $\{A, B, C\}$ est une partition de Ω, $\{\emptyset, A, B, C, A\cup B, B\cup C, C\cup A, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.
- L'intersection de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.

▶ 4. Propriétés

Th. 3 Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble non vide Ω.

- ▷ $\emptyset$ est un élément de $\mathcal{A}$.
- ▷ Si $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- ▷ $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finies ou dénombrables.
- ▷ Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$, $A\backslash B$ et $A\Delta B$ sont encore des éléments de $\mathcal{A}$.

▶ 5. Tribu ou σ-algèbre engendrée

Th. 4 et **déf. 6** Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$.

L'intersection des σ-algèbres ou tribus de Ω contenant $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre ou tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$.

C'est la plus petite σ-algèbre ou tribu sur Ω, au sens de l'inclusion, contenant $\mathcal{C}$.

On l'appelle la **σ-algèbre ou tribu sur Ω engendrée par** $\mathcal{C}$.

Déf. 7 La tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$ s'appelle la **tribu des Boreliens**.

Th. 5 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles du type $]-\infty, x]$.

Th. 6 Soit A une partie d'un ensemble non vide Ω. La tribu engendrée par $\{A\}$ est $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Prop. 7 Ω est un ensemble non vide et I un ensemble $\boxed{\text{fini ou dénombrable}}$. $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Ω constituant une partition de Ω. Ainsi $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$ et $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j = \emptyset$.

La tribu engendrée par la famille $(A_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des réunions d'éléments de cette famille, c'est à dire l'ensemble $\displaystyle\left\{ \bigcup_{\ell\in L} A_\ell, L\in\mathcal{P}(I)\right\}$.

★ Ce résultat sera repris au niveau des systèmes complets d'événements.

▶ 6. Le langage des événements.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$.

- Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les **événements**.
- Si a est un élément de Ω et si $\{a\}$ appartient à $\mathcal{A}$, $\{a\}$ est un **événement élémentaire**.
- Ω est l'**événement certain** et $\emptyset$ est l'**événement impossible**.
- $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A.
- L'événement $A\cup B$ est l'**événement A ou B** et $A\cap B$ est l'**événement A et B**.
- Si $A\cap B=\emptyset$ on dit que les événements A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**.
- Si $A\subset B$ on dit que **A implique B**.

▶ 7. Système complet d'événements

Déf. 8 On appelle **système complet d'événements** d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ toute famille $\boxed{\text{finie}}$ ou $\boxed{\text{dénombrable}}$ $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.
- $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$; ce qui signifie que les éléments de la famille sont deux à deux disjoints ou incompatibles.

Dans ces conditions $(A_i)_{i\in I}$ est une partition au sens large de Ω.

★ Pour ne pas soulever trop de problèmes théoriques on pourra se limiter au cas où I est un intervalle fini ou infini de $\mathbb{N}$. I est alors du type $[\![r, s]\!]$ ou $[\![n_0, +\infty[\![$.

$\boxed{\textbf{P}}$ Soient A_1, A_2, ..., A_p des événements deux à deux incompatibles. $(A_1, A_2, \dots, A_p)$ n'est pas nécessairement un système complet d'événements mais $(A_1, A_2, \dots, A_p, \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p})$ en est un ... Qu'on se le dise et qu'on se l'utilise.

Th. 7 $\boxed{\textbf{P}}$ $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Pour tout élément de B de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) \quad (\text{“réunion disjointe”})}$$

Prop. 8 $\boxed{\textbf{!}}$ $\boxed{\textbf{SD}}$ Soit $(A_i)_{i\in I}$ $\boxed{\text{un système complet d'événements}}$ de $(\Omega, \mathcal{A})$.

La tribu engendrée par la famille $(A_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des réunions d'éléments de cette famille, c'est à dire l'ensemble $\left\{ \displaystyle\bigcup_{\ell\in L} A_\ell, L \in \mathcal{P}(I) \right\}$.

III PROBABILITÉS. ESPACES PROBABILISÉS

▶ 1. Définitions

Déf. 9 On appelle **probabilité** sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application P de $\boxed{\mathcal{A} \text{ dans } [0,1]}$ telle que

- $P(\Omega) = 1$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ $\boxed{\textbf{deux à deux incompatibles}}$:

$$P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} P(A_k).$$

Cette dernière propriété s'appelle la **σ-additivité**.

★★ Il faut absolument noter que dans la définition précédente, le deuxième point donne deux informations. Il indique que la série de terme général $P(A_n)$ converge et que sa somme est $P\Big(\displaystyle\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\Big)$.

★★ Il importe encore de remarquer que l'axiomatique probabiliste dispense de justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n)$ pourvu que $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ soit une suite d'événements deux à deux disjoints ou incompatibles.

Déf. 10 On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

▶ 2. Premières propriétés

Th. 8 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

▷ $P(\emptyset) = 0$.

▷ Si A est un élément de $\mathcal{A}$, $\overline{A}$ appartient à $\mathcal{A}$ et $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

▷ **PP** P est croissante. Autrement dit si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$: $\boxed{A \subset B \text{ donne } P(A) \leqslant P(B)}$.

▷ Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$ alors $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.

▷ Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$: $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$.

▶ 3. Probabilité d'une réunion d'événements

Th. 9 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1. Si A et B sont deux éléments incompatibles de $\mathcal{A}$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2. Si A_1, A_2, ..., A_n sont n éléments deux à deux incompatibles de $\mathcal{A}$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Th. 10 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé

1. Si A et B deux éléments de $\mathcal{A}$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Si A_1, A_2, ..., A_n sont n éléments de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})}.$$

Cette formule s'appelle **formule du crible** ou **formule de Poincaré**.

Remarque Il convient de bien comprendre cette formule. Notons que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ est la somme des probabilités des intersections k à k des événements de la suite $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Cette somme contient $\binom{n}{k}$ termes (faire une k-intersection c'est choisir k événements parmi les n... il y a encore $\binom{n}{k}$ suites $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ strictement croissantes d'éléments de $[\![1, n]\!]$).

P On peut utiliser la formule du crible pour calculer la probabilité d'une intersection de n événements B_1, B_2, ..., B_n. On écrit : $P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = 1 - P(\overline{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n}) = 1 - P(\overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \cdots \cup \overline{B_n})$ et on applique le crible.

Prop. 9 **SD** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Si A_1, A_2, ..., A_n sont n éléments quelconques de $\mathcal{A}$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Prop. 10 $\boxed{\textbf{SD}}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que la série de terme général $P(A_n)$ converge.

$$P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n).$$

▶ 4. Limite monotone

Th. 11 $\boxed{\textbf{P}}$ $\boxed{\textbf{SD}}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1. Si $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite **croissante** d'éléments de $\mathcal{A}$:

$$P\big(\bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k\big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

2. Si $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite **décroissante** d'éléments de $\mathcal{A}$:

$$P\big(\bigcap_{k=n_0}^{+\infty} A_k\big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

★ Ici encore il importe de noter que le théorème donne deux informations : la convergence de la suite et sa limite.

Cor. $\boxed{\textbf{SD}}$ $\boxed{\textbf{!}}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=n_0}^{n} A_k\Big) = P\Big(\bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k\Big)} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{k=n_0}^{n} A_k\Big) = P\Big(\bigcap_{k=n_0}^{+\infty} A_k\Big)}.$$

▶ 5. Système quasi-complet d'événements

Déf. 11 Soit A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que que A est un événement **quasi-impossible** ou **négligeable** si sa probabilité est 0.

On dit que que A est un événement **quasi-certain** ou **presque sûr** si sa probabilité est 1.

Une propriété sur les éléments de Ω est **presque sûrement vraie** si l'ensemble des éléments de Ω qui la réalisent est un événement de probabilité 1.

★ Le programme nous autorise à écrire ps à la place de presque sûrement, ; c'est le françois qui va être content !

Déf. 12 *Complément* On appelle **système quasi-complet** d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toute famille $\boxed{\text{finie}}$ ou $\boxed{\text{dénombrable}}$ $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

- $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$; ce qui signifie que les éléments de la famille sont deux à deux disjoints ou incompatibles.
- $P\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = 1.$

★ Pour ne pas soulever trop de problèmes théoriques on pourra se limiter au cas où I est un intervalle fini ou infini de $\mathbb{N}$. I est alors du type $[\![r, s]\!]$ ou $[\![n_0, +\infty[\![$.

Th. 12 $\boxed{\textbf{SD}}$ $\boxed{\textbf{PP}}$ $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout élément de B de $\mathcal{A}$:

$$P(B) = P\Big(\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)\Big) = \sum_{i\in I} P(A_i\cap B).$$

★ Cette formule est fondamentale. Elle permet de simplifier le calcul de la probabilité d'un événement en le ramenant au calcul de probabilités d'événements à priori plus simples (les $A_i \cap B$...).

▸ 6. Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

Prop. 11 $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisé. On suppose que Ω est un ensemble fini. Une application P de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si :

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{et} \quad \forall (A,B)\in\mathcal{A}^2,\ A\cap B=\emptyset \Rightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B).$$

Th. 13 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ est un ensemble fini non vide ayant n éléments.

Définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ c'est se donner la probabilité des événements élémentaires.

Plus précisément si p_1, p_2, ..., p_n sont n réels positifs et de somme 1, il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et une seule telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = p_i$.

On a alors pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{i\in I_A} P(\{\omega_i\}) \quad \text{avec } I_A = \{i\in[\![1,n]\!] \mid \omega_i\in A\} \qquad \text{ou} \qquad P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$$

Th. 14 **Equiprobabilité** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ est un ensemble fini non vide ayant n éléments.

Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et une seule telle que tous les événements élémentaires soient équiprobables c'est à dire aient la même probabilité.

Pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega}.$$

On parle de **probabilité uniforme**.

★ Il est clair que cette probabilité est fondamentale et c'est celle que nous utilisons le plus souvent dans les exercices. Elle ramène les problèmes de probabilité à des problèmes de dénombrement.

Notons qu'elle contient la vieille idée : Probabilité $= \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

La probabilité uniforme apparaît dès que l'on traite d'une expérience aléatoire conduisant à nombre fini de résultats ayant "autant de chance" d'être obtenus les uns que les autres.

Th. 15 Ω est un ensemble dénombrable dont les éléments sont indexés par $\mathbb{N}$. $\Omega = \{\omega_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

Soit $(p_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et une seule telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{\omega_n\}) = p_n$.

On a alors pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}) \quad \text{avec } I_A = \{i \in \mathbb{N} \mid \omega_i \in A\} \qquad \text{ou} \qquad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

IV PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Dans ce qui suit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

▶ 1. Définition et premières propriétés

Déf. 13 Soit A un élément de $\mathcal{A}$ de probabilité **non nulle**.

Pour tout élément B de $\mathcal{A}$, la probabilité de B sachant que A est réalisé ou **probabilité de B sachant A** est le réel noté $P_A(B)$ (ou $P(B/A)$) et égal à $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A)}.$$

Th. 16 Soit A un élément de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

L'application $P_A : B \to P_A(B)$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ (!) est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

P Ce résultat théorique est très utile dans la pratique. Toutes les propriétés d'une probabilité s'appliquent à P_A (propriétés usuelles, croissance, σ-additivité, crible, limite monotone, ...).

★★ On évitera d'extrapoler et de penser qu'il y a, par exemple, un rapport étroit entre $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_A(B)$.

▶ 2. Les probabilités composées

Th. 17 A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$. Si A a une probabilité non nulle :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B)} \quad \text{ou} \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)}.$$

Si A et B ont des probabilités non nulles :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B) = P(B)\, P_B(A)} \quad \text{ou} \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A) = P(B)\, P(A/B)}.$$

Th. 18 On suppose que A_1, A_2, ..., A_n sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que : $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2/A_2)\, P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}.$$

▶ 3. La formule des probabilités totales.

Th. 19 A est un élément de $\mathcal{A}$ tel que : $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$. Pour tout élément B de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A)\, P_A(B) + P(\overline{A})\, P_{\overline{A}}(B)} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A)\, P(B/A) + P(\overline{A})\, P(B/\overline{A})}.$$

Th. 20 $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un système complet ou quasi-complet de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(A_k) \neq 0$. Alors pour tout élément B de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)}$$

$$\boxed{P(B) = P(A_1)\, P_{A_1}(B) + P(A_2)\, P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n)\, P_{A_n}(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, P_{A_k}(B)} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{P(B) = P(A_1)\, P(B/A_1) + P(A_2)\, P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\, P(B/A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, P(B/A_k)}.$$

★ **P** Le premier résultat du théorème précédent est tout aussi important que le second. En clair, lorsque l'on a un système complet ou quasi-complet d'événements, le conditionnement ne s'impose pas toujours pour calculer $P(B)$. Il est parfois plus simple de calculer les $P(B \cap A_k)$ que les $P_{A_k}(B)$. Qu'on se le dise.

Th. 21 $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ est un système complet ou quasi-complet de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ P(A_n) \neq 0$. Alors pour tout élément B de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{P(B) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n)\, P_{A_n}(B) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n)\, P(B/A_n)}.$$

★ On a le même type de résultats avec un système complet ou quasi-complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$ indexé par un ensemble I fini ou dénombrable.

▶ 4. La formule de Bayes.

Th. 22 A est un élément de $\mathcal{A}$ tel que : $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$. Pour tout élément B de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A)\, P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A)\, P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})\, P_{\overline{A}}(B)}}.$$

Th. 23 $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un système complet ou quasi-complet de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(A_k) \neq 0$.

Pour tout élément B de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle et pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$:

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{P(A_1)\, P_{A_1}(B) + P(A_2)\, P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n)\, P_{A_n}(B)}}.$$

Th. 24 $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est un système complet ou quasi-complet de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ P(A_n) \neq 0$.

Pour tout élément B de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle et pour tout élément i de $[\![n_0, +\infty[\![$:

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\,P_{A_i}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\,P_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n)\,P_{A_n}(B)}}.$$

★ On a le même type de résultats avec un système complet ou quasi-complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$ indexé par un ensemble I fini ou dénombrable.

V INDÉPENDANCE

▶ 1. Indépendance de deux événements

Déf. 14 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Deux événements A et B sont **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

★ On est prié de ne pas confondre l'indépendance de A et B avec l'incompatibilité de A et B ($A \cap B = \emptyset$). C'est une erreur aussi fréquente qu'inadmissible.

★ Dans un exercice de probabilité l'indépendance est **soit une donnée** (explicite ou implicite), **soit une exigence** ; autrement dit ou l'indépendance est donnée ou elle est demandée !

★ L'indépendance de deux événements est relative à la probabilité P définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Prop. 12 A et B sont deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $P(A)$ n'est pas nulle : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Si $P(B)$ n'est pas nulle : A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Prop. 13 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Si A et B sont deux événements indépendants de $\mathcal{A}$, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

▶ 2. Indépendance de deux σ-algèbres

Déf. 15 $\boxed{!}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Deux sous-tribus $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ de $\mathcal{A}$ sont indépendantes si tout élément de $\mathcal{S}$ est indépendant de tout élément de $\mathcal{T}$, c'est à dire si $\forall (S,T) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T},\ P(S \cap T) = P(S)\,P(T)$.

Th. 25 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si la tribu engendrée par A et la tribu engendrée par B sont indépendantes.

Th. 26 $\boxed{!}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ sont deux systèmes complets d'événements de $(\Omega, \mathcal{A})$.

Les tribus engendrées par $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ sont indépendantes si et seulement si pour tout élément (i,j) de $I \times J$ A_i et B_j sont indépendants.

P Sous les hypothèses du théorème précédent, en supposant que pour tout élément (i,j) de $I \times J$ A_i et B_j sont indépendants on peut, par exemple, affirmer que pour toute partie I_1 de I et pour toute partie J_1 de J les événements $\displaystyle\bigcup_{i\in I_1} A_i$ et $\displaystyle\bigcup_{j\in J_1} B_j$ sont indépendants.

▶ 3. Indépendance d'une famille d'événements.

Déf. 16 $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'**événements deux à deux indépendants** si :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i < j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$

2. $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'**événements mutuellement indépendants** si pour toute partie **finie** (non vide) J de I :

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Th. 27 $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants alors $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements deux à deux indépendants. **La réciproque est fausse**.

Un contre-exemple classique et utile. On lance deux fois de suite un dé. A (resp. B) est l'événement le premier (resp. second) résultat est pair et C est l'événement la somme des résultats est paire.

La famille (A, B, C) est une famille d'événements deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Th. 28 $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements telle que $\forall i \in I,\ B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

$(B_i)_{i\in I}$ est encore une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

• Toute sous-famille d'une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants est encore une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

• Si σ est une permutation de I, $(A_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est encore une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

Prop. 14 *Le cas des suites finies* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $(A_1, A_2, \dots, A_n) = (A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une suite finie d'événements de $\mathcal{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

i') Pour toute partie (non vide) J de $[\![1,n]\!]$: $\displaystyle P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

ii) Pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$ (ou de $[\![2,n]\!]$) et pour toute suite strictement croissante $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

★★★ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une suite d'événements mutuellement indépendants n'est pas en général équivalent à : $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n)$.

Pour s'en convaincre supposer $n \geqslant 3$ et poser $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ A_k = A$ et $A_n = \emptyset$ où A est un événement de probabilité distincte de 0 et 1

★ Si $(A_1, A_2, \dots, A_n) = (A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une suite d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants on dit encore que les événements A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

Prop. 15 *Le cas des suites infinies* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

i') Pour toute partie (non vide) J de $[\![n_0, +\infty[\![$: $P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

ii) Pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$ (ou de $[\![2, +\infty[\![$) et pour toute suite strictement croissante $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'éléments de $[\![n_0, +\infty[\![$: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

▶ 4. Indépendance d'une famille de tribus.

Déf. 17 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-tribus d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de **tribu deux à deux indépendantes** si pour tout couple (i, j) d'éléments de I tels que $i \neq j$ ou $i < j$, les tribus $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_j$ sont indépendantes.

2. $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de **tribus mutuellement indépendantes** si pour toute partie **finie** non vide J de I et pour toute famille $(A_i)_{i\in J}$ d'événements telle que $\forall i \in J,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ on a :

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

★★ Ici encore l'indépendance mutuelle donne l'indépendance deux à deux.. mais pas le contraire.

Th. 29 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-tribus d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus mutuellement indépendantes si et seulement si toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements telle que $\forall i \in I,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Th. 30 $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants si et seulement si la famille des tribus engendrées par ces événements est une famille de tribus mutuellement (resp. deux à deux) indépendantes.

Th. 31 *Le cas des suites finies de tribus* **PP** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de tribus indépendantes.

i') Pour toute partie non vide J de $[\![1, n]\!]$, pour toute famille $(A_i)_{i\in J}$ telle que $\forall i \in J,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ on a : $P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

ii) Toute suite $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i \in \mathcal{A}_i$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

iii) $\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n,\ P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n)$.

★★ Il convient de faire la différence entre l'indépendance d'une suite de tribus et l'indépendance d'une suite d'événements. En particulier cette équivalence entre ii) et iii) ne doit pas conduire à dire que les événements A_1, A_2, ..., A_n sont indépendants si $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n)$

Th. 32 *Le cas des suites infinies de tribus* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $(\mathcal{A}_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$.

$(\mathcal{A}_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de tribus mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout élément n de $[\![n_0+1, +\infty [\![$, $(\mathcal{A}_{n_0}, \mathcal{A}_{n_0+1}, \ldots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de tribus mutuellement indépendantes.

VI SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'un ensemble de parties est une tribu.
- Montrer qu'une application est une probabilité.
- Utiliser la σ-additivité.
- Utiliser la formule du crible.
- Utiliser la limite monotone.
- Définir et exploiter un système complet ou quasi-complet d'événements.
- Utiliser les formules classiques des probabilités conditionnelles.
- Utiliser l'indépendance d'événements ou de tribus.
- Montrer l'indépendance d'événements ou de tribus.
- Montrer qu'un ensemble est négligeable ou qu'une propriété est vraie presque sûrement.

VII COMPLÉMENTS

▶ 1. Tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

Déf. 18 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$. C'est donc la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

Th. 33 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles du type $]-\infty, x]$.

Prop. 16
- La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.
- La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

▶ 2. Tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$.

Déf. 19 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est la tribu engendrée par l'ensemble des produits cartésiens de n intervalles de $\mathbb{R}$.

Th. 34
- La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des produits cartésiens de n intervalles de $\mathbb{R}$ du type $]-\infty, x]$.
- La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des produits cartésiens de n boréliens de $\mathbb{R}$.

▶ 3. Tribus indépendantes

Prop. 17 Ω est un ensemble non vide. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont deux tribus sur Ω.

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux ensembles de parties de Ω qui engendrent respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.

On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont stables par intersection finie.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont indépendantes si et seulement si : $\forall C \in \mathcal{C},\ \forall C' \in \mathcal{C}',\ P(C \cap C') = P(C)\, P(C')$.

▶ 4. Égalité de deux probabilités

Th. 35 P et P' sont deux probabilités sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

$\mathcal{C}$ est un sous-ensemble (...) de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui engendre $\mathcal{A}$ et qui est $\boxed{\text{stable par intersection finie}}$.

P et P' sont égales si et seulement si $\forall C \in \mathcal{C},\ P(C) = P'(C)$.

Cor. P et P' sont deux probabilités sur l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $P = P'$.

ii) Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $P(I) = P'(I)$.

iii) Pour tout réel x, $P(]-\infty, x]) = P'(]-\infty, x])$.

iv) Pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$, $P(O) = P'(O)$.

▶ 5. Tribu et image réciproque.

Prop. 18 Ω et Ω' sont deux ensembles non vides. f est une application de Ω dans Ω'. $\mathcal{A}$ est une tribu de E.

$\mathcal{A}' = \{A' \in \mathcal{P}(\Omega') \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ est une tribu de Ω'.

Prop. 19 Ω et Ω' sont deux ensembles non vides. f est une application de Ω dans Ω'. $\mathcal{A}'$ est une tribu de Ω'.

$\mathcal{A} = \{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ est une tribu de Ω.

Prop. 20 Ω et Ω' sont deux ensembles non vides. f est une application de Ω dans Ω'.

$\mathcal{S}'$ est un ensemble de parties de Ω' et $\mathcal{A}'$ est la tribu de Ω' engendrée par $\mathcal{S}'$.

$\mathcal{A} = \{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ est la tribu de Ω engendrée par $\mathcal{S} = \{f^{-1}(S'), S' \in \mathcal{S}'\}$.

▶ 6. Les deux lemmes de Borel-Cantelli

Prop. 21 $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• $D = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty}\overline{A_k}\right)$ est l'événement : seul un nombre fini de A_n se réalisent.

• Si la série de terme général $P(A_n)$ converge $P(D) = 1$ et donc il est quasi-certain que seulement un nombre fini d'événements A_n se réalisent.

Prop. 22 $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• $B = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$ est l'événement : une infinité d'événements A_n se réalisent.

• Si la série de terme général $P(A_n)$ est divergente et si les événements de la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ sont mutuellement indépendants : $P(B) = 1$ et donc il est quasi-certain qu'une infinité de A_n se réalisent.

▶ 7. Une algèbre qui n'est pas une σ-algèbre ...

Prop. 23 Ω est un ensemble infini et $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω finie ou de complémentaire fini.

$\mathcal{A}$ est une algèbre sur Ω mais n'est pas une σ-algèbre.