PROBABILITÉS

I TRIBUS OU σ-ALGÈBRES. ESPACES PROBABILISABLES

1. **Ensembles dénombrables**
2. **Définitions**
3. **Exemples**
4. **Propriétés**
5. **Le langage des événements**
6. **Système complet d'événements**

II PROBABILITÉS. ESPACES PROBABILISÉS

1. **Définitions**
2. **Premières propriétés**
3. **Événement négligeable, événement presque sûr, propriété vraie presque sûrement**
4. **Probabilité d'une réunion d'événements**
5. **Probabilité d'une réunion d'événements incompatibles**
6. **Limite monotone**
7. **Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable**

III PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1. **Définition et premières propriétés**
2. **Les probabilités composées**
3. **La formule des probabilités totales**
4. **La formule de Bayes**

IV INDÉPENDANCE

1. **Indépendance de deux événements**
2. **Indépendance d'une famille d'événements**
3. **Indépendance d'une suite finie d'événements**
4. **Indépendance d'une suite infinie d'événements**

V SAVOIR FAIRE

VI COMPLÉMENTS

1. **Système quasi-complet d'événements**
2. **Tribu engendrée**

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

P Mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des probabilités, souvent oubliés...

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

! Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

Dans la suite, sauf mention du contraire, Ω est un ensemble non vide (nous ne le redirons pas toujours).

I TRIBUS OU σ-ALGÈBRES. ESPACES PROBABILISABLES

► 1. Ensembles dénombrables

Déf. 1 Un ensemble est **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$; autrement dit s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Un ensemble est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Prop. 1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable.

Prop. 2 Toute partie d'un ensemble fini ou dénombrable est un ensemble fini ou dénombrable.

Prop. 3 Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

Prop. 4 Tout produit cartésien $\boxed{\text{fini}}$ d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

Prop. 5 Soit f une application de E dans F. Si A est une partie finie ou dénombrable de E, $f(A)$ est une partie finie ou dénombrable de F.

► 2. Définitions

Déf. 2 Ω est un ensemble non vide. On appelle **tribu** sur Ω ou **σ-algèbre** tout sous-ensemble $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω tel que :

- Ω appartient à $\mathcal{A}$.
- $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire).
- Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par

réunion finie ou dénombrable).

★ On notera bien que $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ et non de Ω.

Déf. 3 On appelle **espace probabilisable** tout couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une tribu ou une σ-algèbre sur Ω.

★ Cette définition n'apparaît plus dans le nouveau programme (programme concours 2015) !

▶ 3. Exemples

Prop. 6 Ω est un ensemble non vide.

- $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}(\Omega)} \textbf{ est une tribu sur } \boldsymbol{\Omega}\textbf{.}}$
- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.
- Si A est une partie de Ω, $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.
- Si $\{A, B, C\}$ est une partition de Ω, $\{\emptyset, A, B, C, A \cup B, B \cup C, C \cup A, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Prop. 7 Ω est un ensemble non vide.

- L'intersection de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.
- La réunion finie ou dénombrable de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.

▶ 4. Propriétés

Th. 1 Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble non vide Ω.

- $\emptyset$ est un élément de $\mathcal{A}$ (... et Ω est un élément de $\mathcal{A}$!).
- Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie ou dénombrable).
- Ainsi $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finies ou dénombrables.
- Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$, $A \backslash B$ et $A \Delta B$ sont encore des éléments de $\mathcal{A}$.

★ Rappelons que si X est un ensemble et si A et B sont deux éléments de $\mathcal{P}(X)$:

$A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Prop. 8 Ω est un ensemble non vide. Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une σ-algèbre ou une tribu sur Ω si et seulement si :

- Ω appartient à $\mathcal{A}$.
- $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire).
- Si $(A_n)_{n \in [\![n_0, +\infty [\![}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (resp. $\displaystyle\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$)).

Prop. 9 Ω est un ensemble non vide. L'intersection d'une famille quelconque de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.

▶ 5. Le langage des événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$.

- Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les **événements** de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
- Si a est un élément de Ω et si $\{a\}$ appartient à $\mathcal{A}$, $\{a\}$ est un **événement élémentaire**.
- Ω est l'**événement certain** et $\emptyset$ est l'**événement impossible**.
- $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A.
- L'événement $A \cup B$ est l'**événement A ou B** et $A \cap B$ est l'**événement A et B**.
- Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que les événements A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**.
- Si $A \subset B$ on dit que **A implique B**.

▶ 6. Système complet d'événements

Déf. 4 On appelle **système complet d'événements** d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ toute famille $\boxed{\text{finie}}$ ou $\boxed{\text{dénombrable}}$ $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.
- $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$; ce qui signifie que les éléments de la famille sont deux à deux disjoints ou incompatibles.

Dans ces conditions $(A_i)_{i \in I}$ est une partition au sens large de Ω.

★ Pour ne pas soulever trop de problèmes théoriques on pourra se limiter au cas où I est un intervalle fini ou infini de $\mathbb{Z}$. I est alors du type $[\![r, s]\!]$ ou $[\![n_0, +\infty [\![$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ Soient A_1, A_2, ..., A_p des événements deux à deux incompatibles. $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ n'est pas nécessairement un système complet d'événements mais $(A_1, A_2, \ldots, A_p, \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p})$ en est un ! Qu'on se le dise et qu'on se l'utilise.

Th. 2 $\boxed{\mathbf{P}}$ $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Pour tout élément de B de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{B = \bigcup_{i \in I} \big(A_i \cap B\big) \quad (\text{“réunion disjointe”}).}$$

Th. 3 et **déf. 5** $\boxed{\textbf{!}}$ Soit $(A_i)_{i \in I}$ **un système complet d'événements** de $(\Omega, \mathcal{A})$.

1. L'intersection des σ-algèbres ou tribus de Ω contenant tous les éléments de la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une σ-algèbre ou tribu sur Ω contenant tous les éléments de la famille $(A_i)_{i \in I}$.

2. Cette σ-algèbre ou tribu de Ω est la plus petite σ-algèbre ou tribu, au sens de l'inclusion, contenant tous les éléments de la famille $(A_i)_{i \in I}$.

3. Cette σ-algèbre ou tribu de Ω est **la tribu engendrée par le système complet d'événements** $(A_i)_{i \in I}$.

4. La tribu engendrée par la famille $(A_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des réunions d'éléments de cette famille, c'est à dire l'ensemble $\Big\{ \bigcup_{\ell \in L} A_\ell, L \in \mathcal{P}(I) \Big\}$.

★ Cette notion ne figure plus au programme dans sa généralité. On parle simplement de tribu engendrée par un système complet d'événements. Mais cela amène bien à parler de tribu engendrée, alors... Voir aussi les compléments.

II PROBABILITÉS. ESPACES PROBABILISÉS

▶ 1. Définitions

Déf. 6 On appelle **probabilité** sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application P de $\boxed{\mathcal{A} \text{ dans } [0,1]}$ telle que

- $P(\Omega) = 1$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ **deux à deux incompatibles** :

$$P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} P(A_k).$$

Cette dernière propriété s'appelle la **σ-additivité**.

★★ Il faut absolument noter que dans la définition précédente, le deuxième point donne deux informations. Il indique que la série de terme général $P(A_n)$ converge et que sa somme est $P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\Big)$.

★★ Il importe encore de remarquer que l'axiomatique probabiliste dispense de justifier l'existence de $\sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n)$ pourvu que $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ soit une suite d'événements deux à deux disjoints ou incompatibles.

Déf. 7 On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

▶ 2. Premières propriétés

Th. 4 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

▷ $P(\emptyset) = 0$.

▷ Si A est un élément de $\mathcal{A}$, $\overline{A}$ appartient à $\mathcal{A}$ et $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

▷ **PP** P est croissante au sens de l'inclusion. Autrement dit si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$:

$\boxed{A \subset B \text{ donne } P(A) \leqslant P(B)}$.

▷ Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$: $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$.

▷ Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$ alors $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.

▶ 3. Événement négligeable, événement presque sûr, propriété vraie presque sûrement

Déf. 8 Soit A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- A est **négligeable** si $P(A) = 0$.
- A est **presque sûr** si $P(A) = 1$.

★ Autrefois on disait quasi-impossible à la place de négligeable et quasi-certain à la place de presque sûr.

★ Soit A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. A négligeable (resp. quasi-certain) ne signifie pas $A = \emptyset$ (resp. $A = \Omega$).

Déf. 9 Une propriété $\mathcal{Q}$ attachée à l'espace propabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est **vraie presque sûrement** si $\{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ vérifie } \mathcal{Q}\}$ est un événement de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de probabilité 1.

▶ 4. Probabilité d'une réunion d'événements

Th. 5 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1. Si A et B sont deux éléments **incompatibles** de $\mathcal{A}$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2. Si A_1, A_2, ..., A_n sont n éléments **deux à deux incompatibles** de $\mathcal{A}$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

• Si $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ **deux à deux incompatibles**, il résulte de la définition de P que :

$$P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} P(A_k).$$

Th. 6 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé

1. Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Si A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{A}$:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$$

★★ La généralisation de ces formules a été supprimée du nouveau programme (concours 2015 et suivants). La voici. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et A_1, A_2, ..., A_n sont n éléments de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})}.$$

Cette formule s'appelle **formule du crible** ou **formule de Poincaré**.

★★ Il est peut-être bon de savoir démontrer cette formule au cas ou...

Remarque Il convient de bien comprendre cette formule. Notons que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ est la somme des probabilités des intersections k à k des événements de la suite $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Cette somme contient $\binom{n}{k}$ termes (faire une k-intersection c'est choisir k événements parmi les n... il y a encore $\binom{n}{k}$ suites $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ strictement croissantes d'éléments de $[\![1, n]\!]$).

La formule du crible permet de calculer la probabilité d'une intersection de n événements B_1, B_2, ..., B_n.

On écrit : $P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = 1 - P(\overline{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n}) = 1 - P(\overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \cdots \cup \overline{B_n})$ et on applique le crible.

Prop. 10 **P** **SD** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Si A_1, A_2, ..., A_n sont n éléments quelconques de $\mathcal{A}$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Prop. 11 $\boxed{\textbf{P}}$ $\boxed{\textbf{SD}}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que la série de terme général $P(A_n)$ converge.

$$P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n).$$

▶ 5. Probabilité d'une réunion d'événements incompatibles

Th. 7 Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille, non vide, finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles.

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

★★ Hé coco on le savait déjà ! Ben non ! ! Le premier membre a un sens, mais nous n'avons pas donné de sens au second !

Si I est fini on peut considérer que $\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)$ est la somme des probabilités des A_i.

Supposons I dénombrable. Il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ et une bijection φ de $[\![n_0, +\infty[\![$ dans I. Alors $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_{\varphi(n)})$ existe et vaut $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_\varphi(n)\right)$ (définition de P) donc $P\left(\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Il est alors légitime de poser $\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_{\varphi(n)})$.

Sauf que cette définition dépend de φ (et de n_0) ! ! En fait on peut montrer qu'il n'en ait rien... car la série $P(A_{\varphi(n)})$ est absolument convergente... donc commutativement convergence...

★ C'est un problème que nous retrouverons au niveau de l'espérance d'une variable aléatoire discrète et qui montre que notre notion de série est insuffisante pour traiter notre programme de probabilité discrète.

Th. 8 $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et P une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$.

P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si :

- $P(\Omega) = 1$.
- Pour toute famille **dénombrable** $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ $\boxed{\textbf{deux à deux incompatibles}}$:

$$P\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

▶ 6. Limite monotone

Th. 9 $\boxed{\textbf{P}}$ $\boxed{\textbf{SD}}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Si $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite **croissante** (au sens de l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{A}$, la suite $\big(P(A_n)\big)_{n\geqslant n_0}$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k\Big).$$

Th. 10 $\boxed{\textbf{P}}$ $\boxed{\textbf{SD}}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Si $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite **décroissante** (au sens de l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{A}$, la suite $\big(P(A_n)\big)_{n \geqslant n_0}$ converge et :

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P\big(\bigcap_{k=n_0}^{+\infty} A_k\big).$$

★ Ici encore il importe de noter que le théorème donne deux informations : la convergence de la suite $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$ et sa limite.

Cor. $\boxed{\textbf{P}}$ $\boxed{\textbf{!}}$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite **quelconque** d'éléments de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\Big(\bigcup_{k=n_0}^{n} A_k\Big) = P\Big(\bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k\Big)} \qquad \boxed{\lim_{n \to +\infty} P\Big(\bigcap_{k=n_0}^{n} A_k\Big) = P\Big(\bigcap_{k=n_0}^{+\infty} A_k\Big)}.$$

▶ 7. Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

Prop. 12 $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisé. On suppose que Ω est un ensemble fini. Une application P de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si :

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{et} \quad \forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Th. 11 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ est un ensemble fini non vide ayant n éléments.

Définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ c'est se donner la probabilité des événements élémentaires.

Plus précisément si p_1, p_2, ..., p_n sont n réels positifs et de somme 1, il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et une seule telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = p_i$.

On a alors pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}) \quad \text{avec } I_A = \{i \in [\![1, n]\!] \mid \omega_i \in A\} \qquad \text{ou} \qquad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})\,.$$

Th. 12 **Equiprobabilité** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ est un ensemble fini non vide ayant n éléments.

Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et une seule telle que tous les événements élémentaires soient équiprobables c'est à dire aient la même probabilité.

Pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}\, A}{\mathrm{Card}\, \Omega}.$$

On parle de **probabilité uniforme**.

★ Il est clair que cette probabilité est fondamentale et c'est celle que nous utilisons le plus souvent dans les exercices. Elle ramène les problèmes de probabilité à des problèmes de dénombrement.

Notons qu'elle contient la vieille idée : Probabilité $= \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

La probabilité uniforme apparaît dès que l'on traite d'une expérience aléatoire conduisant à nombre fini de résultats ayant “autant de chance” d'être obtenus les uns que les autres.

Th. 13 Ω est un ensemble dénombrable dont les éléments sont indexés par $\mathbb{N}$. $\Omega = \{\omega_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

Soit $(p_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et une seule telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{\omega_n\}) = p_n$.

On a alors pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}) \quad \text{avec } I_A = \{i \in \mathbb{N} \mid \omega_i \in A\} \qquad \text{ou} \qquad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

III PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Dans ce qui suit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

▶ 1. Définition et premières propriétés

Déf. 10 Soit A un élément de $\mathcal{A}$ de probabilité **non nulle**.

Pour tout élément B de $\mathcal{A}$, la probabilité de B sachant que A est réalisé ou **probabilité de B sachant A** est le réel noté $P_A(B)$ (ou $P(B/A)$) et égal à $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A)}.$$

Th. 14 Soit A un élément de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.

L'application $P_A : B \to P_A(B)$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ (!) est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

P Ce résultat théorique est très utile dans la pratique. Toutes les propriétés d'une probabilité s'appliquent à P_A (propriétés usuelles, croissance, σ-additivité, crible, limite monotone, ...).

★★ On évitera d'extrapoler et de penser qu'il y a, par exemple, un rapport étroit entre $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_A(B)$...

▶ 2. Les probabilités composées

Th. 15 A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$. Si A a une probabilité non nulle :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B)} \quad \text{ou} \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)}.$$

Si A et B ont des probabilités non nulles :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B) = P(B)\, P_B(A)} \quad \text{ou} \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A) = P(B)\, P(A/B)}.$$

Th. 16 $n \in [\![2, +\infty[\![$. On suppose que A_1, A_2, ..., A_n sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que : $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).}$$

▸ 3. La formule des probabilités totales

Th. 17 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. $$\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k).}$$

2. Si $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(A_k) \neq 0$, alors :

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ P(B) = P(A_1)\, P_{A_1}(B) + P(A_2)\, P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n)\, P_{A_n}(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, P_{A_k}(B).}$$

★ **P** Le premier résultat du théorème précédent (et des deux suivants) est tout aussi important que le second. En clair, lorsque l'on a un système complet d'événements, le conditionnement ne s'impose pas toujours pour calculer $P(B)$. Il est parfois plus simple de calculer les $P(B \cap A_k)$ que les $P_{A_k}(B)$. Qu'on se le dise.

Th. 18 $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ est un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. $$\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ P(B) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(B \cap A_n).}$$

2. Si $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ P(A_n) \neq 0$: $\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ P(B) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n)\, P_{A_n}(B).}$

Th. 19 $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. $$\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i).}$$

2. Si $\forall i \in I,\ P(A_i) \neq 0$: $\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i)\, P_{A_i}(B).}$

▸ 4. La formule de Bayes

Th. 20 A est un élément de $\mathcal{A}$ tel que : $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$. Pour tout élément B de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A)\, P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A)\, P_A(B)}{P(A) P_A(B) + P(\overline{A})\, P_{\overline{A}}(B)}.}$$

Th. 21 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(A_k) \neq 0$.

Pour tout élément B de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle et pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$:

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\, P_{A_k}(B)}.}$$

Th. 22 $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ P(A_n) \neq 0$.

Pour tout élément B de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle et pour tout élément i de $[\![n_0, +\infty[\![$:

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n)\, P_{A_n}(B)}.}$$

Th. 23 $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\forall i \in I,\ P(A_i) \neq 0$.

Pour tout élément B de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle et pour tout élément j de I :

$$\boxed{P_B(A_j) = \frac{P(A_j)\, P_{A_j}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)\, P_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)\, P_{A_i}(B)}.}$$

IV INDÉPENDANCE

▶ 1. Indépendance de deux événements

Déf. 11 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Deux événements A et B sont **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

★ On est prié de ne pas confondre l'indépendance de A et B avec l'incompatibilité de A et B ($A \cap B = \emptyset$). C'est une erreur aussi fréquente qu'inadmissible.

★ Dans un exercice de probabilité l'indépendance est **soit une donnée** (explicite ou implicite), **soit une exigence** ; autrement dit ou l'indépendance est donnée ou elle est demandée !

★ L'indépendance de deux événements est relative à la probabilité P définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Prop. 13 A et B sont deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $P(A)$ n'est pas nulle : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Si $P(B)$ n'est pas nulle : A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Prop. 14 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Si A et B sont deux événements indépendants de $\mathcal{A}$, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

▶ 2. Indépendance d'une famille d'événements

Déf. 12 $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'**événements deux à deux indépendants** si :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i < j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)\,.$$

2. $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'**événements mutuellement indépendants** si pour toute partie **finie** (non vide) J de I :

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)\,.$$

Prop. 15 $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants alors $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements deux à deux indépendants. **La réciproque est fausse**.

Un contre-exemple classique et utile. On lance deux fois de suite un dé. A (resp. B) est l'événement le premier (resp. second) résultat est pair et C est l'événement la somme des résultats est paire.

La famille (A, B, C) est une famille d'événements deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

★ Souvent dans les problèmes on parle de famille d'événements indépendants. A défaut de précision on considérera que les événements sont mutuellement indépendants...

Th. 24 $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements telle que $\forall i \in I,\ B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

$(B_i)_{i\in I}$ est encore une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

• Toute sous-famille d'une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants est encore une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

• Si σ est une permutation de I, $(A_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est encore une famille d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

Nous avons dit l'essentiel sur l'indépendance. Zoomons sur les suites d'événements indépendants, pour être dans le ton du programme...

▶ 3. Indépendance d'une suite finie d'événements

Prop. 16 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $(A_1, A_2, \dots, A_n) = (A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une suite finie d'événements de $\mathcal{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

i') Pour toute partie (non vide) J de $[\![1,n]\!]$: $P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

ii) Pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$ (ou de $[\![2,n]\!]$) et pour toute suite strictement croissante $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

★★★ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une suite d'événements mutuellement indépendants n'est pas en général équivalent à : $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n)$.

Pour s'en convaincre supposer $n \geqslant 3$ et poser $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ A_k = A$ et $A_n = \emptyset$ où A est un événement de probabilité distincte de 0 et 1

★ Si $(A_1, A_2, \ldots, A_n) = (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une suite d'événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants on dit encore que les événements A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

★ Les propriétés données dans le paragraphe 2 sont encore vraies pour des suites finies.

▸ 4. Indépendance d'une suite infinie d'événements

Prop. 17 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

i') Pour toute partie (non vide) J de $[\![n_0, +\infty[\![$: $P\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) = \prod_{i \in J} P(A_i)$.

ii) Pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$ (ou de $[\![2, +\infty]\!]$) et pour toute suite strictement croissante $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ d'éléments de $[\![n_0, +\infty[\![$: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

iii) Pour tout élément n dans $[\![n_0, +\infty[\![$, $(A_{n_0}, A_{n_0+1}, \ldots, A_n)$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

★ Les propriétés données dans le paragraphe 2 sont encore vraies pour des suites infinies.

V SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'un ensemble de parties est une tribu.
- Montrer qu'une application est une probabilité.
- Utiliser la σ-additivité.
- Utiliser la formule du crible pour $n = 2$, $n = 3$ et peut-être un peu plus....
- Utiliser le théorème de la limite monotone et ses corollaires.
- Définir et exploiter un système complet.
- Utiliser les formules classiques des probabilités conditionnelles.
- Utiliser l'indépendance d'événements.
- Montrer l'indépendance d'événements.
- Montrer qu'un événement est négligeable ou presque sûr, ou qu'une propriété est vraie presque sûrement.
- Modéliser des situations aléatoires. Construire des tribus et des probabilités.

VI COMPLÉMENTS

▸ 1. Système quasi-complet d'événements

Déf. 13 On appelle **système quasi-complet** d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

- $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$; ce qui signifie que les éléments de la famille sont deux à deux disjoints ou incompatibles.
- $P\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = 1$; ce qui signifie que l'événement $\bigcup_{i \in I} A_i$ est presque sûr (ou quasi-certain).

Th. 25 $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. $\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i).}$

2. Si $\forall i \in I,\ P(A_i) \neq 0$: $\boxed{\forall B \in \mathcal{A},\ P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i)\, P_{A_i}(B).}$

Th. 26 $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\forall i \in I,\ P(A_i) \neq 0$.

Pour tout élément B de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle et pour tout élément j de I :

$$\boxed{P_B(A_j) = \frac{P(A_j)\, P_{A_j}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)\, P_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)\, P_{A_i}(B)}.}$$

▶ 2. Tribu engendrée

Th. 27 et **déf. 14** Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$.

L'intersection des σ-algèbres ou tribus de Ω contenant $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre ou tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$.

C'est la plus petite σ-algèbre ou tribu sur Ω, au sens de l'inclusion, contenant $\mathcal{C}$.

On l'appelle la **σ-algèbre ou tribu sur Ω engendrée par** $\mathcal{C}$.

★ On peut dans cette définition remplacer $\mathcal{C}$ par une famille non vide d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.

★ Cette notion n'a pas totalement disparu du nouveau programme. On parle un peu plus loin de tribu engendrée par une variable aléatoire discrète.

▶ 3. Tribu des boréliens de $\mathbb{R}$

Déf. 15 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$. C'est donc la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

Th. 28 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles du type $]-\infty, x]$.

Prop. 18 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Prop. 19 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

★ C'est souvent la définition des Boréliens que l'on choisit chez les gens biens...

Prop. 20 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}$.

★ On pourrait encore continuer liste...

▶ 4. Tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$

Déf. 16 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est la tribu engendrée par l'ensemble des produits cartésiens de n intervalles de $\mathbb{R}$.

Th. 29 • La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des produits cartésiens de n intervalles de $\mathbb{R}$ du type $]-\infty, x]$.

• La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des produits cartésiens de n intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

• La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des produits cartésiens de n ouverts (resp. fermés) de $\mathbb{R}$.

• La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des produits cartésiens de n boréliens de $\mathbb{R}$.

Prop. 21 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

★ C'est souvent la définition des Boréliens que l'on choisit chez les gens biens...

Prop. 22 La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ est encore la tribu engendrée par l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^n$.

★ On pourrait encore continuer liste...

▶ 5. Tribu et image réciproque

Prop. 23 Ω et Ω' sont deux ensembles non vides. f est une application de Ω dans Ω'. $\mathcal{A}$ est une tribu de E.

$\mathcal{A}' = \{A' \in \mathcal{P}(\Omega') \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ est une tribu de Ω'.

Prop. 24 Ω et Ω' sont deux ensembles non vides. f est une application de Ω dans Ω'. $\mathcal{A}'$ est une tribu de Ω'.

$\mathcal{A} = \{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ est une tribu de Ω.

Prop. 25 Ω et Ω' sont deux ensembles non vides. f est une application de Ω dans Ω'.

$\mathcal{S}'$ est un ensemble de parties de Ω' et $\mathcal{A}'$ est la tribu de Ω' engendrée par $\mathcal{S}'$.

$\mathcal{A} = \{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ est la tribu de Ω engendrée par $\mathcal{S} = \{f^{-1}(S'), S' \in \mathcal{S}'\}$.

▶ 6. Les deux lemmes de Borel-Cantelli

Prop. 26 $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• $D = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty}\overline{A_k}\right)$ est l'événement : seul un nombre fini de A_n se réalisent.

• Si la série de terme général $P(A_n)$ converge $P(D) = 1$ et donc presque sûrement un nombre fini d'événements A_n se réalisent.

Prop. 27 $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• $B = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k\right)$ est l'événement : une infinité d'événements A_n se réalisent.

• Si la série de terme général $P(A_n)$ est divergente et si les événements de la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ sont mutuellement indépendants : $P(B) = 1$ et donc presque sûrement une infinité de A_n se réalisent.

▶ 7. Indépendance de deux tribus

Déf. 17 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Deux sous-tribus $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ de $\mathcal{A}$ sont indépendantes si tout élément de $\mathcal{S}$ est indépendant de tout élément de $\mathcal{T}$, c'est à dire si $\forall (S,T) \in \mathcal{S}\times\mathcal{T},\ P(S\cap T) = P(S)\,P(T)$.

Prop. 28 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si la tribu engendrée par A et la tribu engendrée par B sont indépendantes.

Prop. 29 Ω est un ensemble non vide. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont deux tribus sur Ω.

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux ensembles de parties de Ω qui engendrent respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.

On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont stables par intersection finie.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont indépendantes si et seulement si : $\forall C \in \mathcal{C},\ \forall C' \in \mathcal{C}',\ P(C \cap C') = P(C)\, P(C')$.

▶ 8. Indépendance d'une famille de tribus

★ La notion de tribus engendrées a disparu du nouveau du programme...

Déf. 18 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-tribus d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de **tribus mutuellement indépendantes** si pour toute partie **finie** non vide J de I et pour toute famille $(A_i)_{i\in J}$ d'événements telle que $\forall i \in J,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ on a :

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

★★ Ici encore l'indépendance mutuelle donne l'indépendance deux à deux mais pas le contraire.

Th. 30 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-tribus d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus mutuellement indépendantes si et seulement si toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements telle que $\forall i \in I,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Prop. 30 $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants si et seulement si la famille des tribus engendrées par ces événements est une famille de tribus mutuellement indépendantes.

Th. 31 **Le cas des suites finies de tribus** **PP** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de tribus indépendantes.

i') Pour toute partie non vide J de $[\![1, n]\!]$, pour toute famille $(A_i)_{i\in J}$ telle que $\forall i \in J,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ on a : $P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

ii) Toute suite $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i \in \mathcal{A}_i$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

iii) $\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n,\ P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n)$.

★★ Il convient de faire la différence entre l'indépendance d'une suite de tribus et l'indépendance d'une suite d'événements. En particulier cette équivalence entre ii) et iii) ne doit pas conduire à dire que les événements A_1, A_2, ..., A_n sont indépendants si $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n)$

Th. 32 **Le cas des suites infinies de tribus** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $(\mathcal{A}_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Les assertions suivantes sont indépendantes :

i) $(\mathcal{A}_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de tribus mutuellement indépendantes.

i') Pour toute partie $\boxed{\textbf{finie}}$ non vide J de $[\![n_0, +\infty[\![$ et pour toute famille $(A_i)_{i \in J}$ d'événements telle que $\forall i \in J,\ A_i \in \mathcal{A}_i$ on a $P\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) = \prod_{i \in J} P(A_i)$.

ii) Pour tout élément n de $[\![n_0 + 1, +\infty[\![$, $(\mathcal{A}_{n_0}, \mathcal{A}_{n_0+1}, \dots, \mathcal{A}_n)$ est une suite de tribus mutuellement indépendantes.

▶ 9. Égalité de deux probabilités

Th. 33 P et P' sont deux probabilités sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

$\mathcal{C}$ est un sous-ensemble (...) de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui engendre $\mathcal{A}$ et qui est $\boxed{\text{stable par intersection finie}}$.

P et P' sont égales si et seulement si $\forall C \in \mathcal{C},\ P(C) = P'(C)$.

Cor. P et P' sont deux probabilités sur l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $P = P'$.

ii) Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $P(I) = P'(I)$.

iii) Pour tout réel x, $P(]-\infty, x]) = P'(]-\infty, x])$.

iv) Pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$, $P(O) = P'(O)$.