POLYNÔMES

I GÉNÉRALITÉS

1. Définition

2. Degré d'un polynôme

II OPÉRATIONS SUR LES POLYNÔMES

1. Combinaison linéaire de polynômes

2. Produit de polynômes

3. La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

4. Familles libres de $\mathbb{K}[X]$. Bases de $\mathbb{K}_n[X]$

5. Composée de deux polynômes

III DIVISION EUCLIDIENNE

1. Multiples et diviseurs

2. Le théorème de la division euclidienne

IV FONCTION POLYNÔME

V DERIVÉE D'UN POLYNÔME

1. Dérivation

2. Formule de Taylor pour les polynômes

VI RACINE D'UN POLYNÔME

1. Racine ou zéro d'un polynôme

2. Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme

3. Application : nullité d'un polynôme ou égalité de deux polynômes

VII FACTORISATION DES ÉLEMENTS DE $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

1. Théorème de D'ALEMBERT

2. Factorisation dans $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$

3. Factorisation dans $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$

4. Pratique de la factorisation d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$

VIII COMPLÉMENTS

IX SAVOIR FAIRE

Dans la suite $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes. n est le plus souvent un élément de $\mathbb{N}$.

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

P Mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des séries, souvent oubliés...

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

! Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

Notons ques les formules sur le degré (et la valuation) supposent des conventions. En particulier :

Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $-\infty < n < +\infty$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $n + (-\infty) = (-\infty) + n = -\infty$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $n + (+\infty) = (+\infty) + n = +\infty$.

$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$.

$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$.

I GÉNÉRALITÉS

► 1. Définition

Déf. 1 On appelle **polynôme à une indéterminée à coefficients dans** $\mathbb{K}$, toute suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, nulle à partir d'un certain rang.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Déf. 2
1. **Le polynôme nul de** $\mathbb{K}[X]$ est la suite nulle de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit $P = (a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.
   - Les éléments de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ sont **les coefficients de P**.
   - P est un **polynôme constant** si $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0$.
   - P est un **monôme** si au plus un élément de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est non nul.

► 2. Degré d'un polynôme

Déf. 3 Soit $P = (a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$.

Le degré de P est le plus grand élément de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} |\, a_n \neq 0\}$; nous le noterons $\deg P$ ou $\mathrm{d}^\circ(P)$.

Par convention le degré du polynôme nul est $-\infty$.

II OPÉRATIONS SUR LES POLYNÔMES

▸ 1. Combinaison linéaire de polynômes

Th. 1 et **déf. 4** Soient $P = (a_n)_{n\geqslant 0}$ et $Q = (b_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $(a_n + b_n)_{n\geqslant 0}$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$. Ce polynôme est noté $P + Q$ et appelé somme de P et de Q.

2. $\lambda P = (\lambda a_n)_{n\geqslant 0}$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$. Ce polynôme est noté $\lambda\, P$ et appelé produit de P par le scalaire λ.

Th. 2 P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. λ est un élément non nul de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{\deg(P+Q) \leqslant \operatorname{Max}\big(\deg P, \deg Q\big)}$ avec égalité si $\deg P \neq \deg Q$.

2. $\boxed{\deg(\lambda\, P) = \deg P}$.

Th. 3 1. $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré **inférieur ou égal à** n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

▸ 2. Produit de polynômes

Th. 4 et **déf. 5** Soient $P = (a_n)_{n\geqslant 0}$ et $Q = (b_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

$\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)_{n\geqslant 0}$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ appelé produit de P par Q et noté $P \times Q$ ou PQ.

Th. 5 P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. $\boxed{\deg(PQ) = \deg P + \deg Q}$.

Th. 6 Soient P, Q, et R des éléments de $\mathbb{K}[X]$. Soit λ un élément de $\mathbb{K}$.

$\boxed{(PQ)R = P(QR)}$ $\boxed{PQ = QP}$ $\boxed{P(Q+R) = PQ + PR \text{ et } (Q+R)P = QP + RP}$

$\boxed{\lambda(PQ) = (\lambda P)Q = P(\lambda Q)}$

$\big(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\big)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

Th. 7 Si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$: $\boxed{PQ = 0_{\mathbb{K}[X]} \Rightarrow P = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q = 0_{\mathbb{K}[X]}}$.

★★ $\big(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\big)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre intègre.

▸ 3. La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

Puissance $n^{\text{ème}}$ d'un polynôme Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$.

$(P^n)_{\geqslant 0}$ est la suite définie par la récurrence suivante : $P^0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P^{n+1} = P \times P^n$.

Prop. 1 On note X le polynôme défini par la suite d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont nuls sauf le terme d'indice 1 qui vaut 1.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, X^p est le polynôme défini par la suite d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont nuls sauf le terme d'indice p qui vaut 1.

Prop. 2 Pour tout élément r de $\mathbb{N}$, $(1, X, X^2, \ldots, X^r)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Th. 8 • Pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout P dans $\mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique élement $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$.

• Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (on parle de **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$).

• Par conséquent, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $\boxed{\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1}$.

★★ $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$. Rien n'indique que P est de degré n. P est de degré inférieur ou égale à n.

P est de degré n si et seulement si $a_n \neq 0$.

Prop. 3 Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. $\boxed{P = 0_{\mathbb{K}[X]} \Longleftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0.}$

Prop. 4 Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$ de degré p et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$ de degré q.

$\boxed{P = Q \text{ si et seulement si : } p = q \text{ et } \forall k \in [\![0, p]\!],\ a_k = b_k.}$

Th. 9 et **déf. 6** Soit P un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$.

1. Il existe un unique élément n de $\mathbb{N}$ et un unique élément $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ tel que :

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

2. n est le degré de P, $a_n X^n$ son **terme de plus haut degré** ou son **terme dominant**, et a_n **le coefficient du terme de plus haut degré** ou son **coefficient dominant.**

Prop. 5 Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

$$\boxed{PQ = \Big(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{q} b_k X^k\Big) = \sum_{k=0}^{p+q} \Big(\sum_{i=\mathrm{Max}(0,k-q)}^{\mathrm{Min}(p,k)} a_i b_{k-i}\Big) X^k.}$$

► 4. Familles libres de $\mathbb{K}[X]$. Bases de $\mathbb{K}_n[X]$

Th. 10 **SD** **P** 1. Toute famille $(P_1, P_2, \ldots, P_q)$ d'éléments **non nuls** de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts est libre.

2. Toute famille $(P_1, P_2, \ldots, P_q)$ d'éléments **non nuls** de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\deg P_1 < \deg P_2 < \ldots < \deg P_q$ est libre. On parle de famille de polynômes de degrés échelonnés.

Th. 11 n est dans $\mathbb{N}$.

1. Si $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une famille de cardinal $n+1$ constituée d' éléments non nuls de $\mathbb{K}_n[X]$ de degré deux à deux distincts alors $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Si $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ telle que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$: $\deg P_k = k$, alors $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Prop. 6 n est dans $\mathbb{N}$. Pour tout a dans $\mathbb{K}$, $\big(1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\big)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Attention le résultat qui suit n'a rien à voir avec les précdédants.

Prop. 7 n est dans $\mathbb{N}^*$. a et b sont deux éléments distincts de $\mathbb{K}$.

$\Big((X-a)^n, (X-a)^{n-1}(X-b), (X-a)^{n-2}(X-b)^2, \ldots, (X-a)(X-b)^{n-1}, (X-b)^n\Big)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

▸ 5. Composée de deux polynômes

Déf. 7 Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle **polynôme composé** de P et Q le polynôme, noté $P \circ Q$ ou $P(Q)$, égal à $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, Q^k$.

Prop. 8 Soient P et Q deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$. $\boxed{\deg(P \circ Q) = \deg P\ \deg Q.}$

Prop. 9 P, Q et R sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$. λ est un réel.

1. $(\lambda\, P + Q) \circ R = \lambda\, P \circ R + Q \circ R$ 2. $(PQ) \circ R = (P \circ R)\,(Q \circ R)$ 3. $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$.

★ Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$. On a $X \circ P = P \circ X = P$. Ceci peut justifier que l'on note $P(X)$ le polynôme P.

III DIVISION EUCLIDIENNE

▸ 1. Multiples et diviseurs

Déf. 8 Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On dit que **B divise A** (on écrit souvent $B|A$) ou que **A est multiple de B** s'il existe un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = QB$.

Prop. 10 A et B sont deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si B divise A : $\deg B \leqslant \deg A$.

2. **P** Si B divise A et si $\deg B = \deg A$: il existe un élément non nul λ de $\mathbb{K}$ tel que $A = \lambda\, B$.

▸ 2. Le théorème de la division euclidienne

Th. 12 et **déf. 9** Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. On suppose <u>B non nul</u>.
Il existe un couple unique (Q, R) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\boxed{A = QB + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.}$$

Faire **la division euclidienne** de A par B c'est trouver les deux éléments Q et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $A = QB + R$ et $\deg R < \deg B$; Q est le **quotient** de cette division et R en est le **reste**.

P Il est fondamental de se convaincre qu'il suffit d'avoir $A = QB + R$ et $\deg R < \deg B$ pour que Q soit le quotient dans la division de A par B et R le reste.

En particulier si $\deg A < \deg B : Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $R = A$.

Prop. 11 Si A est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et si α est un élément de $\mathbb{K}$, $P(\alpha)$ est le reste dans la division euclidienne de P par $X - \alpha$.

IV FONCTION POLYNÔME

Déf. 10 On appelle fonction polynôme sur $\mathbb{K}$ associée à un élément $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, l'application $\widetilde{P}$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ qui à tout x dans $\mathbb{K}$ fait correspondre : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

$$\widetilde{P} : \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$
$$x \to \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Th. 13 1. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

$\lambda\,\widetilde{P+Q} = \lambda\,\widetilde{P} + \widetilde{Q}$. $\quad \widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$. $\quad \widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$. $\quad \widetilde{P} = \widetilde{Q}$ si et seulement si $P = Q$.

2. L'application φ qui à tout P de $\mathbb{K}[X]$ associe $\widetilde{P}$ est un morphisme injectif de l'algèbre $\big(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\big)$ dans l'algèbre $\big(\mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbb{K}), +, \times, \cdot\big)$.

★ Compte tenu de l'injectivité de φ nous nous autoriserons à identifier P et $\widetilde{P}$. Nous confondrons polynôme et fonction polynôme.

Ceci n'autorise cependant pas à confondre P et $P(x)$ ou à écrire "posons $X = 3$"...

Néanmoins il est conseillé d'utiliser le plus possible la notion de polynôme.

V DERIVÉE D'UN POLYNÔME

▸ 1. Dérivation

Déf. 11 Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément non constant de $\mathbb{K}[X]$, le polynôme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ est le polynôme dérivé de P et se note P'.

Si P est un élément constant de $\mathbb{K}[X]$ le polynôme dérivé de P est le polynôme nul ; on le note encore P'.

Prop. 12 Pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$ on pose $D(P) = P'$. D est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{K}[X]$ de noyau $\mathbb{K}_0[X]$.

Déf. 12 Pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$ et tout k dans $\mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le polynôme $D^k(P)$ et on l'appelle polynôme dérivé $k^{\text{ème}}$ de P.

$P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ se notent encore P', P'', P'''.

Prop. 13 Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

- Pour tout i dans $[\![0,n]\!]$, $P^{(i)}=\displaystyle\sum_{k=i}^{n} k(k-1)(k-2)\cdots(k-i+1)\, a_k\, X^{k-i}$.
- $P^{(n)}=a_n\, n!$.
- Pour tout i dans $[\![n+1,+\infty[\![$, $P^{(i)}=0_{\mathbb{K}[X]}$.

Prop. 14 Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$, et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $(\lambda P+Q)'=\lambda P'+Q'$ et $(PQ)'=P'Q+PQ'$.
2. $(P^r)'=rP'P^{r-1}$ pour tout r dans $\mathbb{N}^*$.
3. $(P\circ Q)'=Q'(P'\circ Q)$.
4. $\forall r\in\mathbb{N},\ (PQ)^{(r)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}P^{(k)}\,Q^{(r-k)}=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}P^{(r-k)}\,Q^{(k)}$. C'est la formule de **Leïbniz**.

▸ 2. Formule de Taylor pour les polynômes

Th. 14 $\boxed{\mathbf{P}}$ n est dans $\mathbb{N}$ et a dans $\mathbb{K}$. Soit P un élément de $\boxed{\mathbb{K}_n[X]}$.

$$\boxed{P=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.}$$

Ce résultat est précieux en algèbre linéaire. Il indique que la famille des coordonnées d'un élément P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base $\big(1,(X-a),(X-a)^2,\cdots,(X-a)^n\big)$ est : $\Big(P(a),P^{(1)}(a),\dfrac{P^{(2)}(a)}{2!},\cdots,\dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}\Big)$.
Il donne aussi le quotient et le reste dans la division de P par $(X-a)^q$.

VI RACINE D'UN POLYNÔME

▸ 1. Racine ou zéro d'un polynôme

Déf. 13 Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ et α un élément de $\mathbb{K}$. α est **une racine ou un zéro** de P si $\widetilde{P}(\alpha)=0_{\mathbb{K}}$ ou $P(\alpha)=0_{\mathbb{K}}$.

★ Soit P un élément $\mathbb{R}[X]$. P est encore un élément de $\mathbb{C}[X]$. Il est donc indispensable, lorsque l'on parle des racines de P, de préciser s'il s'agit des racines dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Notons que l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{R}$ est contenu dans l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$.

Th. 15 Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ et α un élément de $\mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) α est une racine de P.

i') $\widetilde{P}(\alpha)=0_{\mathbb{K}}$ ou $P(\alpha)=0_{\mathbb{K}}$.

ii) $X-\alpha$ divise P. $\boxed{\mathbf{P}}$

ii') Il existe un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P=(X-\alpha)Q$.

Prop. 15 $\boxed{\mathbf{P}}$ P est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et α_1, α_2, ..., α_q sont q éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

$(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_q)=\displaystyle\prod_{k=1}^{q}(X-\alpha_k)$ divise P si et seulement si α_1, α_2, ..., α_q sont des racines de P.

Th. 16 1. Le nombre de racines d'un polynôme non nul, est inférieur ou égal à son degré.

1'. Un polynôme de degré n dans $\mathbb{N}$ admet au plus n racines distinctes.

2. $\boxed{\mathbf{P}}$ Un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ ayant au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{K}$ est le polynôme nul.

$\boxed{\mathbf{P}}$ Pour montrer que deux éléments P et Q de $\mathbb{K}_n[X]$ sont égaux on pourra montrer que $P-Q$ admet au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes.

▶ 2. Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme

Déf. 14 Soit P un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ et α une racine de P.

L'ordre de multiplicité de α dans P est le plus grand élément k de $\mathbb{N}^*$ tel que $(X-\alpha)^k$ divise P.

Déf. 15 Soit P un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ et α une racine de P d'ordre de multiplicité k.

On dit alors que α est une **racine de P d'ordre k.**

Si $k=1$, α est une **racine simple** de P. Si $k>1$, α est une **racine multiple** de P.

Nous nous autoriserons parfois à parler de racine d'ordre 0 lorsqu'un élément de $\mathbb{K}$ n'est pas racine d'un polynôme.

Th. 17 P est un élément **non nul** de $\mathbb{K}[X]$. α appartient à $\mathbb{K}$ et k à $\mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) α est une racine de P d'ordre k.

ii) $(X-\alpha)^k$ divise P et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.

iii) Il existe un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $P=(X-\alpha)^kQ$ et $Q(\alpha)\neq 0$.

iv) $P(\alpha)=P^{'}(\alpha)=P^{''}(\alpha)=\cdots=P^{(k-1)}(\alpha)=0$ et $P^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

Prop. 16 Soit α une racine multiple d'ordre k d'un polynôme non nul P de $\mathbb{K}[X]$.

1. α est une racine d'ordre $k-1$ de P'.

2. Pour tout i dans $[\![0,k-1]\!]$, α est une racine d'ordre $k-i$ de $P^{(i)}$.

Prop. 17 Soit P un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$, α_1, α_2, ..., α_q sont des zéros deux deux distincts de P d'ordres de multiplicité respectifs k_1, k_2, ..., k_q.

$(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_q)^{k_q}=\displaystyle\prod_{i=1}^{q}(X-\alpha_i)^{k_i}$ divise P. Plus précisément il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ qui ne s'annule pas en α_1, α_2, ..., α_q et tel que : $P=\displaystyle\prod_{i=1}^{q}(X-\alpha_i)^{k_i}Q$.

Th. 18 Un polynôme de degré n de $\mathbb{K}[X]$ admet au plus n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Th. 19 Si P est un élément de $\mathbb{K}_n[X]$ possèdant au moins $n+1$ racines comptées avec leurs ordres de multiplicité alors P est le polynôme nul.

▶ 3. Application : nullité d'un polynôme ou égalité de deux polynômes

Pour montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est nul il suffit de lui donner une infinité de racines.

Pour montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est nul il suffit de lui donner au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes.

Pour montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est nul il suffit de lui donner au moins $n+1$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

Pour montrer que deux polynômes sont égaux on peut montrer que leur différence est le polynôme nul en utilisant l'une des conditions ci-dessus.

VII FACTORISATION DES ÉLEMENTS DE $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

▶ 1. Théorème de D'ALEMBERT

Th. 20 Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

▶ 2. Factorisation dans $\mathbb{C}$[X]

Th. 21 Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, c'est à dire est produit de polynômes de degré un.

Th. 22 Soit P est un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. Si λ_1, λ_2,..., λ_r sont les racines de P et m_1, m_2, ..., m_r leurs ordres de multiplicité, il existe un élément λ de $\mathbb{C}$ (et même de $\mathbb{C}^*$) tel que :

$$P = \lambda(X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r} = \lambda\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}.$$

Th. 23 Soit P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de **degré n non nul.**

P est le produit de n polynômes de degré un. Ainsi il existe des éléments λ, α_1, α_2, ..., α_n de $\mathbb{C}$ tels que :

$$P = \lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n) = \lambda\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k).$$

★ Dans ce dernier résultat les α_1, α_2, ..., α_n ne sont pas nécessairement distincts.

▶ 3. Factorisation dans $\mathbb{R}$[X]

Prop. 18 Soit P un élément non nul de $\mathbb{R}[X]$. Soit α un élément de $\mathbb{C}$ et soit k un élément de $\mathbb{N}^*$.

1. Si α est une racine de P d'ordre k, $\bar{\alpha}$ est une racine de P d'ordre k.
2. Si α est une racine **non réelle** de P d'ordre k, P est divisible par $\left(X^2 - 2\,\Re e(\alpha)\,X + |\alpha|^2\right)^k$.

Th. 24 Tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ est produit de polynôme de degré un et de polynômes de degré deux sans zéro dans $\mathbb{R}$.

Th. 25 Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$.

1. Si P n'a que des racines dans $\mathbb{R}$, $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $(m_1, \ldots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ et λ_1, ..., λ_r réels deux à deux distincts.

2. Si P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{s} (X^2 + \beta_k\, X + \gamma_k)^{m'_k}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $s \in \mathbb{N}^*$, $(m'_1, \ldots, m'_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$, $(\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \mathbb{R}^s$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \in \mathbb{R}^s$ et $\forall k \in [\![1, s]\!]$, $\beta_k^2 - 4\,\gamma_k < 0$.

3. Si P a des racines dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}$, $\boxed{P = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} (X^2 + \beta_j\, X + \gamma_j)^{m'_j}}$ avec :

$\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(r, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(m_1, \ldots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, $(m'_1, \ldots, m'_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$, λ_1, ..., λ_r réels deux à deux distincts, $(\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \mathbb{R}^s$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \in \mathbb{R}^s$ et $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $\beta_j^2 - 4\,\gamma_j < 0$.

▶ 4. Pratique de la factorisation d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$

P P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$.

Rappelons que si α est une racine de P d'ordre k, $\bar{\alpha}$ est une racine de P d'ordre k, et que $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - 2\, \Re e(\alpha)\, X + |\alpha|^2$.

Ainsi pour factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ il suffit de le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et de regrouper les facteurs correspondant à deux racines non réelles conjuguées.

On obtient alors P comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 sans racine dans $\mathbb{R}$.

VIII COMPLÉMENTS

▶ 1. Racines et coefficients

Th. 26 Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n dans $\mathbb{N}^*$. Soient x_1, x_2, ..., x_n les racines de P comptées avec leurs ordres de multiplicité. Ainsi $P = a_n(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$.

Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$ on pose : $\sigma_k = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ (σ_k est la somme des produits k à k des racines).

Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$: $\boxed{\sigma_k = (-1)^k\, \dfrac{a_{n-k}}{a_n}}$.

En particulier $\boxed{\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\, \dfrac{a_{n-1}}{a_n}}$ et $\boxed{\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n\, \dfrac{a_0}{a_n}}$.

P Pour retrouver σ_k il suffit d'écrire $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = a_n(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$ et de calculer le coefficient de X^{n-k} dans les deux expressions.

▸ 2. Polynômes d'interpolation de Lagrange

Prop. 19 x_0, x_1,...,x_n sont $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

On pose, pour tout i dans $[\![0,n]\!]$: $L_i = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x_i - x_k)} \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(X - x_k)$.

1. Soit i un élément de $[\![0,n]\!]$. $\forall k \in [\![0,n]\!],\ L_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$.

L_i est l'unique élément de $\mathbb{K}_n[X]$ qui vaut 0 en x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n et 1 en x_i.

2. $(L_0, L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Les coordonnées d'un élément P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont : $\big(P(x_0), P(x_1), \cdots, P(x_n)\big)$.

3. Si $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ est un élément quelconque de $\mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique élément Q de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0,n]\!],\ Q(x_i) = y_i$; $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k\, L_k$.

▸ 3. Polynômes pairs (resp. impairs)

Déf. 16 P est un élément de $\mathbb{K}[X]$. P est **pair** si $P(X) = P(-X)$. P est **impair** si $P(X) = -P(-X)$.

Prop. 20 Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

P est pair si et seulement si : $\forall k \in [\![0, \mathrm{Ent}\,((n-1)/2)]\!],\ a_{2k+1} = 0$.

P est impair si et seulement si : $\forall k \in [\![0, \mathrm{Ent}\,(n/2)]\!],\ a_{2k} = 0$.

Prop. 21 P est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

P est pair si et seulement si il existe un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $P(X) = Q(X^2)$.

P est impair si et seulement si il existe un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $P(X) = XQ(X^2)$.

Prop. 22 P est un élément pair ou impair de $\mathbb{K}[X]$ et α une racine non nulle de P.

$-\alpha$ est encore une racine de P et $X^2 - \alpha^2$ divise P.

▸ 4. Valuation

Déf. 17 Soit $P = (a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$.

La valuation de P est le plus petit élément de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} |\, a_n \neq 0\}$; nous le noterons $\mathrm{val}(P)$.

Par convention la valuation du polynôme nul est $+\infty$.

Prop. 23 P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. λ est un élément non nul de $\mathbb{K}$.

1. val(P+Q) $\geqslant \mathrm{Min}\big(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q)\big)$ avec égalité si $\mathrm{val}(P) \neq \mathrm{val}(Q)$

2. $\mathrm{val}(\lambda\, P) = \mathrm{val}(P)$.

3. $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$

▸ 5. Polynômes irréductibles

Déf. 18 Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il n'est pas constant et si l'ensemble de ses diviseurs est constitué des polynômes de degré 0 et des polynômes λP avec λ dans $\mathbb{K}^*$.

Th. 27 Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Th. 28 Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré un et les polynômes de degré deux sans zéro dans $\mathbb{R}$.

Th. 29 Tout élément non constant de $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$) est produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$).

▸ 6. Polynômes de Tchebychev

Prop. 24 Pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un unique élément T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\,\theta)$.

P Pour l'existence écrire :

$$\cos(n\,\theta) = \Re e\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n = \Re e\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}\,(i\,\sin\theta)^k\right) = \sum_{k=0}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2k}(\cos\theta)^{n-2k}\,(-1)^k\,(\sin^2\theta)^k ...$$

Prop. 25
- Pour tout n, T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^n et a la parité de n.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2\,X\,T_{n+1} - T_n$.
- Si n est dans $\mathbb{N}^*$, T_n admet n racines simples qui sont y_0, y_1, ..., y_{n-1} où $y_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$ pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$.

▸ 7. Factorisations classiques

Prop. 26 Pour tout réel θ : $\boxed{X^2 - 2\cos\theta\,X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).}$

Prop. 27 Si n appartient à $\mathbb{N}^*$, $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right).}$

Prop. 28

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right).}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X^{2n+1} - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1\right).}$$

▸ 8. "Dérivée logarithmique"

Prop. 29 r est dans $\mathbb{N}^*$. λ, x_1, x_2, ..., x_r sont des éléments de $\mathbb{K}$. On suppose λ non nul.

Si $P = \lambda\prod_{k=1}^{r}(X - x_k)$ alors $\boxed{\forall x \in \mathbb{K} - \{x_1, x_2, \dots, x_r\},\ \dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{r}\dfrac{1}{x - x_k}}$

▸ 9. Polynôme normalisé ou unitaire

Déf. 19 On dit qu'un polynôme est **unitaire** ou **normalisé** si le coefficient de son terme de plus haut degré vaut 1.

Prop. 30 Toute droite vectorielle de $\mathbb{K}[X]$ contient un polynôme normalisé, ou unitaire, et un seul.

▸ 10. Algorithme d'Hörner

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$.

Pour évaluer $P(\alpha)$ avec α dans $\mathbb{R}$, c'est à dire pour calculer : $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n$ la méthode la plus usuelle nécessite n additions et $2n-1$ multiplications ($n-1$ pour calculer α^2, α^3,...,α^n et n pour faire le produit de ses valeurs par les coefficients). C'est beaucoup. On peut faire mieux.

La méthode d'Horner s'appuie sur la factorisation suivante :

$$\boxed{P(\alpha) = \Bigg(\bigg(\cdots\big((a_n\alpha + a_{n-1})\alpha + a_{n-2}\big)\alpha + \cdots + a_2\bigg)\alpha + a_1\Bigg)\alpha + a_0.}$$

On calcule alors $a_n\alpha$ et on ajoute a_{n-1} ; on multiplie le tout par α et on ajoute a_{n-2} et ainsi de suite. Le dernier pas donne la valeur de P en α.

Th. 30 Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$.

On considère la suite $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ définie par l'une des deux récurrences suivantes :

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ b_{n-k} = b_{n-k+1}\,\alpha + a_{n-k} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b_n = a_n \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ b_i = b_{i+1}\alpha + a_i \end{cases}.$$

1. La valeur de P en α est alors b_0.
2. $P = (X-\alpha)(b_nX^{n-1} + b_{n-1}X^{n-2} + \cdots + b_2X + b_1) + b_0$ donc $Q = b_nX^{n-1} + b_{n-1}X^{n-2} + \cdots + b_2X + b_1$ est le quotient dans la division de P par $X - \alpha$.

Le calcule de $P(\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,\alpha^k$ nécessite alors n additions et n multiplications.

Remarque En itérant le processus sur Q on obtient $P'(\alpha)$.

En poursuivant encore nous aurons $P''(\alpha)/2$, $P^{(3)}(\alpha)/3!$, ... On peut donc obtenir la valeur des dérivées de P en α et l'écriture de P sur la base $((X-\alpha)^n)_{n\geqslant 0}$.

Voici un extrait de programme Turbo Pascal (! ! !) contenant une fonction qui utilise l'algorithme d'Hörner.

```
Const DegMax=25;
Type Poly=array[0..DegMax] of real;

Funcion Horner(n:integer;x:real;P:Poly):real;

Var i:integer;b:real;

begin
b:=P[n];
for i:=n-1downto 0 do b:=b*x+P[i];
Horner:=b;
End;
```

IX SAVOIR FAIRE

- Travailler dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ (resp. $\mathbb{K}_n[X]$).
- Étudier un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (resp. $\mathbb{K}_n[X]$).
- Faire le produit de deux polynômes.
- Trouver le degré et le terme de plus haut degré d'un polynôme non nul.
- Trouver le coefficient de X^k dans une "expression polynômiale".
- Faire la division euclidienne d'un polynôme par un autre.
- Trouver les racines d'un polynôme (? !).
- Trouver l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
- Se servir de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
- Se servir de l'unicité proposée par le théorème de la division euclidienne.
- Factoriser un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ou de $\mathbb{R}[X]$.
- Étudier une suite de polynômes définie par récurrence.
- Utiliser les relations entre coefficients et racines.