Je n'ai pas (ou presque pas) modifié les énoncés bien que...

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2005

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 1 HEC 2005-1 F 1 *élève*

Que dire d'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2$?

Question 2 HEC 2005-2 F 3 *élève*

f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b)$, $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$.

Montrer qu'il existe un élément c de $]a,b[$ tel que $f(c) = f(a) = f(b)$ et $f'(c) \leqslant 0$.

Question 3 HEC 2005-3 F 1 *élève*

Existe une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, symétrique, orthogonale et dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

F 2 *JF* Trouver l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ont ces qualités.

Question 4 HEC 2005-4 F 1

E est un espace vectoriel de dimension finie et F, G, H sont trois sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que la somme $F + G + H$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $(F+G) \cap H = \{0_E\}$.

Question 5 HEC 2005-5 F 2

Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big[k \ln(n^2 + k^2)\big] - n^2 \ln n$

Question 6 HEC 2005-6 F 2

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels positifs ou nuls. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{1+n^2\, u_n}\cdot$

Y a-t-il un lien entre la nature de la série de terme général u_n et celle des autres ?

Question 7 HEC 2005-7 F 2

Quelles sont les lois possibles pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ P_{\{X>n\}}(X > n+p) = P(X > p) \quad ?$$

Question 8 HEC 2005-8 F 1

Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices symétriques non diagonalisable ?

Question 9 HEC 2005-9 F 2

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. f est un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Déterminer le rang de f.

Question 10 HEC 2005-10 $\boxed{\textbf{F 2}}$

f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\,g(x) \geqslant 4$.

Montrer que $36 \leqslant \left(\int_{-2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-2}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Question 11 D'après HEC 2005-11 $\boxed{\textbf{F 2}}$

X est une variable aléatoire de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$. On pose $Y = [X]$ (partie entière...)

Montrer que X possède une espérance si et seulement si Y possède une espérance.

Question 12 D'après HEC 2005-12 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Etudier la fonction $f : x \to \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{t^2}{t^2 + (\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2006

Question 1 D'apès HEC 2006-1 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t = 1 + x$.

Question 2 D'apès HEC 2006-2 $\boxed{\textbf{F 3}}$

A, B et C sont trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe trois complexes α, β, γ, non tous nuls et tels que $\alpha\, A + \beta\, B + \gamma\, C$ admette une unique valeur propre.

Question 3 D'apès HEC 2006-3 $\boxed{\textbf{F 1}}$

$E = \mathbb{R}^3$. f est un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et -1 sont des valeurs propres.

Démontrer que f est diagonalisable.

Question 4 D'apès HEC 2006-4 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$ (on pourra introduire une variable aléatoire usuelle).

Question 5 D'apès HEC 2006-5 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que : P' divise P $(\bigstar)$. Montrer que P'' divise P'... ($\boxed{JF}$ si $\deg P' \geqslant 1$).

Trouver tous les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient $(\bigstar)$.

Question 6 D'apès HEC 2006-6 $\boxed{\textbf{F 2}}$

$n \in [\![2, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Existe-t-il m vecteurs x_1, x_2, ..., x_m de E, avec $m \neq n$ tels que $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \big(< x, x_k > \big)^2$.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une suite d'éléments de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \|x_k\| = 1 \text{ et } \forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \big(< x, x_k > \big)^2.$$

Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base orthonormée de E.

Question 7 HEC 2006-7 $\boxed{\textbf{F 1}}$ *élève*

X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Donner la loi de $Y = e^X$. Existence et valeur du moment d'ordre k.

Question 8 HEC 2006-8 $\boxed{\textbf{F 1}}$ *élève*

Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

Une personne dispose de n euros, paye un euro pour tirer une boule et gagne autant d'euros que le numéro de la boule obtenue. Que peut-elle espérer ?

Question 9 HEC 2006-9 $\boxed{\textbf{F 2}}$ *élève*

On considéres deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ X_n et Y_n suivent la loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que X_1, X_2, ..., X_n, ..., Y_1, Y_2, ..., Y_n, ... sont mutuellement indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, N_n est la variable alétoire égale au nombre d'indices i de $[\![1,n]\!]$ tels que lévénement $\{X_i \leqslant Y_i\}$ se réalise.

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{N_n}{n}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}$.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2007

Question 1 HEC 2007-1 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.

Soit θ un réel. On pose $Y_0 = X_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n$.

Q1. Donner la loi de Y_n.

Q2. Calculer $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

Question 2 HEC 2007-2 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé.

Q1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer toutes les droites D de $\mathbb{R}^3$ stables par f, c'est à dire telles que $f(D) \subset D$.

Question 3 HEC 07-3 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Q1. Montrer que A est semblable à $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q2. Vérifier que $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et déterminer sa dimension.

Question 4 HEC 2007-4

$\boxed{\textbf{F 1}}$ Une matrice carrée est dite nilpotente s'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^q = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente différente de la matrice nulle.

Q1. Montrer qu'il existe un plus petit entier p de $\mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.

Q2. Justifier que la matrice $A = I - N$ est inversible et déterminer son inverse.

Q3. Montrer que $I - A^{-1}$ est nilpotente.

Question 5 HEC 2007-5 $\boxed{\textbf{F 1}}$

On suppose que $P = X(X+2)$ est un polynôme annulateur d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que -2 est valeur propre de A et que A est diagonalisable.

Question 6 HEC 2007-6 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Q1. Quelle(s) valeurs(s) de j maximise(nt) $P(X = j)$?

Q2. Pour j dans $\mathbb{N}^*$, quelle(s) valeurs(s) de λ maximise(nt) $P(X = j)$?

Q3. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{N}^*$, $E\big(|X - \lambda|\big) = \dfrac{2\,\lambda^\lambda\, e^{-\lambda}}{(\lambda - 1)!}$.

Question 7 HEC 2007-7 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles et admettant une densité f qui est continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que X possède un moment d'ordre 2.

Q1. Étudier le comportement de $x^2\,P(X \geqslant x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Q2. Établir une relation entre $E(X^2)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,P(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

Q3. Prouver que : $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} P(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 2\int_0^{+\infty} x\,P(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

Question 8 HEC 2007-8 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit pour n entier naturel la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

Q1. Montrer que pour tout n il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

Q2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent simple de u_n.

Q3. On pose $u_n = \dfrac{1}{n} - a_n$. Vérifier que $n\,a_n = u_n^5$ en déduire un équivalent de a_n.

Question 9 HEC 2007-9 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Donner un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de $F(x) = \displaystyle\int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t$.

Question 10 HEC 2007-10 $\boxed{\textbf{F 1}^-}$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = a\,e^{x - a\,e^x}$.

Q1. À quelle(s) condition(s) f est-elle une densité de probabilité ?

Q2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = e^X$?

Question 11 HEC 2007-11-S103 $\boxed{\textbf{F 1}}$

f et g sont deux endomorphismes d'un espace euclidien E, qui commutent. On suppose que les matrices S et T de f et g dans une base orthonormale sont respectivement symétrique et antisymétrique, c'est à dire vérifient ${}^tS = S$ et ${}^tT = -T$.

Montrer que, pour tout élément x de E, on a $f(x) \perp g(x)$ et $\|f(x) + g(x)\| = \|f(x) - g(x)\|$

Question 12 HEC 2007-12-S104 $\boxed{\textbf{F 2}}$

E est un espace euclidien de dimension n. On note $<.,.>$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ <x,y>= 0 \Rightarrow <f(x), f(y)>= 0.$$

Montrer qu'il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x dans E, $\|f(x)\| = k\,\|x\|$.

Question 13 HEC 2007-13-S107 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Déterminer une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, chacune prenant deux valeurs, telle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable nulle mais telle que la suite $\big(E(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite $\big(V(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers $+\infty$.

Question 14 HEC 2007-14-S108 $\boxed{\textbf{F 2}}$ G. GOBINET

n est un entier naturel non nul et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices
symétriques réelles de taille n. Soit A et B dans $\mathcal{S}_n$. On dit que $A \leqslant B$ si et seulement si pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX \leqslant {}^tXBX$.

Montrer que si A, B, et C sont trois éléments de $\mathcal{S}_n$, on a :

i) $\Big[A \leqslant B \text{ et } B \leqslant C\Big] \Rightarrow A \leqslant C$;

ii) $\Big[A \leqslant B \text{ et } B \leqslant A\Big] \Rightarrow A = B$.

Question 15 HEC 2007-15-S109 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Pour tout ω dans Ω on considère la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.

Déterminer la probabilité $P\big(\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ inversible}\}\big)$

Question 16 HEC 2007-16-S115 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit α un réel strictement positif. Montrer que pour tout réel x positif ou nul, il existe un unique réel positif ou nul noté $f(x)$ tel que $f(x)\, e^{f(x)} = x^\alpha$.

Étudier ensuite la dérivabilité de f, et exprimer f' en fonction de f le cas échéant.

Question 17 HEC 2007-17-S120 $\boxed{\textbf{F 3}^+}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que E n'est pas la réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts (c'est à dire distincts de E).

Question 18 HEC 2007-18-S124 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et N une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et toutes indépendantes.

On suppose que les variables aléatoire X_k suivent la loi exponentielle de paramètre λ et que N suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$.

Q1. Que dire de $X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ lorsque r appartient à $\mathbb{N}^*$?

Q2. En déduire la fonction de répartition puis la loi de S. Vérifier que $E(S) = E(N)E(X_1)$.

Question 19 HEC 2007-19-S130 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et f, g, h trois endomorphismes de E vérifiant : $f + g + h = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = g \circ f = g \circ h = h \circ g = h \circ f = f \circ h$.

Q0. Le texte dit : montrer que f, g et h sont des projecteurs. Montrer que c'est faux.

Dans la suite on suppose que $f + g + h = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = g \circ f = g \circ h = h \circ g = h \circ f = f \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q1. Montrer que f, g et h sont des projecteurs.

Q2. Prouver que $\varphi = f + g - 2\,h$ est diagonalisable.

Q3. Donner un exemple d'un tel triplet d'endomorphismes.

Question 20 HEC 2007-20-S143 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. Déterminer les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Q2. Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par f. Montrer que $\dim f(P) = 1$.

En déduire les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Question 21 HEC 2007-21-S144 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soi X et Y deux variables alétaoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X et Y sont indépendantes, identiquement distribuées, et qu'elles admettent un moment d'ordre 2.

Les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Sinon, à quelle condition sur la loi (commune) de X et Y le sont-elles ?

Question 22 HEC 2007-22-S149 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q1. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x^{k+1} + x^k - n = 0$ admet une solution unique x_n.

Q2. Étudier les variations et la limite éventuelle de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q3. Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Question 23 HEC 2007 $\boxed{\textbf{F 2}}$ M. BOUCHER

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe q dans $\mathbb{N}^*$ telle que $A^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q1. Montrer qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ telle que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q2. Montrer que $B = I - A$ est inversible et trouver son inverse.

Q3. Oubliée. JF propose : montrer qu'il existe un unique élément P de $\mathbb{R}[X]$ telle que : $P + P' + P'' + \cdots + P^{(5)} = X^5$.

Question 24 HEC 2007 $\boxed{\textbf{F 1}}$ V. OWEN

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Montrer que $\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} f^2 = \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$ et que $\dim \operatorname{Ker} f^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$.

Question 25 HEC 2007 $\boxed{\textbf{F 1}}$ Vu par JF

$f : x \to \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^x}$. Trouver le domaine de définition, les variations et la limite en $+\infty$ de f.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2008

Question 1 HEC 2008 S1 $\boxed{\text{F1}}$

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout n strictement supérieur ou égal λ on considère la variable aléatoire $N_n = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Inf}\{i, X_{i,n} = 1\}$, où $(X_{i,n})_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour tout entier i $X_{i,n}$ suive une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}\cdot$

Étudier la convergence en loi de la suite de terme général N_n.

Question 2 HEC 2008 S2 $\boxed{\text{F2}}$

u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que u est de rang 1.

Q1. Montrer qu'il existe un nombre λ réel tel que $u^2 = \lambda\, u$.

Q2. Montrer que si $\lambda \neq 1$, $u - \mathrm{Id}_E$ est inversible et déterminer son inverse.

Question 3 HEC 2008 S3 $\boxed{\text{F1}}$

On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat Pile ou Face. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants.

Pour tout n entier naturel non nul, on note P_n la probabilité qu'au cours de n lancers, on n'ait jamais obtenu deux Pile successifs.

Q1. Calculer P_1, P_2 et P_3.

Q2. Trouver une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2} pour tout n entier naturel non nul et prouver que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Question 4 HEC 2008 S4 $\boxed{\text{F2}}$

f est l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,1) \end{cases}.$

Q1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 1-y$.

Q2. f est-elle continue en $(1,1)$?

Q3. Justifier l'existence de $\underset{(x,y)\in[0,1]^2}{\mathrm{Min}} f(x,y)$ et $\underset{(x,y)\in[0,1]^2}{\mathrm{Max}} f(x,y)$ et déterminer leur valeur.

Question 5 HEC 2008 S5 $\boxed{\text{F3}}$

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels qui converge ver ℓ.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dbinom{n}{0}u_0 + \dbinom{n}{1}u_1 + \dbinom{n}{2}u_2 + \cdots + \dbinom{n}{n}u_n\right)$. On se propose de montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.

Q1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to 0}\left(\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}\right) = 0.$

Q2. Montrer le résultat pour $\ell = 0$.

Q3. Étudier le cas général.

Question 6 HEC 2008 S6 $\boxed{\textbf{F1}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit θ un réel strictement postif et pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $n\,\theta$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{X_n - n\,\theta}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Q2. En désuire que pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(e^{-n\,\theta} \sum_{k \leqslant n\,x} \frac{(n\,\theta)^k}{k!} \right)$.

Remarque : dans le texte initial il y avait un λ réel strictement positif à la place de n et on faisait tendre λ vers $+\infty$! !

Question 7 HEC 2008 S7 $\boxed{\textbf{F2}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère n variable aléatoires à densité, de même loi que et indépendantes X_1, X_2, ..., X_n. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\big(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_n(\omega)\big)$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ réordonnés par ordre croissant.

On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

Q1. Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $P(Y_k \leqslant x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j \, (1 - F(x))^{n-j}$.

Q2. En déduire que Y_k admet une densité que l'on explicitera sans signe $\sum$.

Question 8 HEC 2008 S8 $\boxed{\textbf{F2}}$

Q1. $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $x \to (1+x)^{1/2}$ admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0. On note P la partie régulière de ce développement limité.

Q2. Montrer que $P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1}.

Q3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est à dire : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 0$.

Montrer que l'équation $B^2 = I_n + A$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n) admet au moins une solution.

Question 9 HEC 2008 S9 $\boxed{\textbf{F1}}$

U est une variable aléatoire définie sur un espace probablilsé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0, 1]$, et $q \in]0, 1[$.

Déterminer la loi de la variable alétaoire $X = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

Question 10 HEC 2008 S10 $\boxed{\textbf{F1}}$

Représenter dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des point de coordonnées (a, b) telles que $a > 0$, $b > 0$ et la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{1 + b^n}$ converge.

Question 11 HEC 2008 S11 $\boxed{\textbf{F1}}$

$n \in [\![2, +\infty[\![$. Déterminer les polynômes de degré n, divisible par $X + 1$ et dont les restes dans la division euclidienne par $X + 2$, $X + 3$, ..., $X + n + 1$ sont égaux.

Question 12 HEC 2008 S12 Éco $\boxed{\textbf{F2}}$

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Montrer que la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = F(x+1) - F(x)$ est une densité de probabilité.

Question 13 HEC 2008 S13 Éco $\boxed{\textbf{F2}}$

Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}\cdot$

Détetrminer deux réels a et b tels que $u_n = 1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

Question 14 HEC 2008 S14 Éco $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit f la fonction définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$

Q1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.

Q2. Déterminer les points critiques de f.

Q3. La fonction a-t-elle des extrema locaux ?

Question 15 HEC 2008 S15 Éco $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Q1. a) Trouver une relation entre A^2, A et I (matrice identité d'ordre 2).

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Q2. Calculer les valeurs propres possibles de A.

Q3. A est-elle diagonalisable ?

Question 16 HEC 2008 S16 Éco $\boxed{\textbf{F1}}$

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et ayant la même loi de densité φ, définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = k\,e^{-|x|}$.

Q1. Déterminer la valeur de k.

Q2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

Q3. Justifier l'existence de $E(X)$ et $V(X)$ et les calculer.

Question 17 HEC 2008 S17 Éco $\boxed{\textbf{F1}}$

Q1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$, vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

Q2. Déterminer la loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et de même loi de fonction de répartition F. Généraliser à n variables.

Question 18 HEC 2008 S18 Éco $\boxed{\textbf{F1}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit a un réel strictement positif et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2a]$.

Q1. $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, ..., X_n qui ont toutes la même loi que X. On pose $M_n = \text{Max}(X_1, \ldots, X_n)$.

Déterminer la loi de M_n et calculer son espérance et sa variance.

Q2. En déduire que $U_n = \dfrac{n+1}{2n} M_n$ est un estimateur sans biais de $E(X)$.

Est-il préférable à l'estimateur $V_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$?

Question 19 **HEC 2008 S19 Éco** $\boxed{\textbf{F1}}$

On note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

On définit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. Calculer K^2, K^3. En déduire que K est inversible et déterminer son inverse K^{-1}.

Q2. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I (matrice identité d'ordre 3), K et K^2.

En déduire que, pour tout $(a,b,c,a',b',c') \in \mathbb{R}^6$, $M(a,b,c) \times M(a',b',c') = M(a',b',c') \times M(a,b,c)$.

Question 20 **HEC 2008 S20 Éco** $\boxed{\textbf{F1}}$

Un signal binaire (de valeur 1 ou -1) doit transiter par n relais. Au passage de chaque relais, le signal a une probabilité p $(0 < p < 1)$ d'être inversé. On suppose que les relais sont indépendants. On note p_n la probabilité pour que le signal transmis soit identique au signal initial. Montrer que : $p_n = p + (1-2p)\,p_{n-1}$.

En déduire une expression général de p_n et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Question 21 **HEC 2008 S21 Éco** $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. Déterminer les valeurs propres de J. La matrice J est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a^3 & 2 & 1 \\ 0 & a^3 - 1 & 2 \\ 0 & 1 & a^3 \end{pmatrix}$ soit inversible.

Question 22 **HEC 2008 S22 BL** $\boxed{\textbf{F1}}$

Q1. $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Min}} X_k$. Déterminer la loi de U_n, son espérance et sa variance.

Q2. Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ sur $\mathbb{N}^*$. On suppose N indépendantes des X_k pour tout k.

On définit, pour ω appartenant à l'univers $\Omega : U(\omega) = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Min}} X_k(\omega)$.

Déterminer la fonction de répartition de U.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2009

Question 1 HEC 2009-1 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $(E, < ., . >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

Q1. Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

Q2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

On traitera le cas général où les valeurs propres de f et de g sont des réels positifs ou nuls. On ajoutera ϕ symétrique !

Question 2 HEC 2009-2 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Q1. Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale $J(z) = \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ est convergente.

Q2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ $\dfrac{e^{-z}}{z}$.

Question 3 HEC 2009-3 $\boxed{\textbf{F 1}^-}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, indépendantes et de même loi .

On définit la variable aléatoire : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Q1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $E(e^{xS_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $P([S_n \geqslant a]) \leqslant e^{-ax}\, E(e^{xS_n})$.

Q2. Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par : $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$.

Question 4 HEC 2009-4 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$.

Q1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, $P([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que si $b > 0$,

$$P\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $P([|X_n - np| \leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

Question 5 HEC 2009-5 $\boxed{\textbf{F 1}}$

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q1. On pose $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, -1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1, 0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$.

Q2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.

Q3. Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Question 6 HEC 2009-6 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon indépendant, identiquement distribué de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose λ inconnu et on cherche à l'estimer par un intervalle de confiance.

On pose : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sqrt{n}\, \dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

A l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Question 7 HEC 2009-7 $\boxed{\textbf{F 1}}$ F. PELLEGRINI

Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. A chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité p, sa poche de gauche pour un prendre un.

Q1. Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?

Q2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$.

Question 8 HEC 2009-8 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$.

Q1. Étudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.

Q3. En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra admettre que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Voici des questions sans préparation de l'oral HEC 2009 obtenues auprès des élèves. Les énoncés ne sont pas garantis. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2009 (suite)

Question 9 HEC 2009-9 $\boxed{\textbf{F 1}}$ E. BLOCK

f et p sont deux endomorphismes de E. On suppose que p est une projection.

Montrer que $\operatorname{Ker}(f \circ p) = \operatorname{Ker} p + (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} p)$.

Question 10 HEC 2009 $\boxed{\textbf{F 2}}$ M. DESSUGES

a et b sont deux réels strictement positifs. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi, prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}.$$

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n^{1/b}}\operatorname{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ converge en loi.

Vu en 2010

Question 11 HEC 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ M. ANGLADE

n appartient à $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n sont n variable aléatoires à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant pour densité la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et $T_n = \operatorname{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Calculer $E(M_n)$ et $E(T_n)$.

Déduire de M_n et T_n deux estimateurs sans biais et convergents de a. Quel est le meilleur ?

Question 12 HEC 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ V. LOPEZ

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot$

Question 13 HEC 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ E. BILLETTE

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels telles que : $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{u_n}\cdot$

Montrer que les deux suites ont pour limite $+\infty$.

Question 14 HEC 2009 $\boxed{\textbf{F 1}^-}$ H. VANDE MAELE

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant même loi.

$X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = -1) = q = 1 - p$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Trouver $\mathrm{cov}(S_n, S_m)$ pour tout (n, m) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Question 15 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}^-}$ G. MIGNEN

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant la même loi. On suppose qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$.

On considère la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définie par $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si } X(\omega) < Y(\omega) \\ 0 & \text{si } X(\omega) = Y(\omega) \\ 1 & \text{si } X(\omega) > Y(\omega) \end{cases}$

Montrer que la série de terme général p_n^2 converge.

Trouver la loi de Z en fonction de $s = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n^2$.

Question 16 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *vu par JF*

On considère un cube dont les côtés ont pour longueur 1. On note S_0, S_1, S_2,..., S_7 ses sommets.

Q1. Calculer les distances de S_0 aux autres sommets.

Q2. Une puce part du sommet S_0 et se déplace de la manière suivante. Elle reste sur S_0 avec la probabilité $\dfrac{7}{36}$ et elle va en S_i $(i \neq 0)$ avec une probabilité proportionnelle a l'inverse du carré de la distance de S_0 à S_i (le coefficient de propotionnalité étant toujours le même). Et ainsi de suite.

Trouver la probabilité pour qu'après un (resp. deux) déplacement (déplacements) elle se trouve sur le sommet opposé à S_0.

Question 17 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *vu par JF*

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Montrer que si $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2010

Question 1 HEC 2010 F 1

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. de la loi de X.

Q1. Déterminer une densité de $Y_k = -\operatorname{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$.

Q2. En déduire $P(\{X_n \geqslant X_1\} \cap \cdots \cap (\{X_n \geqslant X_{n-1}\})$.

Question 2 HEC 2010 F 1

Soit f l' application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = 3XP + (X^2 - X)P' - (X^3 - X^2)P''$, où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2. Déterminer $f(X^k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Que peut-on dire du degré de $f(X^k)$?

Q3. f est injective ? surjective ?

Q4. a) Déterminer n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f.

b) n étant ainsi choisi, soit Φ l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$. Φ est-il diagonalisable ?

Question 3 HEC 2010 F 1

Q1. Soit n un entier strictement supérieur à 3.

n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on précisera.

Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n - 1$ autres personnes (événement noté A) ?

Q2. Un jeu consiste à réitérer l'expérience précédente (appelée "partie") jusqu'à la réalisation de A. On suppose les itérations indépendantes. On suppose encore que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X la variable aléatoire à valeurs entières désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

Question 4 HEC 2010 F 2 Vu par JF

Q1. Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{c}{1 + x^2}$ est une densité de probabilité.

Q2. Une variable aléatoire réelle ayant une telle densité possède-t-elle une espérance ?

Q3. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle de densité f, X et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi.

Cours *Matrice inversible : définition et propriétés.*

Question 5 HEC 2010 F 2

Q1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Q2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède une autre valeur propre, égale à 1 ou à -1.

b) Montrer que si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.

Question 6 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $f(M)$ la matrice $\begin{pmatrix} c'' & b'' & a'' \\ c' & b' & a' \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Q1. Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q2. Trouver les valeurs propres de f.

Q3. a) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le rang de $f(M)$ est égal au rang de M.

b) Cette propriété de préservation du rang est-elle vraie pour tous les automorphismes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Question 7 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs α et λ tels que $P(X_1 > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^\lambda}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}}\ \mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi

Vu à HEC en 2009.

Question 8 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit f un endomorphisme d'une espace vectoriel de dimension n supérieur ou égal à 1.

On suppose que $(f - \mathrm{Id}_E)^3 \circ (f - 2\ \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ (f - 2\ \mathrm{Id}_E) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Étudier la digonalisisabilité de f.

Question 9 HEC 2010 J. HÉRY $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

Déterminer une base ainsi que la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels. Déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le noyau et l'image de f.

Cours *Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.*

Question 10 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

n est un entier supérieur ou égal à deux. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que le rang de A est égal au rang de ${}^tAA$.

Question 11 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $2A^4 - 2A^3 + I = 0$ (I désigne la matrice identité d'ordre p et 0 la matrice nulle carrée d'ordre p).

Q1. Déterminer l'ensemble des entiers n de $\mathbb{Z}$ pour lesquels la matrice $A + \dfrac{n}{n^2+1} I$ est inversible.

Q2. Existe-t-il un entier naturel n tel que $\Big((n^2+1)\,A^2 + n\,A\Big)^n = B$ où B est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à n ?

Question 12 HEC 2010 D. ATTIAS et S. ALLAIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \to x^k\, e^{-x}$ pour k dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

Q2. Soit D l'application définie sur E par $\forall f \in E,\ D(f) = f' - f''$ où f' et f'' désignent les dérivées première et seconde de f.

Montrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

Q3. M est-elle inversible ? diagonalisable ?

Cours *Coefficient de corrélation linéaire : définition et propriétés*

Question 13 HEC 2010 G. FOUBART $\boxed{\textbf{F 1 ou 0}}$

E est un espace vectoriel de dimension finie non nulle. f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.

JF Et si E est de dimension quelconque ?

Cours *Fonction convexe.*

Question 14 HEC 2010 F. HUA $\boxed{\textbf{F 1}}$

L appartient à $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $M = {}^tLL$.

Q1. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Q2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur L pour que les valeurs propres de M soient strictement positives.

Cours *Théorème de convolution.*

Question 15 HEC 2010 J. MESNILDREY $\boxed{\textbf{F 1}}$

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$.

Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$, $\operatorname{Ker}(\Phi\circ\Phi)$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Cours *Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.*

Question 16 **HEC 2010** J.D. FOATA $\boxed{\textbf{F 1}}$

X_1, X_2,..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ prenant deux valeurs -1 et -1.

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i) = -1 = q = 1 - p$.

Q1. Trouver la loi de $Y_k = X_1\,X_2\ldots X_k$ pour tout k dans $[\![1, n]\!]$.

Q2. Ici $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer que Y_1, Y_2, ..., Y_n sont deux à deux non corrélées.

Question 17 **HEC 2010** M. PARIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

$E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément de E. $\forall M \in E,\ \Phi(M) = {}^tAM + MA$.

Q1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

Q2. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de E.

Q3. Φ est-il diagonalisable si c=b ? si a=b=d=1 et c=o ?

Cours *Définition d'un estimateur et du biais d'un estimateur.*

Question 18 **HEC 2010** T. VERGER $\boxed{\textbf{F 1}}$

On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité p. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir un pile. Puis on tire un numéro dans une urne contenant autant de boules numérotées de 1 à la valeur de X.

N est la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Trouver la loi de N, sous forme de somme.

Cours *Fonction de plusieurs variables continue (resp. $\mathcal{C}^1$).*

Question 19 **HEC 2010** E. JARDIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

Montrer que si C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C^2 = D$ alors C est une matrice diagonale.

Cours *Définition de la convergence d'une intégrale. Intégrale de Riemann.*

Question 20 **HEC 2010** J. DIAZ $\boxed{\textbf{F } 2^+}$

(Xn) est une suite de variable aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite de terme général $E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)$ converge vers 0.

Question 21 **HEC 2010** Vu par JFC

f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Q1. Trouver $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Q2. Montrer que 0, -1, 2 sont valeurs propres de f.

Q3. Montrer que tout polynôme annulateur de f est divisible par $P = X(X+1)(X-2)$.

JF Réciproque ?

Q4. n appartient à $\mathbb{N}^*$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par P. Calculer A^n.

Cours *Théorème de la limite centrée. Intervalle de confiance.*

Question 22 **ENSAE 2010** J.D. FOATA

E est un espace vectoriel de dimension 3 et f est un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $\operatorname{rg} f = 2$.

Question 23 **HEC Éco 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Déterminer les endomorphismes f de E diagonalisables qui vérifient $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

Question 24 **HEC Éco 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$, $f(e_2)$ et $f(-e_1 + e_2)$.

Montrer que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 25 **HEC Éco 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) et vérifiant $A^k = I_n$ pour un k dans $\mathbb{N}^*$.

Que peut-on dire de A dans les cas suivants :

k est un entier naturel impair ?

k est un entier naturel pair ?

Question 26 **HEC Éco 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Pour tout ω dans Ω on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 1 & Y(\omega) \end{pmatrix}$

Q1. Déterminer $P\big(\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ inversible}\}\big)$.

Q2. Déterminer $P\big(\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ diagonalisable}\}\big)$.

Question 27 **HEC Éco 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$ où α est un nombre réel,

1) dans le cas où $\alpha = 2.$,

2) dans le cas où $\alpha \neq 2$.

Question 28 HEC Éco 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer A^{-1}.

Question 29 HEC Éco 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*},\ f(x,y) = \dfrac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$.

Q1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Q2. Déterminer les points critiques de f.

Q3. Quelle est la nature de ces points critiques ?

Question 30 HEC BL 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 5 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (1).

Q1. Montrer que le rang de f est inférieur ou égal à 2.

Q2. Montrer qu'il existe des endomorphismes de E vérifiant (1), dont le rang est 1 (resp. 2).

Question 31 HEC BL 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et p dans $]0,1[$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes deux la loi binomiale de paramètres n et p.

Soit $Z = X + Y$ et soit n_0 un entier de $[\![1, 2n]\!]$.

Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{Z = n_0\}$. Reconnaître cette loi.

Question 32 HEC T 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Q1. Rappeler la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$. En déduire $E(X^2)$.

Q2 a) A l'aide de la question 1, calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^k}$.

b) Établir, pour tout N dans $\mathbb{N}^*$, les inégalités : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^k} \leqslant 2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{2^k} \leqslant 6$.

Question 33 HEC T 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Déterminer en fonction de a, toutes les matrices carrées M d'ordre 2 avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, qui vérifient les deux propriétés : $M^2 = M$ et $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2011

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 1 HEC 2011 S. 1150 F2

n appartient à $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

Q1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ et un seul tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}\cdot$

Q2. Décomposer P_n comme un produit de polynômes de degré 1 lorsque $n \geqslant 1$.

Cours *Énoncer le théorème de l'espérance totale.*

Question 2 HEC 2011 S 1152 F1$^-$

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la variable alétoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

On pose $Y_n = \text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Étudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Cours *Théorème de d'Alembert-Gauss*

Vu à l'ESCP en 2011.

Question 3 HEC 2011 S 1155 F1

Soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

On suppose que l'espérance $\theta = E(X_1)$ est non nulle et inconnue.

Trouver l'estimateur sans biais de l'espérance $\theta = E(X_1)$, qui soit de variance minimale dans l'ensemble des estimateurs de la forme $\tilde{\theta_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, X_i \quad ((a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Cours *Rappel de la définition d'un espace vectoriel euclidien*

Question 4 HEC 2011 S 1157 F2

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$.

Q1. Déterminer les noyaux de Φ, $\Phi \circ \Phi$ et Φ^k pour $k \in [\![3, +\infty[\![$?

Q2. Quelle l'image de Φ.

Cours *Définition d'un estimateur sans biais et convergent d'un paramètre réel inconnu.*

Question 5 HEC 2011 S 1163 F1

Un joueur effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité p et face avec la probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit la variable aléatoire N égale au rang d'apparition du premier Pile s'il existe et égale à 0 si Pile n'apparaît jamais

On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :

Si N prend la valeur 0, X prend la valeur 0.

Si n appartient à $\mathbb{N}^*$ et si N prend la valeur n, le joueur dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n ; il tire une boule de cette urne et X prend la valeur de la boule tirée.

Q1. Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $P(X = k)$ sous forme de somme.

Q2. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{p}{q} \lim\limits_{M \to +\infty} \displaystyle\int_0^q \sum_{n=k}^{M} t^{n-1} \, \mathrm{d}t$.

Q3 Étudier la limite de $\displaystyle\int_0^q \frac{t^M}{1-t} \, \mathrm{d}t$ lorsque M tend vers $+\infty$. Déterminer $P(X = 1)$.

Cours *Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ($n \geqslant 2$). Donner un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.*

Question 6 HEC 2011 S 1175 $\boxed{\textbf{F1}^+}$

On considère une suite $(U_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ X_n = \mathrm{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Prouver que la suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers θ.

Q2. Étudier la convergence en loi de $Y_n = n\,(\theta - X_n)$.

Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies.

Question 7 HEC 2011 S 101 $\boxed{\textbf{F2}}$

Dans cet exercice E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et p, n sont deux entiers strictement positifs.

Q1. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et x un vecteur de E.

Caractériser en le justifiant le fait que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ soit liée.

Q2. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E supposés non tous nuls.

On note $\mathcal{A} = \{J \subset [\![1, n]\!] \mid (x_i)_{i \in J} \text{ est libre}\}$.

Soit J_0 un élément de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal. Que peut-on dire de $(x_i)_{i \in J_0}$ vis à vis de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?

Q3. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et r le rang de cette famille. On en extrait une famille de n' vecteurs et on note r' le rang de cette famille extraite. Montrer que $n - r \geqslant n' - r'$

Cours *X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition de X et en donner les principales propriétés.*

Question 8 HEC 2011 S 108 $\boxed{\textbf{F1}^+}$

Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Q1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

Q2. On suppose de plus que pour tout x dans E, $< u(x), x >= 0$.

Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $< u(x), y >= - < u(y), x >$. Que peut-on-dire de u ?

Cours *X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition F de X et en donner des propriétés.*

Question 9 **HEC 2011** **S 109** $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Soit f une endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres. Démontrer que f est diagonalisable.

Cours *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Estimateur sans biais, convergent*

Question 10 **HEC 2011** **S 112** $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

Q1. Montrer que A admet une seule valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer le sous-espace propre associé à λ.

Q3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cours *Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires*

Question 11 **HEC 2011** **S 113** $\boxed{\textbf{F3}}$

On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

Q1 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(S_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire N_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_k et dont la loi est donnée par :

$N_n(\Omega) = \{n, n+1\}$ et $P(N_n = n) = P(N_n = n+1) = \dfrac{1}{2}\cdot$

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)}$.

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(T_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Cours *Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement le même rang ?*

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2011 (suite)

Voici des questions sans préparation de l'oral HEC 2011 obtenues auprès des élèves. Les énoncés ne sont pas garantis. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 1 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE **F1**

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$, $\operatorname{Ker}(\Phi\circ\Phi)$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Cours *Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.*

Déjà donnée en 2010.

Question 2 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE **F1⁻**

X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par :

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-(x-a)} & \text{si } x\in]a,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi que X.

Donner la loi de $n\left(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\operatorname{Min}} X_k - a\right)$.

Cours *Inégalité de Taylor-Lagrange.*

Question 3 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE **F2**

$n\in [\![2,+\infty[\![$. Soient x et y deux réels et F l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ F(M)=x\,M+y\,{}^tM$.

Q1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un projecteur.

Q2. Donner les valeurs propres de F.

Q3. F est-il diagonalisable ?

Question 4 **HEC 2011** T. EHRMANN **F2**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Q1. $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ est une famille libre de E et x est un vecteur de E.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1,e_2,\dots,e_p,x)$ soit liée.

Q2. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille d'éléments de E de rang r non nul. $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties non vides J de $[\![1, n]\!]$ telles que la famille $(x_i)_{i \in J}$ soit libre. J_0 est une partie de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal.

a) Donner un lien entre $(x_i)_{i \in J_0}$ et $\text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

b) On extrait une famille de n' vecteurs de cette famille et on note r' son rang. Montrer que $n - r \geqslant n' - r'$.

Question de cours : Définition et propriétés principales de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

Question 5 **HEC 2011** G. FOUBART $\boxed{\textbf{F2}}$

Q1. X suit la loi normale centrée réduite. Montrer que $Z = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une denité f_Z.

Q2. a est un élément de $[-1, 1]$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \begin{cases} (1 + a\,\sin(2\pi\,\ln x))\, f_Z(x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Plus une question non lue.

Je propose : T est une variable aléatoire à densité de densité f_a. Existence et valeur éventuelle de $E(T)$.

Question de cours : Comparaison des séries à termes positifs.

Question 6 **HEC 2011** C. DAUDET $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Soit n un entier naturel non nul.

Q1. Trouver un réel C_n pour que la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} C_n\, e^{-4n\,t}\, t^{n-1} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Q2. $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 4.

Trouver, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $Z_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité.

Question de cours : Définition d'une forme linéaire. Noyau et image d'une forme linéaire.

Question 7 **HEC 2011** V. MESKHI $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Image, noyau, valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Plus deux autres questions non lues.

Question de cours : Théorème de la limite centrée. Définition d'un intervalle de confiance.

Question 8 **HEC 2011** E. PHILIP $\boxed{\textbf{F1}}$

f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y)\, f(x - y) = \big(f(x)\big)^2$. On suppose que f n'est pas la fonction nulle..

On se propose de montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $f(0) \neq 0$.

Q2. Si a est un réel tel que $f(a) = 0$, montrer que $f\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0$.

Q3. Conclure.

Q4. Donner un exemple d'une telle fonction.

Question de cours : X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé.

On suppose que $V(X)$ et $V(Y)$ existent. Montrer que $\big(\operatorname{cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant V(X)\,V(Y)$.

Question 9 **HEC 2011** Vu par JF $\boxed{\mathbf{F1}^+}$

$(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0,\theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \operatorname{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.

Q2. Montrer que $\big(n\,(\theta - X_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours : Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

---

Question 10 **HEC 2011** Vu par JF $\boxed{\mathbf{F2}}$

$A = (a_{i,j})$ est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Justifier l'inversibilité de A et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Q2. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$

Question de cours : Loi exponentielle.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2012

Question 1 HEC 2012-1-S7 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0,1]$.

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{\frac{1}{n}}$ et $Y_n = (e\,X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln Y_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours. Définition et proppriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

Question 2 HEC 2012-2-S9 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On suppose $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Q1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A

Q2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Question de cours. Sommes de Riemann.

Question 3 HEC 2012-3-S12 $\boxed{\text{F 1}}$ C. GRASSET

f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien $(E, <.,.>)$.

On suppose l'existence d'une constante réelle α positive ou nulle telle que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\,\|x\|$.

Montrer que $f^2 = \alpha^2\ \mathrm{Id}_E$.

Question de cours Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Question 4 HEC 2012-4-S16 $\boxed{\text{F } 1^-}$ P. KONIECZNY

$n \in [\![2, +\infty[\![$. On considère le polynôme P_n de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $P_n = X^n + 1$.

Pour quelles valeurs de n, P_n est-il divisible par $X^2 + 1$?

Question de cours. Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dans le cas où elles possèdent une densité.

Question 5 HEC 2012-5-S20 $\boxed{\text{F 2}}$

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda\, f$.

Question de cours. Théorème de la limite centrée.

Question 6 HEC 2012-6-S23 $\boxed{\text{F 1}}$ I. KARDASZEWICZ

a, b sont deux réels strictement positifs. α est réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilissé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X = 0) = 0$;
- $P(X > 0) = \alpha$;
- $P_{\{X>0\}}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $P_{\{X<0\}}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. *Je mettrais plutôt* $P_{\{X<0\}}(-X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx} & \textit{si } x > 0 \\ 0 & \textit{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Déterminer la fonction de répartition de X.

Q2. La variable aléatoire X est-elle à à densité ?

Q3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

Question de cours. Développement limité d'ordre 1 *au point* a *de* $\mathbb{R}^n$ *pour une fonction numérique* f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^n$.

Question 7 HEC 2012-7-S27 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Q1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

Q2. La réciproque est-elle vraie ?

Question de cours. Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

Question 8 HEC 2012-8-S28 $\boxed{\text{F 2}}$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. On note $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

Q1 Exprimer P^{-1} en fonction de P.

Q2. Établir l'inégalité $\left| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \right| \leqslant n$.

Question de cours. Soit p *un paramètre réel inconnu vérifiant* $0 < p < 1$. *Pour* n *dans* $\mathbb{N}^*$, *soit* X_1, X_2, ..., X_n n *variable aléatoires définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *indépendantes et de même loi de Bernoulli d'espérance* p. *On pose pour tout* n *dans* $\mathbb{N}^*$: $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Rappeler comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir à partir de $\overline{X_n}$, *un intervalle de confiance de risque* α $(0 < \alpha < 1)$ *pour le paramètre* p.

Question 9 HEC 2012-9-S33 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit D une matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Question de cours. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Rappeler la signification de la relation : $v_n = \mathrm{o}(u_n)$.*

Montrer que si $v_n = \mathrm{o}(u_n)$ et si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n l'est et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

Question 10 HEC 2012-10-S34 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire défine sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Q1. a) Montrer que pour tout entier n strictement supérieur à $\lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n)\,\dfrac{n+1}{n+1-\lambda}\cdot$

b) En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n\to+\infty}{\sim} P(X = n)$.

Q2. Montrer que $P(X > n) = \mathrm{o}\big(P(X = n)\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Question de cours. *Donner deux conditions suffisantes de diagonalisibilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres .*

Question 11 HEC 2012-11-S36 $\boxed{\textbf{F 1}}$

n appartient à $\mathbb{N}^*$ et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Établir l'existence d'un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

Question de cours. *Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.*

Question 12 HEC 2012-12-S39 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de poisson de paramètre λ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \dfrac{1}{2}\cdot$ On pose $Z = XY$.

Q1. Déterminer la loi de Z.

Q2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Question de cours. *Sous-espaces vectoriels supplémentaires.*

Question 13 HEC 2012-13-S40 $\boxed{\textbf{F 2}}$

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0, 1[$ sur $g(]0, 1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Question de cours. *Comparaison des séries à termes positifs.*

Question 14 HEC 2012-14-S42 $\boxed{\textbf{F1}}$

α est un réel positif ou nul. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

Q1. Montrer que si $\alpha = 2$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Q2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Question de cours. Définition de la covariance et du coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1

Question 15 HEC 2012-15 $\boxed{\text{F1}}$ N. KARPIEL

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.

Soit θ un réel. On pose $Y_0 = X_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n$.

Q1. Donner la loi de Y_n.

Q2. Calculer $\text{cov}(Y_n, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

Déjà vu en 2007.

Question de cours Théorème de d'Alembert.

Question 16 HEC 2012-16 $\boxed{\text{F1}}$ T. PILEWICZ

A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

Montrer que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

Une deuxième question non lue.

Question de cours Définition et propriétés de la loi exponentielle.

Question 17 HEC 2012-17 $\boxed{\text{F1}}$ M. ARNOLD

f et g sont deux endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

Q1. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}\, f$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}\, g$.

Q2. Montrer que $E = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, g$.

Question de cours Définition et propriétés de la loi Poisson.

Question 18 HEC 2012-18 $\boxed{\text{F 2}}$ Obtenue par un élève.

E est un espace euclidien de dimension n. On note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < x, y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0.$$

Montrer qu'il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x dans E, $\|f(x)\| = k\,\|x\|$.

Déja vu en 2007 à HEC

Question 19 HEC 2012-19 $\boxed{\text{F 1}}$ Obtenue par un élève.

a, b, c sont trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Q1. Calculer $M = U\,{}^tU$.

Q2. M est-t-elle diagonalisable, inversible ?

Q3. Calculer M^n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Q4. Trouver les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres de M.

Question 20 **HEC 2012-20** $\boxed{\textbf{F1}}$ Obtenu par un élève.

$A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} > 1$.

Montrer que A est matrice définie positive, c'est à dire que A est symétrique réelle telle que pour tout élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX > 0$.

Déja vu en 2011 à l'ESCP

Question 21 **HEC 2012-21** $\boxed{\textbf{F}1^+}$ Obtenu par un élève.

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E.

Montre que $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$

Question 22 **HEC 2012-22** $\boxed{\textbf{F}1^+}$ Obtenu par un élève.

f est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$ et telle que $f(0) = f(1)$.

Montre qu'il existe un réel x appartenant à $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x)$.

Plus une question oubliée.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2013

Question 1 HEC 2013-1-S46

Soit X une variable aléatoire à valeurs strictement positives, admettant une densité f et vérifiant la propriété suivante : la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ possède une espérance mathématique.

Q1. Établir l'inégalité : $E\left(X + \dfrac{1}{X}\right) \geqslant 2$.

Q2 Montrer que l'inégalité précédente n'est jamais une égalité, mais que $E\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ peut prendre des valeurs arbitrairement proches de 2.

Question 2 HEC 2013-2-S41

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi que la loi normale centrée réduite.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. Calculer $P(X = Y)$ et $P(XY > 0)$.

Q2. Trouver la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Question 3 HEC 2013-3-S52

Soit E un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $< .,. >$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient : $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), y >= - < x, f(y) >$.

Q1. Que peut-on dire de la matrice d'un élément f de $\mathcal{A}(E)$ dans une base orthonormée de E ?

Q2. On note $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tout les éléments de $\mathcal{A}(E)$, c'est-à-dire qui vérifient : $\forall f \in \mathcal{A}(E),\ f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que lorsque la dimension de E est égale à 2, $\mathcal{C}(E)$ est un plan vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathcal{A}(E)$.

b) Trouver $\mathcal{C}(E)$ lorsque la dimension de E est strictement supérieure à 2.

Question 4 HEC 2013-4-S54

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]-1, 1[$.

Q1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $]-1, 1[$ telles que la variable $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Q2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $]-1, 1[$ telle que la variable $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

Question 5 HEC 2013-5-S55

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Dans tout le texte a et b sont deux réels tels que $ab \neq 0$.

On note $M(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par : $M(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. a) Calculer $\big(M(a,b)\big)^2$.

b) Montrer que $\big(M(a,b)\big)^2$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Q2. c et d sont deux réels. Montrer que $M(c,d)$ est semblable à $M(a,b)$ si et seulement si $ab = cd$.

Question 6 **HEC 2013-6-S60**

Soit X une variable aléatoire possédant une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$ et nulle hors de l'intervalle $]-1,1[$.

Q1. Montrer que X possède une variance, qui est strictement comprise entre 0 et 1.

Q2. Montrer que toutes valeurs de l'intervalle $]0,1[$ est effectivement possible pour la variance de X.

Question 7 **HEC 2013-7-S62**

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On pose :

$F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}$.

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Question 8 **HEC 2013-8-S63**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que f n'est pas diagonalisable et qu'il vérifie : $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

Q1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont supplémentaires.

Q2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 9 **HEC 2013-9-S74**

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi normale d'espérance m et de variance égale à 1. Soit b un réel strictement positif fixé.

Q1. Montrer que l'application $a \to P(a < X < a+b)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admet un maximum atteint en un point a_0 que l'on déterminera.

Q2. Exprimer la valeur de ce maximum à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Q3. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Question 10 **HEC 2013-10-S79**

$p \in [\![2, +\infty[\![$. Soient X_1, X_2, ..., , X_p des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre λ_i ($\lambda_i > 0$).

On pose $S_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_{p-1})$ sachant $\{S_p = n\}$.

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'espérance conditionnelle $E(X1|X1 + X2 = n)$ en fonction de n, λ_1 et λ_2.

Question 11 HEC 2013-11-S82

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = X - Y$.

Q1. Montrer que Y est une variable aléatoire et déterminer sa loi. Que peut-on dire de $Y + 1$?

Q2. Montrer que Z est une variable aléatoire et déterminer sa loi.

Q3. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Question 12 HEC 2013-12-S84

Q1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\cdot$ Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Q2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\cdot$ Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Question 13 HEC 2013-13

Q1. P est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$ de degé 2 tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + P'(x) + P''(x) \geqslant 0$.

Q2. $n \in \mathbb{N}$. P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

a) Montrer que n est pair.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Question 14 HEC 2013-14

a et b sont deux réels. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n) + a\ \ln(n+1) + b\ \ln(n+2)$.

Déterminer les valeurs de a et b telles que la série de terme général u_n converge.

Question 15 HEC 2013-15

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un élément k de $\mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$.

Que dire de A^2 ?

Question 16 HEC 2013-16

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q1. Pour quelle(s) valeur(s) de x B est-elle diagonalisable ?

Q2. Montrer que si B n'est pas diagonalisable, B est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 17 HEC 2013-17

Dans un sac il y a n boulles numérotées de 1 à n. On extrait au hasard du sac une poignée de boules qui peut avoir 0, 1, ..., n éléments.

Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules de la poignée (S prend la valeur 0 si la poignée est vide...).

Calculer $E(S)$.

Question 18 **HEC 2013-18**

f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)\,f(x-y) = \big(f(x)\big)^2$.

On suppose que f n'est pas la fonction nulle et on se propose de montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $f(0)$ n'est pas égal à 0.

Q2. Soit a dans $\mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. Montrer que $f\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0$.

Q3. Conclure. Donner un exemple d'une telle fonction.

Question 19 **HEC 2013-19**

E est l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont la diagonale est $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$, "l'anti-diagonale" est $(b_1, b_2, \dots, b_n, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1)$ et les autres coefficients sont nuls.

Q1. Trouver la dimension du sous-espace vectoriel E.

Q2. A est un élément de E. Montrer que A est diagonalisable et trouver une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Question 20 **HEC 2013-20**

On considére les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X] : E_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$,

$E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$ et $E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X) = P(-X)\}$.

Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

Question 21 **HEC 2013-21**

$(X_1, X_2, \dots, X_p)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre λ_i.

$S_p = X_1 + X_2 + \dots + X_p$ et n est un élément de $\mathbb{N}$.

Q1. Trouver la loi conditionnelle du vecteur $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ sachant que $(S_p = n)$.

Q2. Trouver l'espérance conditionnelle de X_1 sachant que $(X_1 + X_2 = n)$.

La suite est oublié et Q2 n'est pas très sûr.

Question 22 **HEC 2013-22**

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$.

Q1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et trouver sa limite.

Q2. Même chose pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Question 23 **HEC 2013-23**

X est une variable aléatoire à densité ayant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R} -]-1, 1[$.

Q1. Montrer que X possède une variance comprise entre 0 et 1..

Q2. Montrer que tout réel compris entre 0 et 1 est la variance d'une variable aléatoire de ce type.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2014

Question 1 HEC 2014-1-S49

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

2. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 et soit D une droite vectorielle de E stable par f.

a) Montrer que D admet un supplémentaire stable par f.

b) Montrer que si P est un supplémentaire de D stable par f, la restriction de f à P définit un endomorphisme diagonalisable de P.

Question 2 HEC 2014-2-S50

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. On note $< .,. >$ le produit scalaire de E et $\|.\|$ la norme associée.

1. Soit x un élément de E. Montrer que $\|x\| = \sqrt{n}$ si et seulement si il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E vérifiant $x = \sum_{k=1}^{n} e_k$.

2. Soient x et y deux vecteurs de E. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E vérifiant $x = \sum_{k=1}^{n} e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} k\, e_k$.

Question 3 HEC 2014-3-S56

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f - \mathrm{Id}_E$ est une projecteur.

2. Quelles sont les valeurs propres de f ?

3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

4. Combien existe-t-il de plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

Question 4 HEC 2014-4-S61

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \ln n + a \ln n + b \ln n$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.

2. Calculer alors la somme de cette série.

Question 5 HEC 2014-5-S75

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})) = \dfrac{1}{(i+j+1)!}$.

Déterminer le réel a. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Question 6 HEC 2014-6-S91

Soit α un réel donné. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

1. Étudier suivant les valeurs de α, la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. En cas de convergence, on précisera la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2. Étudier la nature de la série terme général u_n.

3. Soit x un réel vérifiant $|x| < 1$. Étudier suivant les valeurs du réel α, la convergence de la série de terme général $u_n\, x^n$.

Question 7 HEC 2014-7-S93

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. a) Calculer $u_{n+2} + u_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Question 8 HEC 2014-8-S94

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante de la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$, suivant la loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ ($n \geqslant 1$ et $0 < p < 1$).

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\forall\omega \in \Omega,\ M_n(\omega) = \mathrm{Max}(U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots, U_n(\omega))$.

On pose encore, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $T_n = \begin{cases} U_1 & \text{si } N = 0 \text{ est réalisé} \\ M_k & \text{si } N = k \text{ est réalisé} \end{cases}$.

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

Question 9 HEC 2014-9-S101

Soient n_1 et n_2 deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Soit p un réel appartenant à $]0, 1[$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 définie sur un espaces probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$.

1. Soit n dans $(X1 + X2)(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $\{X_1 + X_2 = n\}$.

2. Calculer l'espérance conditionnelle $E(X_1|X_1 + X_2 = n)$.

Question 10 HEC 2014-10-S104

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^2 = 0_{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$.

Montrer que M est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 11 HEC 2014-11-S110

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.

Soit θ un réel non nul. On pose $Y_0 = X_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n$.

1. Déterminer pour tout n dans $\mathbb{N}$, la loi de Y_n.

2. n dans $\mathbb{N}$. Calculer pour tout h dans $\mathbb{N}$, $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n+h})$.

Déja vu en 2012

Question 12 **HEC 2014-12-S112**

On tire avec remise une boule d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.

Calculer l'espérance de X et trouver un équivalent quand n tens vers $+\infty$.

Question 13 **HEC 2014-13-S113**

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de variables aléatoires discrètes centrées définies sur un même espace probabilisé et admettant une variance.

1. Justifier l'existence de $V_0 = \operatorname{Inf}\{V(X)\,;\, X \in \mathcal{E}\}$.

2. On suppose que pour tout $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$, on a $\dfrac{1}{2}\Big(X_1 + X_2\Big) \in \mathcal{E}$.

Soit $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$ avec $V(X_1) = V(X_2) = V_0$. Montrer que que $X_1 = X_2$ presque sûrement.

Question 14 **HEC 2014-14-116**

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

1. Montrer que pour tout élément non nul $X : {}^tXAX > 0$.

2. Justifier que A est diagonalisable et inversible.

Question 15 **HEC 2014-15**

E est un espace euclidien de dimension n. On note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée.

Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante : $\forall (x, y) \in E^2,\ < x, y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0$.

1. Montrer qu'il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x dans E, $\|f(x)\| = k\,\|x\|$.

2. Déterminer des endomorphismes vérifiant cette propriété.

3. A l'aide d'une représentation géométrique donner des exemples en dimension 2.
