Voici les questions sans préparation 2007 qu'à bien voulu nous fournir l'ESCP. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

QUESTIONS COURTES 2007

Question 11 ESCP 2007 D. ADJERAD

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Question 12 ESCP 2007 C. BONHOMME

A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 13 ESCP 2007 C. BRONES

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suites de variable aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1. N est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi géométrique de paramètre p. On suppose que les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\geqslant n}$ et N sont mutuellement indépendantes.

Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \underset{1\leqslant k\leqslant N(\omega)}{\operatorname{Min}} X_k(\omega)$.

Question 14 ESCP 2007 M. BOUCHER Oubliée mais du type suivant (ESCP 2006)

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Question 15 ESCP 2007 P. DESMICHEL

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Donner plusieurs conditions nécessaires er suffisantes pour que f soit diagonalisable.

Question 16 ESCP 2007 G. GOBINET

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[-2, 2]$. Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. X et Y sont indépendantes. t est un réel.

Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Question 17 ESCP 2007 J. NAKACHE

Deux joueurs A et B jouent à Pile ou Face. On lance deux fois la pièce. Si l'on obtient PF (resp. FP), A (resp. B) gagne. Dans le cas contraire on recommence.

La probabilité d'obtenir Pile est p ($p \in]0, 1[$). On suppose que la probabilité d'obtenir Pile est plus grande que celle d'obtenir Face.

Q1. Trouver la probabilité pour que le jeu s'arrête.

Q2. Le jeu est-il équitable ?

Question 18 ESCP 2007 V. OWEN

φ est une forme linéaire sur un espace vectoriel E de dimension n non nulle. u est un vecteur non nul de E.

On considère l'endomorphisme f de E défini par : $\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)\, u$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Question 19 **ESCP 2007** M. RAPAPORT

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 2$.

Question 20 **ESCP 2007** F. TAN et N. RIFFI

λ est un réel non nul. $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & -1 \end{pmatrix}$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p!}\, (A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p} \right)$.

Question 21 **ESCP 2007** T. TOFFIER

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout élément x de E, il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0_E$.

Montrer qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\boxed{\text{JF}}$ Et si E est de dimension quelconque ?

Question 22 **ESCP 2007** J. VANNIMENUS

Montrer que la série de terme général $\dfrac{n^p}{2^n}$ converge.

Question 11 **ESCP 2007** D. ADJERAD

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Notons que si f est diagonalisable alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires !

Supposons f diagonalisable.

* Si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ ou $\operatorname{Ker} f = E$: $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

* Supposons $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker} f \subsetneq E$. Alors 0 est valeur propre de f et f admet au moins une valeur propre non nulle.

  Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de f. Posons $\lambda_1 = 0$

  $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} SEP(f,\lambda_k) = \operatorname{Ker} f \oplus \bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f,\lambda_k)$. (1)

  Soit $k \in [\![2,p]\!]$ et soit u un élément de $SEP(f,\lambda_k)$. $f(u) = \lambda_k u$ et $\lambda_k \neq 0$

  Alors $u = \frac{1}{\lambda_k} f(u) = f\left(\frac{1}{\lambda_k} u\right) \in \operatorname{Im} f$.

  Donc $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $SEP(f,\lambda_k) \subset \operatorname{Im} f$. Ainsi $\displaystyle\bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f,\lambda_k) \subset \operatorname{Im} f$ (2)

(1) donne $\dim \displaystyle\bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f,\lambda_k) = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$ (3)

(2) et (3) donnent alors $\displaystyle\bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f,\lambda_k) = \operatorname{Im} f$ (car $\dim E < +\infty$).

(1) donne $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. cqfd.

R

Question 12 **ESCP 2007** C. BONHOMME

A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.

Posons $E=\mathbb{R}^2$.

Il convient de montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

* **Analyse**.. Supposons que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ soit une telle base.

$u(e'_1)=u(e'_2)=0_E$ et $u(e'_3)=e'_1$.

Alors $e'_1=u(e'_3)$, $e'_1\in \mathrm{Ker}\, f\cap \mathrm{Im}\, f$ et $e'_2\in \mathrm{Ker}\, f$.

Notons qu'alors $\dim \mathrm{Ker}\, f\geq 2$ et $\dim \mathrm{Im}\, f\geq 1$. Donc $\dim \mathrm{Ker}\, f=2$ et $\dim \mathrm{Im}\, f=1$ ...

* **Synthèse** .. $f^2=0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\mathrm{Im}\, f\subset \mathrm{Ker}\, f$.

De plus $\mathrm{Im}\, f\neq \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}\, f\neq E$ car $f\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ ($A\neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$).

Alors $1\leq \dim \mathrm{Im}\, f\leq \dim \mathrm{Ker}\, f\leq 2$. Si $\dim \mathrm{Im}\, f=\dim \mathrm{Ker}\, f$: $3=\dim E=2\dim \mathrm{Ker}\, f$!!

Th du rang.

Ainsi $1\leq \dim \mathrm{Im}\, f<\dim \mathrm{Ker}\, f\leq 2$.

Alors $\dim \mathrm{Im}\, f=1$, $\dim \mathrm{Ker}\, f=2$ et $\mathrm{Im}\, f\subset \mathrm{Ker}\, f$.

Soit e'_1 un élément non nul de $\mathrm{Im}\, f$. $\exists e'_3\in E$, $f(e'_3)=e'_1$.

(e'_1) est une famille libre de $\mathrm{Ker}\, f$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f=2$. Le théorème de la base incomplète montre qu'il existe e'_2 dans $\mathrm{Ker}\, f$ tel que (e'_1,e'_2) soit une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

Posons $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$. $f(e'_1)=f(e'_2)=0_E$ et $f(e'_3)=e'_1$. Ne reste plus qu'à montrer que (e'_1,e'_2,e'_3) est une base de E ou une famille libre de E car $\dim E=3$.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1+\beta e'_2+\gamma e'_3=0_E$.

$0_E=f(0_E)=f(\alpha e'_1+\beta e'_2+\gamma e'_3)=\alpha f(e'_1)+\beta f(e'_2)+\gamma f(e'_3)=\gamma e'_1$ et $e'_1\neq 0_E$.

Alors $\gamma=0$. Donc $\alpha e'_1+\beta e'_2=0_E$. La liberté de (e'_1,e'_2) donne $\alpha=\beta=0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. De plus $M_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

A est semblable à $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

R

Question 13 **ESCP 2007** C. BRONES

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suites de variable aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1. N est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi géométrique de paramètre p. On suppose que les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\geqslant n}$ et N sont mutuellement indépendantes.

Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \underset{1\leqslant k\leqslant N(\omega)}{\text{Min}} X_k(\omega)$.

Soit F_Y la fonction de répartition de Y. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_Y(x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $(\{N=n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{Y\leqslant x\} \cap \{N=n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}} X_k \leqslant x\} \cap \{N=n\})$

$F_Y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}} X_k \leqslant x)\, P(N=n)$ par indépendance. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}} X_k \leqslant x) = 1 - P(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}} X_k > x) = 1 - P(\{X_1 > x\} \cap \dots \cap \{X_n > x\})$

$P(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}} X_k \leqslant x) \underset{\text{indépendance}}{=} 1 - P(X_1 > x) \cdots P(X_n > x) = 1 - (1 - P(X_1 \leqslant x)) \cdots (1 - P(X_n \leqslant x)) \underset{X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}{=} 1 - (1-(1-e^{-x}))^n$

$P(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}} X_k \leqslant x) = 1 - e^{-nx}$.

$F_Y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-nx}) P(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[P(N=n) - e^{-x} p (qe^{-x})^{n-1}\right]$ où $q = 1-p$.

$F_Y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) - pe^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} (qe^{-x})^{n-1}$ car les deux séries convergent.

$F_Y(x) = 1 - pe^{-x} \dfrac{1}{1-qe^{-x}} = \dfrac{1 - qe^{-x} - pe^{-x}}{1-qe^{-x}} = \dfrac{1-e^{-x}}{1-qe^{-x}}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{1-qe^{-x}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

__Exercice.__ Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité. Montrer que Y possède une espérance et la calculer.

R

Question 14 **ESCP 2007** M. BOUCHER Oubliée mais du type suivant (ESCP 2006)

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda \in Sp\, A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = 5 \end{array} \right.$

$Sp\, A = \{1, 5\}$

Alors A est diagonalisable et semblable à $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$\lambda \in Sp\, B \Leftrightarrow B - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 5 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow (-\lambda)(6-\lambda) + 5 = 0$

$\lambda \in Sp\, B \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = 5 \end{array} \right.$.

Alors B est diagonalisable et semblable à $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

A et B étant semblables à C : $\underline{\underline{A \text{ et } B \text{ sont semblables}}}$. (*)

(*) $\exists (P, Q) \in (GL_2(\mathbb{K}))^2$, $P^{-1}AP = C$ et $Q^{-1}BQ = C$.

Alors $B = QCQ^{-1} = QP^{-1}APQ^{-1} = (PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})$.

D'où la semblabilité de A et B.

R

Question 15 **ESCP 2007** P. DESMICHEL

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Donner plusieurs conditions nécessaires er suffisantes pour que f soit diagonalisable.

Soit (e_1, e_2) une base de $\operatorname{Ker} f$. Rajoute un élément e_3 de E tel que :

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $\exists\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

1er cas.. $c = 0$. Alors $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp} M_{\mathcal{B}}(f) = \{0\}$ et $\dim SEP(f,0) = \dim \operatorname{Ker} f = 2$

f n'est pas diagonalisable.

2e cas.. $c \neq 0$ Alors $\operatorname{Sp} f = \{0, c\}$ avec $c \neq 0$.

$\dim SEP(f,0) = 2$ et $\dim SEP(f,c) \geqslant 1$, $\dim SEP(f,0) + \dim SEP(f,c) \leqslant 3$.

Alors $\dim SEP(f,0) + \dim SEP(f,c) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. f est diagonalisable.

Notons que $c = \operatorname{Tr}(M_{\mathcal{B}}(f)) = \operatorname{Tr}(f)$.

→ Donc f diagonalisable $\Longleftrightarrow \operatorname{Tr}(f) \neq 0$.

$M_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$

Si $c = 0$ $M_{\mathcal{B}}(f^2) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$; si $c \neq 0$ $M_{\mathcal{B}}(f^2) \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

→ Donc f diagonalisable $\Longleftrightarrow f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Rappelons que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$

→ Donc f diagonalisable $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Ker} f$.

$\dim \operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle donc $\operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

→ Donc f diagonalisable $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$

→ Donc f diagonalisable $\Longleftrightarrow \mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

R

Question 16 **ESCP 2007** G. GOBINET

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[-2,2]$. Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. X et Y sont indépendantes. t est un réel.

Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $(x,y) \in [-2,2]^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Posons $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ t & y \end{pmatrix}$.

Si A admet deux valeurs propres distinctes, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si A n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{R}$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$!

Supposons que A admet une valeur propre dans $\mathbb{R}$ et une seule λ.

Alors A diagonalisable $\Leftrightarrow \dim SEP(A,\lambda) = 2 \Leftrightarrow 2 - \operatorname{rg}(A - \lambda I_2) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A - \lambda I_2) = 0$

A diagonalisable $\Leftrightarrow A = \lambda I_2$. Or $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ t & y \end{pmatrix}$.

Donc A ne peut pas être diagonalisable.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-\lambda & 1 \\ t & y-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda^2 - (x+y)\lambda + xy - t = 0$. (1)

(1) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ ssi $(x+y)^2 - 4(xy - t) > 0$.

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (x-y)^2 + 4t > 0$

1er cas... $t > 0$. A est diagonalisable.

2e cas... $t = 0$ A est diagonalisable ssi $x \neq y$

3e cas $t < 0$ A est diagonalisable ssi $x - y \notin [-2\sqrt{|t|}, 2\sqrt{|t|}]$.

Notons S l'événement la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

- Si $t > 0$: $\underline{P(S) = 1}$

- Supposons $t = 0$. $P(S) = P(X - Y \neq 0) = 1 - P(X - Y = 0) = 1 - P(X = Y)$.

$P(X=Y) = P(\{Y=0\} \cap \{X=0\}) + P(\{Y=1\} \cap \{X=1\})$. Par indépendance

$P(X=Y) = P(Y=0)\underbrace{P(X=0)}_{0} + P(Y=1)\underbrace{P(X=1)}_{0} = 0$.

$\underline{P(S) = 1}$

R

• **Supposons $t < 0$.** $P(S) = P(X-Y > 2\sqrt{|t|}) + P(X-Y < -2\sqrt{|t|})$

$$P(S) = P(\{Y=0\}\cap\{X > 2\sqrt{|t|}\}) + P(\{Y=1\}\cap\{X > 2\sqrt{|t|}+1\}) + P(\{Y=0\}\cap X < -2\sqrt{|t|}) +$$
$$P(\{Y=1\}\cap\{X < 1-2\sqrt{|t|}\}) \underset{\text{Noter indépendance}}{\overset{q=1-p}{=}} q\,P(X>2\sqrt{|t|}) + p\,P(X>2\sqrt{|t|}+1) + q\,P(X<-2\sqrt{|t|}) + p\,P(X<1-2\sqrt{|t|})$$

Notons F la fonction de répartition de X.

$$P(S) = q(1-F(2\sqrt{|t|})) + p(1-F(2\sqrt{|t|}+1)) + q\,F(-2\sqrt{|t|}) + p\,F(1-2\sqrt{|t|}).$$

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{R}$, $F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty,-2[\\ \dfrac{z+2}{4} & \text{si } z \in [-2,2] \\ 1 & \text{si } z \in]2,+\infty[. \end{cases}$

a) $\sqrt{|t|} < \frac{1}{2}$. $P(S) = q\left(1 - \dfrac{2\sqrt{|t|}+2}{4}\right) + p\left(1 - \dfrac{2\sqrt{|t|}+1+2}{4}\right) + q\,\dfrac{-2\sqrt{|t|}+2}{4} + p\,\dfrac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = 1 - \sqrt{|t|}$

b) $\sqrt{|t|} \in [\frac{1}{2}, 1[$. $P(S) = q\left(1 - \dfrac{2\sqrt{|t|}+2}{4}\right) + p(1-1) + q\,\dfrac{-2\sqrt{|t|}+2}{4} + p\,\dfrac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = (1-\sqrt{|t|})q + p\,\dfrac{3-2\sqrt{|t|}}{4}$

c) $\sqrt{|t|} \in [1, \frac{3}{2}[$. $P(S) = q(1-1) + p(1-1) + q\times 0 + p\,\dfrac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = \dfrac{3-2\sqrt{|t|}}{4}\,p$.

d) $\sqrt{|t|} \in [\frac{3}{2}, +\infty[$ $P(S) = 0$.

Remarque : $t<0$ donc $\sqrt{|t|} < \frac{1}{2} \iff t > -\frac{1}{4}$; $\sqrt{|t|} \in [\frac{1}{2}, 1[\iff -\frac{1}{4} \geq t > -1$;

$\sqrt{|t|} \in [1, \frac{3}{2}[\iff -1 \geq t > -\frac{9}{4}$; $\sqrt{|t|} \in [\frac{3}{2}, +\infty[\iff t \leq -\frac{9}{4}$.

$$P(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, -\frac{9}{4}] \\ \dfrac{3-2\sqrt{|t|}}{4} & \text{si } t \in]-\frac{9}{4}, -1] \\ (1-\sqrt{|t|})q + p\,\dfrac{3-2\sqrt{|t|}}{4} & \text{si } t \in]-1, -\frac{1}{4}] \end{cases} \qquad P(S) = \begin{cases} 1-\sqrt{|t|} & \text{si } t \in]-\frac{1}{4}, 0[\\ 1 & \text{si } t \in [0, +\infty[\end{cases}$$

R

Question 17 **ESCP 2007** J. NAKACHE

Deux joueurs A et B jouent à Pile ou Face. On lance deux fois la pièce. Si l'on obtient PF (resp. FP), A (resp. B) gagne. Dans le cas contraire on recommence.

La probabilité d'obtenir Pile est p ($p \in]0,1[$). On suppose que la probabilité d'obtenir Pile est plus grande que celle d'obtenir Face.

Q1. Trouver la probabilité pour que le jeu s'arrête.

Q2. Le jeu est-il équitable ?

Q1 La probabilité pour obtenir PF ou FP est $2pq$.

Soit S l'événement le jeu s'arrête. Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, S_k l'événement le jeu s'arrête au bout de k lancers.

$$P(S) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k\Big) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(S_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2pq(1-2pq)^{k-1} = 2pq\,\frac{1}{1-(1-2pq)} = 1.$$

incompatibilité

Presque sûrement le jeu s'arrête.

Q2 Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ notons S_A^k l'événement le joueur A gagne au bout de k lancers.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_k) = (1-2pq)^{k-1}\,pq$

Soit S_A la probabilité pour que le joueur A gagne.

$$P(S_A) = P\Big(\bigcup A_k\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-2pq)^{k-1}\,pq = pq\,\frac{1}{1-(1-2pq)} = \frac{1}{2}$$

Alors, comme $P(S) = 1$, la probabilité que B gagne est $1/2$.

Le jeu est équitable ce qui était clair dès le départ car la probabilité d'obtenir PF est la même que celle d'obtenir FP.

R

Question 18 **ESCP 2007** V. OWEN

φ est une forme linéaire sur un espace vectoriel E de dimension n non nulle. u est un vecteur non nul de E.

On considère l'endomorphisme f de E défini par : $\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)\,u$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

1er cas. $n=1$. (u) est une base de E. Soit $x \in E$. $\exists \alpha_x \in \mathbb{K}$, $x = \alpha_x u$

$f(x) = x + \varphi(x)u = x + \alpha_x \varphi(u) u = x + \varphi(u) x = (1+\varphi(u))x$

$f = (1+\varphi(u))\mathrm{Id}_E$. $\mathrm{Sp}\, f = \{1+\varphi(u)\}$ et $\mathrm{SEP}(f, 1+\varphi(u)) = E$.

2e cas. $n \geqslant 2$. $\forall x \in E$, $f(x) = x \Leftrightarrow \varphi(x)u = 0_E \overset{u \neq 0_E}{\Leftrightarrow} \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

a) $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$. $f = \mathrm{Id}_E$. $\mathrm{Sp}\, f = \{1\}$ et $\mathrm{SEP}(f,1) = E$

b) $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$. $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un hyperplan. $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = n-1 \geqslant 1$.

Alors $1 \in \mathrm{Sp}\, f$ et $\mathrm{SEP}(f,1) = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Notons que f a au plus deux valeurs propres et que s'il existe un deuxième sous-espace propre il est de dimension 1.

$f(u) = (1+\varphi(u))u$ et $u \neq 0_E$. $1+\varphi(u)$ est une valeur propre de f et u un vecteur propre associé.

i) $u \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$. $\varphi(u) \neq 0$. $1+\varphi(u) \neq 1$.

Alors $\mathrm{Sp}\, f = \{1, 1+\varphi(u)\}$, $\mathrm{SEP}(f,1) = \mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\mathrm{SEP}(f, 1+\varphi(u)) = \mathrm{Vect}(u)$.

ii) $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}-\{1\}$ et $x \in \mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id}_E)$.

$\lambda x = f(x) = x + \varphi(x)u$. Donc $\lambda\varphi(x) = \varphi(x) + \varphi(x)\underbrace{\varphi(u)}_{\varphi(u)=0} = \varphi(x)$. Or $\lambda \neq 1$ donc $\varphi(x) = 0$

Alors $\lambda x = x + \varphi(x)u = x$. Comme $\lambda \neq 1$: $x = 0_E$

Si $\lambda \in \mathbb{K}-\{1\}$, $\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$ et λ n'est pas valeur propre de f.

Ainsi $\mathrm{Sp}\, f = \{1\}$ et $\mathrm{SEP}(f,1) = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Résumons le b) ; mieux résumons le 2ème cas

Si $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$: $\mathrm{Sp}\, f = \{1\}$ et $\mathrm{SEP}(f,1) = \mathrm{Ker}\,\varphi$

Si $u \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$: $\mathrm{Sp}\, f = \{1, 1+\varphi(u)\}$, $\mathrm{SEP}(f,1) = \mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\mathrm{SEP}(f, 1+\varphi(u)) = \mathrm{Vect}(u)$

R

Question 19 **ESCP 2007** M. RAPAPORT

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\binom{n}{k}}=2$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\binom{n}{k}}$. Soit $n\in[\![4,+\infty[\![$.

$$u_n=\frac{1}{\binom{n}{0}}+\frac{1}{\binom{n}{1}}+\frac{1}{\binom{n}{n-1}}+\frac{1}{\binom{n}{n}}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}}=2+\frac{2}{n}+\underbrace{\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}}}_{v_n}$$

Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$ il suffira donc de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

Soit $k\in[\![2,n-2]\!]$.

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots2\times1}=n(n-1)\underbrace{\frac{n-2}{k}}_{\geqslant 1}\times\underbrace{\frac{n-3}{k-1}}_{\geqslant 1}\times\cdots\times\underbrace{\frac{n-k+1}{3}}_{\geqslant 1}\times\frac{1}{2\times1}\geqslant\frac{n(n-1)}{2}.$$

Alors $0\leqslant v_n=\sum\limits_{k=2}^{n-2}\dfrac{1}{\binom{n}{k}}\leqslant\sum\limits_{k=2}^{n-2}\dfrac{2}{n(n-1)}=2\times\dfrac{n-3}{n(n-1)}\leqslant\dfrac{2}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}=0$.

Alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$. cqfd.

R

Question 20 **ESCP 2007** F. TAN et N. RIFFI

λ est un réel non nul. $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & -1 \end{pmatrix}$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p!}\left(A_\lambda + A_{2\lambda}\right)^{2p}\right)$.

$$(A_\lambda + A_{2\lambda})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3\lambda \\ \frac{3}{2\lambda} & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3\lambda \\ \frac{3}{2\lambda} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3\lambda \\ \frac{3}{2\lambda} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 4+\frac{9}{2} \end{pmatrix} = \frac{17}{2} I_2 .$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p} = \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}\left(\frac{17}{2}\right)^p\right) I_2 .$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p} = e^{17/2} I_2 .$$

Question 21 **ESCP 2007** T. TOFFIER

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout élément x de E, il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0_E$.

Montrer qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\boxed{\text{JF}}$ Et si E est de dimension quelconque ?

Si $n = 0$: $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$!

Supposons $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\exists p_i \in \mathbb{N}^*$, $f^{p_i}(e_i) = 0_E$. Posons $q = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$. $\underline{q \in \mathbb{N}^*}$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^q(e_i) \underset{q - p_i \geqslant 0}{=} f^{q-p_i}(f^{p_i}(e_i)) = f^{q-p_i}(0_E) = 0_E$.

f^q et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base de E donc

$\underline{f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}.}$

Pour $E = \mathbb{R}[X]$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E$, $f(P) = P'$.

Soit $P \in E$. Posons $\hat{p} = \deg P$ si $P \neq 0$ et $\hat{p} = 0$ si $P = 0$. Posons $p = \hat{p} + 1$.

Dans les deux cas $p \in \mathbb{N}^*$ et $f^p(P) = P^{(p)} = 0_E$. $\underline{\forall P \in E, \exists p \in \mathbb{N}^*, f^p(P) = 0_E.}$

Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $f^q(X^q) = 0_E$ or $f^q(X^q) = (X^q)^{(q)} = q!$

<u>le résultat ne vaut pas en dimension quelconque.</u>

R

Question 22 **ESCP 2007** J. VANNIMENUS

Montrer que la série de terme général $\frac{n^p}{2^n}$ converge.

Par croissance comparée : $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\,\frac{n^p}{2^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(n^{2+p}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=0$ car $\left|\frac{1}{2}\right|<1$

Donc $\frac{n^p}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{n^p}{2^n}\geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2}\geqslant 0$, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\frac{n^p}{2^n}$ converge.

__Exercice__ .. $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Etudier la convergence de la série de terme général $n^\alpha x^n$.