Question 6 **ESCP 2003** Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) réels pour que φ définie sur E^2 par

$$\varphi(X,Y) = {}^tX \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Y$$

soit un produit scalaire sur E.

• Supposons que φ est un produit scalaire. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\varphi(E_1, E_2) = \varphi(E_2, E_1)$; ${}^tE_1 A E_2 = {}^tE_2 A E_1$; $b = c$. A est symétrique.

$E_1 \neq 0$ donc $\varphi(E_1, E_1) > 0$; alors $a > 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$ et $X \neq 0_E$.

$0 < \varphi(X,X) = {}^tXAX = (x, y)\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+dy \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + dy^2$

$0 < a\left[\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + y^2\left(\frac{d}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\right]$; $0 < \left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + y^2\frac{ad-b^2}{a^2}$ car $a > 0$.

En prenant $x = -\frac{b}{a}$ et $y = 1$ on obtient $\frac{ad-b^2}{a^2} > 0$; $ad - b^2 > 0$

Si φ est un produit scalaire $c = b$, $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$.

• Supposons $c = b$, $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$

→ φ est clairement linéaire à droite et symétrique.

→ Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$. $\varphi(X,X) = {}^tXAX = ax^2 + 2bxy + dy^2$

$$\varphi(X,X) = \underbrace{a}_{>0}\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{ad-b^2}{a^2}}_{>0}\underbrace{y^2}_{\geqslant 0}\right] \geqslant 0.$$

Supposons $\varphi(X,X) = 0$. Alors $\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 = \frac{ad-b^2}{a^2}y^2 = 0$.

$x = -\frac{b}{a}y$ et $y = 0$ car $ad - b^2 \neq 0$; $x = y = 0$; $X = 0_E$.

Ceci achève de montrer que φ est un produit scalaire.

Ex.. $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall (X,Y) \in E^2$, $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$.

Montrer que φ est un produit scalaire ssi 1) A est symétrique

2) les valeurs propres de A sont strictement positives.

R

Question 7 **ESCP 2005** Soient A et B deux matrices symétriques réelles telles que $A^2 + B^2 = A + B = 2I$. Que peut-on dire de A et B ?

$B = 2I_n - A$. ⚠ Nous supposerons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$2I = A^2 + (2I_n - A)^2 = 2A^2 - 4A + 4I_n$.

$2A^2 - 4A + 2I_n = 0$; $A^2 - 2A + I_n = 0$; $(A - I_n)^2 = 0$

$\mathrm{Sp}\, A \subset \{1\}$. A est diagonalisable donc $\mathrm{Sp}\, A = \{1\}$ et

$\dim \mathrm{SEP}(A, 1) = n$. Alors $n - \mathrm{rg}(A - 1 \times I_n) = n$.

donc $\mathrm{rg}(A - I_n) = 0$. Alors $A - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $A = I_n$.

De plus $B = 2I_n - A = 2I_n - I_n = I_n$.

Finalement $\underline{\underline{A = B = I_n}}$.

<u>Remarque</u>.. On peut remplacer A et B symétriques par A et B diagonalisables ... ou par A ou B est diagonalisable.

R

Question 9 **ESCP 2005** Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x\rangle = 0$ ($\langle .,. \rangle$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$). Montrer que $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

$0 = \langle A(x+y), x+y\rangle = \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{=0} + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \underbrace{\langle Ay, y\rangle}_{=0}$

Alors $\langle Ax, y\rangle = -\langle x, Ay\rangle$ (A est antisymétrique).

$y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \langle Ax, y\rangle = 0$

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ -\langle x, Ay\rangle = 0$

$\Updownarrow$

$Ay \in (\mathbb{R}^n)^{\perp}$

$\Updownarrow$

$Ay = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\Updownarrow$

$y \in \operatorname{Ker} A$ $\qquad\qquad \operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$

Question 12 ESCP 2005 $\boxed{\text{F 2}}$ *élève*

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. x_1, x_2, ..., x_n sont n réels strictement positifs dont la somme vaut 1.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

"V1" $$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\ ;\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \geqslant n^2$$

"V2" $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f\left(\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\cdots+\frac{1}{n}x_n\right) \leqslant \frac{1}{n}f(x_1)+\frac{1}{n}f(x_2)+\cdots+\frac{1}{n}f(x_n).$$

$$\frac{1}{\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\cdots+\frac{1}{n}x_n} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$n \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\ ;\quad \frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n} \geqslant n^2.$$

V3 $$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\,\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{x_k})^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 = 1 \times \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \geqslant n^2.$$

(*) Inégalité classique...

On a $$\underset{\text{moyenne harmonique}}{\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}} \leqslant \underset{\text{moyenne géométrique}}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} \leqslant \underset{\text{moyenne arithmétique.}}{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}$$

Question 10 **ESCP 2006** Montrer que $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Existe-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on ait $\langle A, P\rangle = P(0)$? *(On pourra considérer les polynômes $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$)*

- $\langle \cdot,\cdot \rangle$ produit scalaire !

- Supposons que A existe et posons $M = \max_{t\in[0,1]} |A(t)|$, $P_n = \sqrt{n}\,(1-X)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sqrt{n} = P_n(0) = \langle A, P_n\rangle = \int_0^1 A(t)P_n(t)\,dt \leq \left|\int_0^1 A(t)P_n(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |A(t)|\,|P_n(t)|\,dt$

$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sqrt{n} \leq M\int_0^1 P_n(t)\,dt = M\sqrt{n}\int_0^1 (1-t)^n\,dt$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 1 \leq M\left[-\dfrac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{M}{n+1}.$

En faisant tendre n vers $+\infty$: $1 \leq 0$!

R

Question 6 ESCP 2008 $\boxed{\text{F1}}$

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien. Trouver toutes les fonctions f définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) - f(u-v) = 4\langle u, v\rangle.$$

Ceci n'est pas une correction.

* Remarquons que $u \mapsto \|u\|^2$ est solution car

$\forall (u,v) \in E^2,\quad \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v\rangle.$

Il est alors clair que $u \mapsto \|u\|^2 + \alpha$ est solution pour tout réel α.

* Soit f une solution. Posons $\alpha = f(0)$.

$$f\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}u\right) - f\left(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}u\right) = 4\left\langle \tfrac{1}{2}u, \tfrac{1}{2}u\right\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2$$

$\forall u \in E,\quad f(u) - f(0_E) = \|u\|^2$

$\forall u \in E,\quad f(u) = \|u\|^2 + f(0_E) = \|u\|^2 + \alpha$

L'ensemble des solutions est : $\underline{\{ f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall u \in E,\ f(u) = \|u\|^2 + \alpha \}}$.

Question 2 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F1}}$

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : $A^tAA^tAA = I$.

Ceci n'est pas une correction.

---

* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A\,{}^tA\,A\,{}^tA\,A = I$.

Alors A est inversible et $A^{-1} = {}^tA\,A\,{}^tA\,A$

Or ${}^tA^{-1} = {}^t({}^tA\,A\,{}^tA\,A) = {}^tA\,A\,{}^tA\,A = A^{-1}$. A^{-1} est symétrique. Alors A est symétrique.

Ainsi $I = A\,{}^tA\,A\,{}^tA\,A = A^5$. $A^5 = I$. $X^5 - 1$ est un polynôme annulateur de A. 1 est la seule racine réelle de $X^5 - 1$.

A étant symétrique et à coefficients réels : $Sp_{\mathbb{C}} A = Sp_{\mathbb{R}} A \neq \emptyset$.

Alors $Sp\, A = \{1\}$. Comme A est diagonalisable : $SEP(A, 1) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A, 1) = n - rg(A - I)$.

$rg(A - I) = 0$. $A - I = 0$. $A = I$.

* Réciproquement I vérifie $I\,{}^tI\,I\,{}^tI\,I = I$.

$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A\,{}^tA\,A\,{}^tA\,A = I\} = \{I\}$.

Question 3 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. E un espace euclidien de dimension n. $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E.

On suppose encore que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1$.

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Ceci n'est pas une correction.

Il suffit de montrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0_E$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. $\|e_i\| = \|e_j\| = 1$

$1 = \|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - 2\langle e_i, e_j\rangle = 2 - 2\langle e_i, e_j \rangle$; $\langle e_i, e_j \rangle = \frac{1}{2}$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 = \langle e_i, 0_E \rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{\langle e_i, e_k \rangle}_{= \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ \frac{1}{2} & \text{si } k \neq i \end{cases}}$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k + \alpha_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \frac{1}{2} \alpha_i$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$.

Donc $\alpha_1 = - \sum_{k=1}^{n} \alpha_1$; $(n+1)\alpha_1 = 0$; $\alpha_1 = 0$ car $n \geqslant 2$.

Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

R

Question 15 ESCP 2009 $\boxed{\text{F 1}}$ PELLEGRINI

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E telle que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\|e_i\| = 1$ et $\|e_i\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} < e_i, e_j >^2$.

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Variante JF $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs $\boxed{\text{unitaires}}$ d'un espace vectoriel euclidien E (dont on ne précise pas la dimension...) telle que :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (< x, u_k >)^2$$

Montrer que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base orthonormée de E.

1° $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

2° $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|e_i\| = 1$

3° Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $\|e_i\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} < e_i, e_j >^2 = \|e_i\|^2 + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} < e_i, e_j >^2$

Alors $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} < e_i, e_j >^2 = 0$ et $\forall j \in [\![1, n]\!] - \{i\}$, $< e_i, e_j >^2 \geqslant 0$.

donc $\forall j \in [\![1, n]\!] - \{i\}$, $< e_i, e_j >^2 = 0$. $\forall j \in [\![1, n]\!] - \{i\}$, $< e_i, e_j > = 0$ et ceci pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Donc $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale de E.

1°, 2° et 3° montrent que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

<u>Variante</u> On montre comme plus haut que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est orthonormée en partant de $\|u_i\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (< u_i, u_k >)^2$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est alors une famille orthonormée donc libre de E. <u>Soit $x \in E$</u>

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} < x, u_k > u_k\Big\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x, \sum_{k=1}^{n} < x, u_k > u_k > + \Big\|\sum_{k=1}^{n} < x, u_k > u_k\Big\|^2$$

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} < x, u_k > u_k\Big\|^2 = \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} < x, u_k > < x, u_k > + < \sum_{k=1}^{n} < x, u_k > u_k, \sum_{i=1}^{n} < x, u_i > u_i >$$

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} < x, u_k > u_k\Big\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} < x, u_k > < x, u_i > \underbrace{< u_k, u_i >}_{= \begin{cases} 1 \text{ si } k = i \\ 0 \text{ si } k \neq i \end{cases}}$$

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} < x, u_k > u_k\Big\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} < x, u_k >^2}_{\|x\|^2} = 0. \quad \underline{x = \sum_{k=1}^{n} < x, u_k > u_k}.$$

$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k$.

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E.

Comme $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille libre et orthonormée de E :

<u>$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base orthonormée de E.</u>

R

Question 7 ESCP 2010 $\boxed{\text{F2}}$

Soit E un espace euclidien de dimension n, avec $n \geqslant 2$.

On suppose qu'il existe $n+1$ vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ tels que pour $i \neq j : \langle e_i, e_j \rangle < 0$.

a) Montrer, en utilisant la norme de u, que si $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0$

b) Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

---

a) Supposons que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$.

Posons $I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i > 0\}$.

1er cas.. $I = [\![1,n]\!]$. Alors $0_E = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i$; $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$

2e cas.. $I = \emptyset$. Alors $0_E = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = -\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i$; $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$

3ème cas.. $I \neq [\![1,n]\!]$ et $I \neq \emptyset$. Posons $I' = [\![1,n]\!] \setminus I$.

I' n'est pas vide et $I' = \{i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \leqslant 0\}$

$$0_E = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i + \sum_{i \in I'} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} |\lambda_i| e_i - \sum_{i \in I'} |\lambda_i| e_i.$$

Posons $v = \sum_{i \in I} |\lambda_i| e_i$ et $w = \sum_{i \in I'} |\lambda_i| e_i$.

$$0 = \|0_E\|^2 = \|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w\rangle.$$

$$-2\langle v, w\rangle = -2 \sum_{i \in I} \sum_{j \in I'} |\lambda_i| |\lambda_j| \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{<0 \text{ car } i \neq j \ (i \in I,\ j \in I',\ I \cap I' = \emptyset)} \geqslant 0$$

donc $0 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w\rangle = 0$ avec $\|v\|^2 \geqslant 0$, $\|w\|^2 \geqslant 0$, $-2\langle v, w\rangle \geqslant 0$

Ainsi $\|v\|^2 = \|w\|^2 = -2\langle v, w\rangle = 0$. En particulier $v = w = 0_E$.

donc $0_E = v + w = \sum_{i \in I} |\lambda_i| e_i + \sum_{i \in I'} |\lambda_i| e_i = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i$; $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$

Dans les trois cas $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$

$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$.

R

b) Montrons que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$

D'après a) : $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$.

Alors $0 = \langle 0_E, e_{n+1} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i, e_{n+1} \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \langle e_i, e_{n+1} \rangle$

Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| \langle e_i, e_{n+1} \rangle \leq 0$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| \langle e_i, e_{n+1} \rangle = 0$ et $\langle e_i, e_{n+1} \rangle < 0$.

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| = 0$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

Ceci achève de montrer la liberté de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Montrons que $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$ est libre.

La famille $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1}, e_i)$ a les mêmes qualités que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$. Ce qui précède montre alors que $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$ est libre.

Ceci achève de montrer que n quelconques des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ constituent une famille libre de E. Or $\dim E = n$. Ainsi :

<u>n quelconques des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ forment une base de E.</u>

Question 12 **ESCP 2010** O. GUESNÉ **F1**

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont n réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$. A est la matrice $(u_i\, u_j)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = 2A - I_n$.

Montrer que B est orthogonale. Quelles-sont les valeurs propres de A ?

Nous notons $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ la norme associée. Nous posons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. $\|U\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$.

Observons que $\underline{A = U\,{}^tU}$

${}^tA = {}^t(U\,{}^tU) = {}^t({}^tU)\,{}^tU = U\,{}^tU = A$. $\underline{A \text{ est symétrique}}$. B également ! $\underline{{}^tB = B}$

$A^2 = \underbrace{U\,{}^tU\,U}_{\|U\|^2}{}^tU = \|U\|^2\, U\,{}^tU = U\,{}^tU = A$; $\underline{A^2 = A}$

<u>Remarque</u>.. A est la matrice d'une projection orthogonale car $A^2 = A$ et A est symétrique

Alors $B = 2A - I_n$ est la matrice d'une symétrie orthogonale ...

Ainsi ${}^tB = B$ et $B^2 = I_n$ donc ${}^tBB = I_n$ et B est orthogonale !!

Oublions la remarque.. ${}^tB\,B = B^2 = (2A - I_n)^2 \underset{AI_n = I_nA}{=} 4A^2 - 4A + I_n \underset{A^2 = A}{=} I_n$.

B est une matrice orthogonale.

$A^2 - A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A ayant pour zéros 0 et 1.

$\mathrm{Sp}\, A \subset \{0,1\}$.

$AU = U\,\underbrace{{}^tU\,U}_{\|U\|^2} = \|U\|^2\, U = U$ et $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $1 \in \mathrm{Sp}\, A$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow U\,{}^tU\,X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow <U,X>\, U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \underset{U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}{\Leftrightarrow} <U,X> = 0$

$AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow X \in (\mathrm{Vect}(U))^{\perp}$.

1er cas $n = 1$ Alors $\underline{\mathrm{Sp}\, A = \{1\}}$

2e cas $n \geqslant 2$ $(\mathrm{Vect}(U))^{\perp}$ est non réduit à $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ car sa dimension est $n-1$;

alors $0 \in \mathrm{Sp}\, A$. Finalement $\underline{\mathrm{Sp}\, A = \{0,1\}}$.

<u>Remarque</u>.. $\mathrm{SEP}(A,0) = (\mathrm{Vect}(U))^{\perp}$ et $\mathrm{SEP}(A,1) = \mathrm{Vect}(U)$.

Question 6 **ESCP 2011**

$A=(a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow a_{i,j}=1$ et $\forall i\in[\![1,n]\!],\ a_{i,i}>1$.

Montrer que A est matrice définie positive, c'est à dire que A est symétrique réelle telle que pour tout élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX>0$.

Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y=AX=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.

${}^tXAX=\sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{ii}x_i+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n x_j$.

${}^tXAX=\sum_{i=1}^n\Big[a_{ii}x_i^2+x_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n x_j\Big]=\sum_{i=1}^n\Big[(a_{ii}-1)x_i^2+x_i\sum_{j=1}^n x_j\Big]$.

${}^tXAX=\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2+\sum_{i=1}^n\Big(x_i\sum_{j=1}^n x_j\Big)=\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2+\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n x_j\Big)$.

${}^tXAX=\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2+\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2\geqslant 0$

↑ $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $a_{ii}-1>0$ et $x_i^2\geqslant 0$.

Supposons que ${}^tXAX=0$.

Alors $\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2=\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2=0$ car $\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2\geqslant 0$ et $\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2\geqslant 0$

Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $(a_{ii}-1)x_i^2\geqslant 0$.

Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $(a_{ii}-1)x_i^2=0$ et $a_{ii}-1>0$.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i^2=0$. Ce qui donne $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i=0$. $X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ceci contredit l'hypothèse.

Donc ${}^tXAX\geqslant 0$ et ${}^tXAX\neq 0$. Ainsi ${}^tXAX>0$.

$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tXAX>0$.

De plus $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{ji}=a_{ij}$. A est symétrique.

↑ clair si $i=j$ et si $i\neq j$ $a_{ji}=1=a_{ij}$

A est une matrice définie positive.