Question 1 ESCP 2003

Soient A, B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que tout vecteur propre de A est également vecteur propre de B.
Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

Il existe une base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$.
Alors $Q^{-1} A Q = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\exists \mu_i \in \mathbb{R}$, $B X_i = \mu_i X_i$ (tout vecteur propre de A est vecteur propre de B

Alors $Q^{-1} B Q = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Posons $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n))$

φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$ car $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts
(φ linéaire et injective donc φ iso car $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$).

Alors $\exists ! \, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(P) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$.

Alors $P(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Donc $P(Q^{-1} A Q) = Q^{-1} B Q$; $Q^{-1} P(A) Q = Q^{-1} B Q$; $P(A) = B$.

Exercice.- A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
Montrer que A^{-1} est un polynôme en A.

Question 8 **ESCP 2003** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle. Peut–on avoir M semblable à $2M$? (on pourra commencer par étudier les valeurs propres d'une telle matrice).

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $M \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $M^2 = 0$.

Posons $P = \mathrm{Diag}(2, 1, 1)$ P est inversible.

$PM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$2MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors $PM = 2MP$; $PMP^{-1} = 2M$; M et $2M$ sont semblables.

Question 10 **ESCP 2003** Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?
Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée de matrices inversibles et diagonalisables !

Question 3 ESCP 2004 Résoudre l'équation $X^3 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}\, A = \{-1, 1\}$.

$\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $Y = P^{-1}XP$

$X^3 = A \Leftrightarrow Y^3 = D$

Si $Y^3 = D$: Y commute avec D donc Y est diagonale. (*)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = 1$ et $\beta = -1$. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^3 = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = D$

Alors $X^3 = A \Leftrightarrow Y^3 = D \Leftrightarrow Y = D \Leftrightarrow P^{-1}XP = D \Leftrightarrow X = A$.

A est la seule solution de l'équation

(*) vérifions. • $YD = YY^3 = Y^4 = Y^3Y = DY$; Y commute avec D.

• $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{cases} c = -c \\ -b = b \end{cases}$; $b = c = 0$.

Y est diagonale.

R

Question 4 **ESCP 2004** On confond polynôme et fonction polynôme. Soit f défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$f(P) : x \mapsto \int_0^1 P(x+t)\,dt$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

- f est linéaire
- $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. $\quad f(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\frac{(x+t)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \underbrace{\left[(X+1)^{k+1} - X^{k+1} \right]}_{\deg k}$

  $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

- $f(X^i) = \frac{1}{i+1} \left[(X+1)^{i+1} - X^{i+1} \right] = \frac{1}{i+1} \sum_{k=0}^{i} \binom{i+1}{k} X^k$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ est triangulaire supérieure et tous les éléments de sa diagonale valent 1.

$\mathrm{Sp}\, f = \{1\}$

Alors f est diagonalisable ssi $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Si $n = 0$ c'est vrai

Si $n \geqslant 1$ $\quad f(X) = \frac{1}{2}\left[(X+1)^2 - X^2 \right] = \frac{1}{2}(2X+1) = X + \frac{1}{2} \neq X$!

f est diagonalisable ssi $n = 0$.

Question 7 ESCP 2004 $\boxed{\text{F 3}}$

Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$... dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\operatorname{Sp} A = \{0, 1\}$. Notons (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On obtient facilement $SEP(A,0) = \operatorname{Vect}(E_2, E_3)$ et $SEP(A,1) = \operatorname{Vect}(E_1 + E_2)$.

$*$ Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $X^2 = A$. $AX = X^3 = XA$. A et X commutent.

$AXE_2 = XAE_2 = 0$; $XE_2 \in SEP(A,0)$; $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $XE_2 = \alpha E_2 + \beta E_3$.

De même $\exists (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$, $XE_3 = \alpha' E_2 + \beta' E_3$.

$AX(E_1+E_2) = XA(E_1+E_2) = X(E_1+E_2)$; $X(E_1+E_2) \in SEP(A,1)$.

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $X(E_1+E_2) = \gamma(E_1+E_2)$; $XE_1 = \gamma(E_1+E_2) - XE_2 = \gamma E_1 + (\gamma - \alpha)E_2 - \beta E_3$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ \gamma - \alpha & \alpha & \alpha' \\ -\beta & \beta & \beta' \end{pmatrix}$.

$*$ Soit $(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma) \in \mathbb{R}^5$. Posons $X = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ \gamma - \alpha & \alpha & \alpha' \\ -\beta & \beta & \beta' \end{pmatrix}$.

$$X^2 = A \iff \begin{cases} \gamma^2 = 1 \\ \gamma(\gamma-\alpha) + \alpha(\gamma - \alpha) - \alpha'\beta = 1 \\ -\beta\gamma + \beta(\gamma - \alpha) - \beta\beta' = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'\beta = 0 \\ \beta\alpha + \beta\beta' = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \alpha\alpha' + \alpha'\beta' = 0 \\ \beta\alpha' + \beta'^2 = 0 \end{cases}$$

$$X^2 = A \iff \begin{cases} \gamma^2 = 1 \\ -\alpha^2 - \alpha'\beta = 0 \\ -\beta\alpha - \beta\beta' = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \alpha\alpha' + \alpha'\beta' = 0 \\ \beta\alpha' + \beta'^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma^2 = 1 \\ \alpha^2 + \alpha'\beta = 0 \\ \beta(\alpha + \beta') = 0 \\ \alpha'(\alpha + \beta') = 0 \\ \beta\alpha' + \beta'^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma^2 = 1 \\ \alpha^2 = \beta'^2 \\ \alpha^2 + \alpha'\beta = 0 \\ \beta(\alpha + \beta') = 0 \\ \alpha'(\alpha + \beta') = 0 \end{cases}$$

$$X^2 = A \iff \begin{cases} \gamma^2 = 1 \\ \beta' = \alpha \\ \alpha^2 + \alpha'\beta = 0 \\ \alpha\beta = 0 \\ \alpha\alpha' = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \gamma^2 = 1 \\ \beta' = -\alpha \\ \alpha^2 + \alpha'\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = \pm 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta' = 0 \\ \alpha'\beta = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \gamma = \pm 1 \\ \alpha \neq 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha' = 0 \\ \beta' = \alpha \\ \alpha^2 = 0\ !! \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \gamma^2 = 1 \\ \beta' = -\alpha \\ \alpha^2 + \alpha'\beta = 0 \end{cases}$$

$$X^2 = A \iff \begin{cases} \gamma = \pm 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta' = 0 \\ \alpha' = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \gamma = \pm 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta' = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \gamma = \pm 1 \\ \beta' = -\alpha \\ \alpha^2 + \alpha'\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = \pm 1 \\ \beta' = -\alpha \\ \alpha^2 + \alpha'\beta = 0 \end{cases}$$

Les deux premiers cas sont dans le troisième !

Je vous laisse écrire la conclusion.

R

Question 6 ESCP 2006 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que l'on a : $a_{i,j} = 1$ si $i = j+1$ ou $i = j-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon)

Q1. Soit λ un scalaire. Que peut-on dire du rang de $A - \lambda I_n$?

Q2. Montrer que A admet exactement n valeurs propres réelles.

$(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q1 $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n) = \dim \mathrm{Vect}(\underbrace{-\lambda E_1 + E_2}_{U_1}, \underbrace{E_1 - \lambda E_2 + E_3}_{U_2}, \dots, \underbrace{E_{n-1} - \lambda E_n}_{U_n})$.

Montrons que $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ est libre pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ par récurrence.

→ C'est clair pour $k = 1$

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![1, n-2]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i U_i = 0$

La composante de E_{k+2} dans $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i U_i$ est α_{k+1}.

Alors $\alpha_{k+1} = 0$. Ainsi $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i U_i = 0$. L'hypothèse de récurrence donne

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Ceci achève la récurrence.

$(U_1, U_2, \dots, U_{n-1})$ est libre.

Ainsi $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \in \{n-1, n\}$

Donc $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = 0$ ou 1.

Alors les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est symétrique donc A est diagonalisable.

Alors nécessairement A admet n valeurs propres réelles 2 à 2 distinctes.

R

Question 7 **ESCP 2006** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

$\lambda \in Sp\,A \Leftrightarrow (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-\lambda = 2 \\ \text{ou} \\ 3-\lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 5 \end{cases}$

$\lambda \in Sp(B) \Leftrightarrow -\lambda(6-\lambda) + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 5 \end{cases}$

A et B sont toutes les deux semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Donc A et B sont semblables.

R

Question 8 **ESCP 2006** Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer que $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible.

Supposons $A + I_n$ et $A - I_n$ non inversibles.

Alors $1 \in \operatorname{Sp} A$ et $-1 \in \operatorname{Sp} A$.

Or $0 \in \operatorname{Sp} A$ et $\dim \operatorname{SEP}(A,0) = n-1$ car $\operatorname{rg} A = 1$.

Ainsi $n \geqslant \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim \operatorname{SEP}(A,\lambda) \geqslant \dim \operatorname{SEP}(A,0) + \dim \operatorname{SEP}(A,1) + \dim \operatorname{SEP}(A,-1) \geqslant n-1+1+1 = n+1$

ceci est impossible. Ainsi $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible !

Question 2 ESCP 2007

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).

Montrer que, lorsque $n = p$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $\lambda \in Sp\, f \circ g$. $\exists x \in \mathbb{R}^p$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ et $f(g(x)) = \lambda x$.

Supposons $\lambda \neq 0$.

$g(f(g(x))) = \lambda g(x)$.

Si $g(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ alors $\lambda x = f(g(x)) = f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et $x \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ donc $\lambda = 0$!

Alors $(g \circ f)(g(x)) = \lambda g(x)$ et $g(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$; λ est valeur propre de $g \circ f$.

<u>Si λ est une valeur propre non nulle de $f \circ g$, λ est valeur propre de $g \circ f$.</u>

On montre de même que <u>si λ est une valeur propre non nulle de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$.</u>

On suppose $n = p$. Montrons que $Sp\, f \circ g = Sp\, g \circ f$. Il suffit de montrer que $Sp\, f \circ g \subset Sp\, g \circ f$.

Soit $\lambda \in Sp(f \circ g)$. Si λ n'est pas nul, d'après ce qui précède, $\lambda \in Sp\, g \circ f$.

Supposons $\lambda = 0$. Supposons que 0 n'est pas valeur propre de $g \circ f$. Alors $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ (dim $\mathbb{R}^n$ finie).

Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. $f(x) = 0_E$; $g(f(x)) = 0_E$; $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f) = \{0_E\}$.

Donc f est injectif et même bijectif ! $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$. g est alors la composée de deux automorphismes de $\mathbb{R}^n$; g est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Alors $f \circ g$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ comme composée de deux automorphismes de $\mathbb{R}^n$ et ainsi $0 \notin Sp(f \circ g)$!! Finalement $\lambda = 0$ appartient à $Sp(g \circ f)$.

Ceci achève de montrer que $Sp(f \circ g) \subset Sp(g \circ f)$. La symétrie du problème donne l'égalité.

Question 3 **ESCP 2007**

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $X^n = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet-elle au moins une solution ?

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Un calcul simple montre que $S_p A = \{-8, 1\}$. A est donc diagonalisable car $A \in M_2(\mathbb{R})$ et A possède deux valeurs propres distinctes.

$\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$. $P^{-1}AP = D$ où $D = \mathrm{Diag}(-8, 1)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall X \in M_2(\mathbb{R}), X^n = A \Leftrightarrow P^{-1}X^nP = P^{-1}AP = D \Leftrightarrow (P^{-1}XP)^n = D$.

Ceci suffit pour dire que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X^n = A\}$ est équipotent à $S'_n = \{Y \in M_2(\mathbb{R}) \mid Y^n = D\}$. card S_n = card S'_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ cherchons card S'_n. Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S'_n$. $YD = YY^n = Y^{n+1} = Y^nY = DY$.

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{cases} -8a = -8a \\ -8c = c \\ b = -8b \\ d = d \end{cases}$; $b = c = 0$. Y est diagonale.

Soit $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $M_2(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in S'_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^n = -8 \\ \beta^n = 1 \end{cases}$.

$S'_n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \alpha^n = -8 \text{ et } \beta^n = 1 \right\}$.

1er cas... n est pair. $S'_n = \emptyset$. $S_n = \emptyset$. L'équation initiale n'a pas de solution.

2e cas... n est impair. $\begin{cases} \alpha^n = -8 \\ \beta^n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -8^{1/n} \\ \beta = 1 \end{cases}$. card S_n = card S'_n = 1.

L'équation initiale admet une solution et une seule.

Question 11 **ESCP 2007** D. ADJERAD

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Notons que si f est diagonalisable alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires !

Supposons f diagonalisable.

* Si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ ou $\operatorname{Ker} f = E$: $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

* Supposons $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker} f \subsetneq E$. Alors 0 est valeur propre de f et f admet au moins une valeur propre non nulle.

  Soit $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de f. Posons $\lambda_1 = 0$

  $E = \bigoplus_{k=1}^{p} SEP(f, \lambda_k) = \operatorname{Ker} f \oplus \bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f, \lambda_k)$. (1)

  Soit $k \in [\![2, p]\!]$ et soit u un élément de $SEP(f, \lambda_k)$. $f(u) = \lambda_k u$ et $\lambda_k \neq 0$

  Alors $u = \frac{1}{\lambda_k} f(u) = f\left(\frac{1}{\lambda_k} u\right) \in \operatorname{Im} f$.

  Donc $\forall k \in [\![2, p]\!]$, $SEP(f, \lambda_k) \subset \operatorname{Im} f$. Ainsi $\bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f, \lambda_k) \subset \operatorname{Im} f$ (2)

(1) donne $\dim \bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f, \lambda_k) = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$ (3)

(2) et (3) donnent alors $\bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f, \lambda_k) = \operatorname{Im} f$ (car $\dim E < +\infty$).

(1) donne $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. cqfd.

Question 14 **ESCP 2007** M. BOUCHER Oubliée mais du type suivant (ESCP 2006)

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda \in Sp\, A \iff \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\iff (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = 5 \end{cases}$

$Sp\, A = \{1, 5\}$

Alors A est diagonalisable et semblable à $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$\lambda \in Sp\, B \iff B - \lambda I_2$ non inversible $\iff \begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 5 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\iff (-\lambda)(6-\lambda) + 5 = 0$

$\lambda \in Sp\, B \iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = 5 \end{cases}$.

Alors B est diagonalisable et semblable à $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

A et B étant semblables à C : A et B sont semblables. (*)

* $\exists (P, Q) \in (GL_2(\mathbb{K}))^2$, $P^{-1}AP = C$ et $Q^{-1}BQ = C$.

Alors $B = QCQ^{-1} = QP^{-1}APQ^{-1} = (PQ^{-1})^{-1} A (PQ^{-1})$.

d'où la semblabilité de A et B.

R

Question 15 **ESCP 2007** P. DESMICHEL

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Donner plusieurs conditions nécessaires er suffisantes pour que f soit diagonalisable.

Soit (e_1, e_2) une base de Ker f. Il existe un élément e_3 de E tel que :

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $\exists\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

1er cas... $c = 0$. Alors $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp} M_{\mathcal{B}}(f) = \{0\}$ et $\dim \operatorname{SEP}(f, 0) = \dim \operatorname{Ker} f = 2$

f n'est pas diagonalisable.

2e cas... $c \neq 0$ Alors $\operatorname{Sp} f = \{0, c\}$ avec $c \neq 0$.

$\dim \operatorname{SEP}(f, 0) = 2$ et $\dim \operatorname{SEP}(f, c) \geqslant 1$, $\dim \operatorname{SEP}(f, 0) + \dim \operatorname{SEP}(f, c) \leqslant 3$.

Alors $\dim \operatorname{SEP}(f, 0) + \dim \operatorname{SEP}(f, c) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. f est diagonalisable.

Notons que $c = \operatorname{Tr}(M_{\mathcal{B}}(f)) = \operatorname{Tr}(f)$.

→ Donc f diagonalisable $\iff \operatorname{Tr}(f) \neq 0$.

$M_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$

Si $c = 0$ $M_{\mathcal{B}}(f^2) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$; si $c \neq 0$ $M_{\mathcal{B}}(f^2) \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

→ Donc f diagonalisable $\iff f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Rappelons que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$

→ Donc f diagonalisable $\iff \operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Ker} f$.

dim Im f est une droite vectorielle donc $\operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

→ Donc f diagonalisable $\iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$

→ Donc f diagonalisable $\iff \mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

R

Question 16 ESCP 2007 G. GOBINET

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[-2, 2]$. Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. X et Y sont indépendantes. t est un réel.

Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $(x,y) \in [-2,2]^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Posons $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ t & y \end{pmatrix}$.

Si A admet deux valeurs propres distinctes, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si A n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{R}$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$!

Supposons que A admet une valeur propre dans $\mathbb{R}$ et une seule λ.

Alors A diagonalisable $\Leftrightarrow \dim SEP(A, \lambda) = 2 \Leftrightarrow 2 - \operatorname{rg}(A - \lambda I_2) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A - \lambda I_2) = 0$

A diagonalisable $\Leftrightarrow A = \lambda I_2$. Or $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ t & y \end{pmatrix}$.

Donc A ne peut pas être diagonalisable.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-\lambda & 1 \\ t & y-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda^2 - (x+y)\lambda + xy - t = 0$. (1)

(1) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ ssi $(x+y)^2 - 4(xy-t) > 0$.

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (x-y)^2 + 4t > 0$

1er cas.. $t > 0$. A est diagonalisable.

2e cas.. $t = 0$ A est diagonalisable ssi $x \neq y$

3e cas $t < 0$ A est diagonalisable ssi $x - y \notin [-2\sqrt{|t|}, 2\sqrt{|t|}]$.

Notons S l'événement la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

- Si $t > 0$: $\underline{P(S) = 1}$

- Supposons $t = 0$. $P(S) = P(X - Y \neq 0) = 1 - P(X - Y = 0) = 1 - P(X = Y)$.

$P(X=Y) = P(\{Y=0\} \cap \{X=0\}) + P(\{Y=1\} \cap \{X=1\})$. Par indépendance

$P(X=Y) = P(Y=0)\underbrace{P(X=0)}_{0} + P(Y=1)\underbrace{P(X=1)}_{0} = 0$.

$\underline{P(S) = 1}$

R

• <u>Supposons $t < 0$.</u> $P(S) = P(X-Y > 2\sqrt{|t|}) + P(X-Y < -2\sqrt{|t|})$

$$P(S) = P(\{Y=0\} \cap \{X > 2\sqrt{|t|}\}) + P(\{Y=1\} \cap \{X > 2\sqrt{|t|}+1\}) + P(\{Y=0\} \cap X < -2\sqrt{|t|}) +$$

$$P(\{Y=1\} \cap \{X < 1-2\sqrt{|t|}\}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{X et Y indépendantes}}}{\overset{q=1-p}{=}} q\,P(X>2\sqrt{|t|}) + p\,P(X > 2\sqrt{|t|}+1) + q\,P(X<-2\sqrt{|t|}) + p\,P(X < 1-2\sqrt{|t|})$$

Notons F la fonction de répartition de X.

$$P(S) = q(1-F(2\sqrt{|t|})) + p(1-F(2\sqrt{|t|}+1)) + q\,F(-2\sqrt{|t|}) + p\,F(1-2\sqrt{|t|}).$$

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{R}$, $F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty,-2[\\ \frac{z+2}{4} & \text{si } z \in [-2,2] \\ 1 & \text{si } z \in]2,+\infty[. \end{cases}$

a) $\sqrt{|t|} < \frac{1}{2}$. $P(S) = q\left(1-\frac{2\sqrt{|t|}+2}{4}\right) + p\left(1-\frac{2\sqrt{|t|}+1+2}{4}\right) + q\,\frac{-2\sqrt{|t|}+2}{4} + p\,\frac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = 1-\sqrt{|t|}$

b) $\sqrt{|t|} \in [\frac{1}{2},1[$. $P(S) = q\left(1-\frac{2\sqrt{|t|}+2}{4}\right) + p(1-1) + q\,\frac{-2\sqrt{|t|}+2}{4} + p\,\frac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = (1-\sqrt{|t|})q + p\,\frac{3-2\sqrt{|t|}}{4}$

c) $\sqrt{|t|} \in [1,\frac{3}{2}[$. $P(S) = q(1-1) + p(1-1) + q\times 0 + p\,\frac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = \frac{3-2\sqrt{|t|}}{4}\,p$.

d) $\sqrt{|t|} \in [\frac{3}{2},+\infty[$ $\quad P(S)=0$.

Remarque : $t<0$ donc $\sqrt{|t|} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow t > -\frac{1}{4}$; $\sqrt{|t|} \in [\frac{1}{2},1[\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \geq t > -1$;

$\sqrt{|t|} \in [1,\frac{3}{2}[\Leftrightarrow -1 \geq t > -\frac{9}{4}$; $\sqrt{|t|} \in [\frac{3}{2},+\infty[\Leftrightarrow t \leq -\frac{9}{4}$.

$$P(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty,-\frac{9}{4}] \\ \frac{3-2\sqrt{|t|}}{4} & \text{si } t \in]-\frac{9}{4},-1] \\ (1-\sqrt{|t|})q + p\,\frac{3-2\sqrt{|t|}}{4} & \text{si } t \in]-1,-\frac{1}{4}] \end{cases} \qquad P(S) = \begin{cases} 1-\sqrt{|t|} & \text{si } t \in]-\frac{1}{4},0[\\ 1 & \text{si } t \in [0,+\infty[\end{cases}$$

R

Question 18 ESCP 2007 V. OWEN

φ est une forme linéaire sur un espace vectoriel E de dimension n non nulle. u est un vecteur non nul de E.

On considère l'endomorphisme f de E défini par : $\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)\,u$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

1er Cas.. $n=1$. (u) est une base de E. Soit $x \in E$. $\exists \alpha_x \in \mathbb{K}$, $x = \alpha_x u$

. $f(x) = x + \varphi(x)u = x + \alpha_x \varphi(u) u = x + \varphi(u) x = (1+\varphi(u))x$

$f = (1+\varphi(u)) Id_E$. $Sp\, f = \{1+\varphi(u)\}$ et $SEP(f, 1+\varphi(u)) = E$.

2e Cas.. $n \geq 2$. $\forall x \in E$, $f(x) = x \iff \varphi(x) u = 0_E \underset{}{\overset{u \neq 0_E}{\iff}} \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}} \iff x \in Ker\, \varphi$

a) $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$. $f = Id_E$. $Sp\, f = \{1\}$ et $SEP(f,1) = E$

b) $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$. $Ker\,\varphi$ est un hyperplan. $\dim Ker\,\varphi = n-1 \geq 1$.

Alors $1 \in Sp\, f$ et $SEP(f,1) = Ker\,\varphi$.

Notons que f a au plus deux valeurs propres et que s'il existe un deuxième sous-espace propre il est de dimension 1.

$f(u) = (1+\varphi(u))u$ et $u \neq 0_E$. $1+\varphi(u)$ est une valeur propre de f et u un vecteur propre associé.

i) $u \notin Ker\,\varphi$. $\varphi(u) \neq 0$. $1+\varphi(u) \neq 1$.

Alors $Sp\, f = \{1, 1+\varphi(u)\}$, $SEP(f,1) = Ker\,\varphi$ et $SEP(f, 1+\varphi(u)) = Vect(u)$.

ii) $u \in Ker\,\varphi$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}-\{1\}$ et $x \in Ker(f - \lambda Id_E)$.

$\lambda x = f(x) = x + \varphi(x) u$. Donc $\lambda \varphi(x) = \varphi(x) + \varphi(x)\varphi(u) \underset{\varphi(u)=0}{=} \varphi(x)$. Or $\lambda \neq 1$ donc $\varphi(x) = 0$

Alors $\lambda x = x + \varphi(x) u = x$. Comme $\lambda \neq 1$: $x = 0_E$

Si $\lambda \in \mathbb{K}-\{1\}$, $Ker(f - \lambda Id_E) = \{0_E\}$ et λ n'est pas valeur propre de f.

Ainsi $Sp\, f = \{1\}$ et $SEP(f,1) = Ker\,\varphi$.

Résumons le b) ; mieux résumons le 2ème cas

Si $u \in Ker\,\varphi$: $Sp\, f = \{1\}$ et $SEP(f,1) = Ker\,\varphi$

Si $u \notin Ker\,\varphi$: $Sp\, f = \{1, 1+\varphi(u)\}$, $SEP(f,1) = Ker\,\varphi$ et $SEP(f, 1+\varphi(u)) = Vect(u)$