Question 3 ESCP 2008 $\boxed{\text{F1}}$

Soit α un réel non nul, n un entier strictement plus grand que 1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A-\alpha I)=0$.

Montrer que A est diagonalisable.

Ceci n'est pas une correction.

1er cas.. A est inversible. Alors $A^{-1}A(A-\alpha I)=A^{-1}0=0$; $A-\alpha I=0$; $A=\alpha I$

A est diagonale donc A est diagonalisable

2ème cas.. $A-\alpha I$ est inversible. On montre de même que $A=0$; A est diagonalisable.

3ème cas.. A et $A-\alpha I$ ne sont pas inversibles. Alors $0 \in Sp\,A$ et $\alpha \in Sp\,A$.

$X(X-\alpha)$ est un polynôme annulateur de A donc les zéros sont 0 et α ; $Sp\,A \subset \{0,\alpha\}$.

Finalement $Sp\,A=\{0,\alpha\}$.

$SEP(A,0)$ et $SEP(A,\alpha)$ sont en somme directe (cours car $\alpha \neq 0$).

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X=\frac{1}{\alpha}AX+\left(-\frac{1}{\alpha}\right)(A-\alpha I)X = X_1+X_2$ avec $\begin{cases} X_1=\left(-\frac{1}{\alpha}\right)(A-\alpha I)X \\ X_2=\frac{1}{\alpha}AX \end{cases}$.

$AX_1=\left(-\frac{1}{\alpha}\right)A(A-\alpha I)X=0$; $X_1 \in SEP(A,0)$.

$(A-\alpha I)X_2=\frac{1}{\alpha}(A-\alpha I)AX=\frac{1}{\alpha}A(A-\alpha I)X=0$; $X_2 \in SEP(A,\alpha)$.

Donc $X \in SEP(A,0)+SEP(A,\alpha)=SEP(A,0)\oplus SEP(A,\alpha)$.

Ainsi $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \subset SEP(A,0)\oplus SEP(A,\alpha)$. L'inclusion inverse est claire

donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \overset{(1)}{=} SEP(A,0)\oplus SEP(A,\alpha)$ et $Sp\,A=\{0,\alpha\}$.

A est diagonalisable.

<u>Exercice</u>.. Retrouver (1) par analyse/synthèse.

R

Question 13 **ESCP 2009** $\boxed{\text{F 1}}$ SITBON

X est Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité pour que les deux matrices $\begin{pmatrix}1 & Y\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}X & X\\ 0 & Y\end{pmatrix}$ soient semblables.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Posons $A=\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$.

* Supposons que A et B sont semblables. Alors $\operatorname{Sp} A=\operatorname{Sp} B$.

A et B sont triangulaires supérieures donc $\operatorname{Sp} A=\{1,2\}$ et $\operatorname{Sp} B=\{\alpha,\beta\}$.

Ainsi $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$ ce qui signifie que ($\alpha=1$ et $\beta=2$) ou ($\alpha=2$ et $\beta=1$).

* Réciproquement supposons que $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$.

Alors $\operatorname{Sp} A=\operatorname{Sp} B=\{1,2\}$. A et B ont deux valeurs propres distinctes 1 et 2 et appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A et B sont diagonalisables.

Mieux : $\exists Q\in GL_2(\mathbb{R}),\ Q^{-1}AQ=\operatorname{Diag}(1,2)$.

$\exists Q'\in GL_2(\mathbb{R}),\ Q'^{-1}BQ'=\operatorname{Diag}(1,2)$. Posons $D=\operatorname{Diag}(1,2)$.

Alors $A=QDQ^{-1}=QQ'^{-1}BQ'Q^{-1}=(Q'Q^{-1})^{-1}BQ'Q^{-1}$; A et B sont semblables.

Ainsi A et B sont semblables si et seulement si $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$.

Notons $\hat{p}$ la probabilité pour que $\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}X & X\\ 0 & Y\end{pmatrix}$ soient semblables.

D'après ce qui précède $\hat{p}=P\big((\{X=1\}\cap\{Y=2\})\cup(\{X=2\}\cap\{Y=1\})\big)$.

Par incompatibilité et indépendance on a $\hat{p}=P(X=1)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=1)$.

$\hat{p}=p\times p(1-p)+p(1-p)\times p=2p^2(1-p)$.

<u>La probabilité cherchée est $2p^2(1-p)$.</u>

Question 16 **ESCP 2010** Obtenue par E. JARDIN $\boxed{\textbf{F1}}$

A est une matrice carrée d'ordre n. Pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}=1$ si $i+j=n+1$ et 0 sinon.

Déterminer le spectre de A

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & ⋰ & 0 \\ 0 & ⋰ & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de matrice A dans $\mathcal{B}$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $f(e_i)=e_{n+1-i}$

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $f^2(e_i)=f(e_{n+1-i})=e_{n+1-(n+1-i)}=e_i$.

$f^2=Id_E$. $A^2=I_n$. Ainsi $Sp\,A\subset\{-1,1\}$.

$f\left(\sum_{i=1}^n e_i\right)=\sum_{i=1}^n f(e_i)=\sum_{i=1}^n e_{n+1-i}=\sum_{i=1}^n e_i$ et $\sum_{i=1}^n e_i\neq 0_E$. Donc $1\in Sp\,f=Sp\,A$.

<u>1er cas</u>.. $n=1$. Alors $\underline{Sp\,A=\{1\}}$.

<u>2e cas</u>.. $n\geqslant 2$ A est symétrique à coefficients réels donc A est diagonalisable.

Ainsi f est diagonalisable. Supposons que $Sp\,f=Sp\,A=\{1\}$.

Alors $\mathbb{R}^n=SEP(f,1)=Ker(f-Id_{\mathbb{R}^n})$. $f=Id_{\mathbb{R}^n}$. $A=I_n$!!

donc $Sp\,A=Sp\,f\subset\{-1,1\}$ et $Sp\,A=Sp\,f\neq\{1\}$.

Alors $Sp\,A=Sp\,f=\{-1,1\}$. $\underline{Sp\,A=\{-1,1\}}$

<u>Exercice</u>.. Trouver les sous-espaces propres de A (faire deux cas : n pair, n impair).

Question 21 ESCP 2010 S. ALLAIN F1

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a p valeurs propres distinctes et est diagonalisable. Donnez le degré minimal pour un polynôme annulateur non nul de cette matrice.

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

* Soit Q un polynôme annulateur non nul de A. Le spectre de A est contenu dans l'ensemble des zéros de Q. Ainsi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont p racines distinctes de Q. Comme Q n'est pas nul nécessairement $\deg Q \geqslant p$.

Le degré d'un polynôme annulateur non nul de A est supérieur ou égale à p.

* Posons $R = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$. $\deg R = p$. Montrons que R est un polynôme annulateur de A.

A est semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $D = P^{-1}AP$. $A = PDP^{-1}$.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$, $R = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$.

$R(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = \sum_{k=0}^{p} a_k (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{p} a_k PD^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{p} a_k D^k\right)P^{-1} = PR(D)P^{-1}$

$D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$R(D) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = \sum_{k=0}^{p} a_k (\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{Diag}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)$

$R(D) = \mathrm{Diag}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k \alpha_1^k, \sum_{k=0}^{p} a_k \alpha_2^k, \dots, \sum_{k=0}^{p} a_k \alpha_n^k\right) = \mathrm{Diag}(R(\alpha_1), R(\alpha_2), \dots, R(\alpha_n))$.

Or $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} = \mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\,D = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les zéros de R.

Alors $R(\alpha_1) = R(\alpha_2) = \dots = R(\alpha_n) = 0$. Donc $R(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Alors $R(A) = P0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

R est un polynôme annulateur non nul de A de degré p.

Le degré minimal d'un polynôme annulateur non nul d'une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant p valeurs propres distinctes est p.

R.

Question 5 **ESCP 2011**

Soient trois nombres complexes a, b , c. Calculer A^7 avec : $A=\begin{pmatrix}1+i\sqrt{3} & a & b\\ 0 & 1-i\sqrt{3} & c\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

$\boxed{V1}$ Posons $\alpha = 1+i\sqrt{3}$. $\alpha = 2e^{i\pi/3}$. $A=\begin{pmatrix}\alpha & a & b\\ 0 & \bar{\alpha} & c\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

$$A^2=\begin{pmatrix}\alpha & a & b\\ 0 & \bar{\alpha} & c\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & a & b\\ 0 & \bar{\alpha} & c\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2 & a(\alpha+\bar{\alpha}) & \alpha b+ac+2b\\ 0 & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}c+2c\\ 0 & 0 & 2^2\end{pmatrix}$$

Notons que $a(\alpha+\bar{\alpha})=2a$ et $\bar{\alpha}c+2c=c(3-i\sqrt{3})$. Posons $d=\alpha b+ac+2b$.

Alors $A^2=\begin{pmatrix}\alpha^2 & 2a & d\\ 0 & \bar{\alpha}^2 & c(3-i\sqrt{3})\\ 0 & 0 & 2^2\end{pmatrix}$. $A^3=\begin{pmatrix}\alpha^2 & 2a & d\\ 0 & \bar{\alpha}^2 & c(3-i\sqrt{3})\\ 0 & 0 & 2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & a & b\\ 0 & \bar{\alpha} & c\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^3 & a(\alpha^2+2\bar{\alpha}) & b\alpha^2+2ac+2d\\ 0 & \bar{\alpha}^3 & c(\bar{\alpha}^2+6-2i\sqrt{3})\\ 0 & 0 & 2^3\end{pmatrix}$

Notons que $a(\alpha^2+2\bar{\alpha})=a(1-3+2i\sqrt{3}+2-2i\sqrt{3})=0$.

Posons alors $e=b\alpha^2+2ac+2d$ et $f=c(\bar{\alpha}^2+6-2i\sqrt{3})$.

Remarquons encore que : $\alpha^3=(2e^{i\pi/3})^3=2^3e^{i\pi}=-2^3$. Alors $\bar{\alpha}^3=-2^3$.

Ainsi $A^3=\begin{pmatrix}-2^3 & 0 & e\\ 0 & -2^3 & f\\ 0 & 0 & 2^3\end{pmatrix}$. Donc $A^6=\begin{pmatrix}-2^3 & 0 & e\\ 0 & -2^3 & f\\ 0 & 0 & 2^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2^3 & 0 & e\\ 0 & -2^3 & f\\ 0 & 0 & 2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^6 & 0 & 0\\ 0 & 2^6 & 0\\ 0 & 0 & 2^6\end{pmatrix}=2^6I_3$.

Alors $\underline{\underline{A^7=2^6A}}$.

$\boxed{V2}$ $Sp_{\mathbb{C}}A=\{\alpha,\bar{\alpha},2\}$ car A est triangulaire supérieure. A possède trois valeurs propres distinctes α, $\bar{\alpha}$ et 2 dans $\mathbb{C}$. Alors A est diagonalisable.

Il existe une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP=\mathrm{Diag}(\alpha,\bar{\alpha},2)$.

$A=P\,\mathrm{Diag}(\alpha,\bar{\alpha},2)P^{-1}$; $A^6=P\,\mathrm{Diag}(\alpha^6,\bar{\alpha}^6,2^6)P^{-1}$.

Or $\alpha^6=(2e^{i\pi/3})^6=2^6e^{2i\pi}=2^6$. Alors $\bar{\alpha}^6=2^6$. Donc $\mathrm{Diag}(\alpha^6,\bar{\alpha}^6,2^6)=2^6I_3$.

$A^6=P(2^6I_3)P^{-1}=2^6PI_3P^{-1}=2^6I_3$.

On retrouve $A^7=2^6A$.

R.

Question 6 ESCP 2011 V. MESKHI

$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

A est triangulaire supérieure et les éléments de sa diagonale sont 1 et 2.

Alors <u>les valeurs propres de A sont 1 et 2</u>.

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \iff \begin{cases} \alpha + x\beta + y\gamma = \alpha \\ 2\beta + z\gamma = \beta \\ \gamma = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -z\gamma \\ 0 = x\beta + y\gamma = -xz\gamma + y\gamma = (y - xz)\gamma \end{cases}$$

<u>1er cas</u>.. $y - xz \neq 0$

$$AX = X \iff \begin{cases} \beta = -z\gamma \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \beta = \gamma = 0.$$ Alors $SEP(A,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

<u>dim $SEP(A,1) = 1$</u>

<u>2ème cas</u>.. $y - xz = 0$

$AX = X \iff \beta + z\gamma = 0$. $SEP(A,1)$ est l'hyperplan (donc le plan) d'équation $\beta + z\gamma = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors <u>dim $SEP(A,1) = 2$</u>.

$$AX = 2X \iff \begin{cases} \alpha + x\beta + y\gamma = 2\alpha \\ 2\beta + z\gamma = 2\beta \\ \gamma = 2\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = x\beta \end{cases}.$$

Alors $SEP(A,2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. <u>dim $SEP(A,2) = 1$.</u>

Finalement $\dim SEP(A,1) + \dim SEP(A,2) = \begin{cases} 2 \text{ si } y \neq xz \\ 3 \text{ si } y = xz \end{cases}$.

Donc <u>A est diagonalisable si et seulement si $y = xz$.</u>

Question 23 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible et qu'il existe q dans $\mathbb{N}^*$ telle que $B^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont inversibles.

$I_n + A^{-1}BA = A^{-1}A + A^{-1}BA = A^{-1}I_nA + A^{-1}BA = A^{-1}(I_n+B)A$.

$I_n + ABA^{-1} = AA^{-1} + ABA^{-1} = AI_nA^{-1} + ABA^{-1} = A(I_n+B)A^{-1}$.

Alors $I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont semblables à $I_n + B$

$B^q = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ donc X^q est un polynôme annulateur de B dont la seule racine est 0

Alors $\mathrm{Sp}\, B \subset \{0\}$. Ainsi $-1 \notin \mathrm{Sp}\, B$. Donc $B - (-1)I_n$ est inversible.

$I_n + B$ est inversible. Comme $I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont semblables à $I_n + B$:

$I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont inversibles.

Question sans doute incomplète.

R

Question 28 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F}}$ Obtenue par un élève.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA.$

Q1. Montrer que v est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer v^2.

Q2. Montrer que v est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Q3. Déterminer $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$.

il serait préférable d'inverser Q2 et Q3...

Q1 • $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. v est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$v(\lambda A+B) = \lambda A + B + {}^t(\lambda A+B) = \lambda A + B + \lambda\, {}^tA + {}^tB = \lambda(A + {}^tA) + (B + {}^tB) = \lambda v(A) + v(B)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ v(\lambda A+B) = \lambda v(A) + v(B)$. v est linéaire.

Ainsi v est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$v^2(A) = v(v(A)) = v(A + {}^tA) = v(A) + v({}^tA) = A + {}^tA + {}^tA + {}^t({}^tA) = A + 2\,{}^tA + A = 2(A + {}^tA) = 2v(A)$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v^2(A) = 2v(A)$. $v^2 = 2v$.

Q2 $v^2 - 2v = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$. $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de v dont les zéros sont 0 et 2.

Alors $\operatorname{Sp} v \subset \{0, 2\}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \operatorname{Ker}(v) \Leftrightarrow A + {}^tA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow {}^tA = -A$.

$A \in \operatorname{Ker}(v - 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \Leftrightarrow A + {}^tA - 2A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow {}^tA = A$.

Notons $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) "l'ensemble" des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\operatorname{Ker} v = \mathcal{A}_n$ et $\operatorname{Ker}(v - 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n$.

1er cas.. $n = 1$. Alors $\forall A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA = 2A$. $v = 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_1(\mathbb{R})}$.

Alors $\operatorname{Sp} v = \{2\}$ et v est diagonalisable.

2e cas.. $n \geq 2$. $I_n \in \mathcal{S}_n$ donc $\mathcal{S}_n \neq \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$. Alors $\operatorname{Ker}(v - 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \neq \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

donc $2 \in \operatorname{Sp} v$ et $SEP(v, 2) = \mathcal{S}_n$.

R

Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

${}^t(E_{1,2}-E_{2,1}) = {}^tE_{1,2} - {}^tE_{2,1} = E_{2,1} - E_{1,2} = -(E_{1,2}-E_{2,1})$.

Alors $E_{1,2}-E_{2,1} \in \mathcal{A}_n$ et $E_{1,2}-E_{2,1} \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$. $\mathrm{Ker}\, v \neq \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$.

Alors $\underline{\underline{0 \in \mathrm{Sp}\, v \text{ et } \mathrm{SEP}(v,0) = \mathcal{A}_n}}$.

Donc $\underline{\underline{\mathrm{Sp}\, v = \{0,2\}}}$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. $M = S + A$ avec $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ (*)

${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$; $S \in \mathcal{S}_n$

${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$; $A \in \mathcal{A}_n$.

Alors $M = S + A \in \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Ainsi $M_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n \subset M_n(\mathbb{R})$.

Alors $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Soit $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$. ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$. $M = -M$; $2M = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.
Ainsi $M = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Finalement $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$ et $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Alors $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

$\mathrm{Sp}\, v = \{0,2\}$ et $\mathrm{SEP}(v,2) \oplus \mathrm{SEP}(v,0) = M_n(\mathbb{R})$. $\underline{\underline{v \text{ est diagonalisable.}}}$

Q3 Nous avons déjà vu que $\underline{\underline{\mathrm{Ker}\, v = \mathcal{A}_n}}$.

$\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tv(A) = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = v(A)$. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $v(A) \in \mathcal{S}_n$.

Alors $\mathrm{Im}\, v \subset \mathcal{S}_n$.

Soit $M \in \mathcal{S}_n$. $M \in \mathrm{SEP}(v,2)$. $v(M) = 2M$. $M = \frac{1}{2}v(M) = v(\frac{1}{2}M)$. $M \in \mathrm{Im}\, v$.

$\forall M \in \mathcal{S}_n$, $M \in \mathrm{Im}\, v$. $\mathcal{S}_n \subset \mathrm{Im}\, v$.

Finalement $\underline{\underline{\mathrm{Im}\, v = \mathcal{S}_n}}$.

Remarque.. Nous avons vu au niveau de (*) que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires.

Mieux si $M \in M_n(\mathbb{R})$ nous avons vu que $\exists!\,(S,A) \in M_n(\mathbb{R})$, $M = S + A$.

De plus $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

Soit p la projection sur $\mathcal{S}_n$ parallèlement à $\mathcal{A}_n$. $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.

Alors $v = 2p$. Résultat qui permet de retrouver tout ce qui est demandé non ?