Voici les questions sans préparation 2006 qu'à bien voulu nous fournir HEC. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2006

Question 1 D'apès HEC 2006-1 F 2

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t = 1 + x$.

Question 2 D'apès HEC 2006-2 F 3

A, B et C sont trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe trois complexes α, β, γ, non tous nuls et tels que $\alpha\, A + \beta\, B + \gamma\, C$ admette une unique valeur propre.

Question 3 D'apès HEC 2006-3 F 1

$E = \mathbb{R}^3$. f est un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et -1 sont des valeurs propres.

Démontrer que f est diagonalisable.

Question 4 D'apès HEC 2006-4 F 2

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$ (on pourra introduire une variable aléatoire usuelle).

Question 5 D'apès HEC 2006-5 F 2

Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que : P' divise P $(\bigstar)$. Montrer que P'' divise P'... ($\boxed{JF}$ si $\deg P' \geqslant 1$).

Trouver tous les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient $(\bigstar)$.

Question 6 D'apès HEC 2006-6 F 2

$n \in [\![2, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Existe-t-il m vecteurs x_1, x_2, ..., x_n de E, avec $m \neq n$ tels que $\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \big(< x, x_k > \big)^2$.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une suite d'éléments de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ ||x_k|| = 1 \text{ et } \forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} \big(< x, x_k > \big)^2.$$

Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base orthonormée de E.

Question 7 HEC 2006-7 F 1 *élève*

X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Donner la loi de $Y = e^X$. Existence et valeur du moment d'ordre k.

Question 8 HEC 2006-8 F 1 *élève*

Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

Une personne dispose de n euros, paye un euro pour tirer une boule et gagne autant d'euros que le numéro de la boule obtenue. Que peut-elle espérer ?

Question 9 HEC 2006-9 $\boxed{\textbf{F 2}}$ *élève*

On considéres deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ X_n et Y_n suivent la loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que X_1, X_2, ..., X_n, ..., Y_1, Y_2, ..., Y_n, ... sont mutuellement indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, N_n est la variable alétoire égale au nombre d'indices i de $[\![1, n]\!]$ tels que lévénement $\{X_i \leqslant Y_i\}$ se réalise.

Montrer que la suite te terme général $\dfrac{N_n}{n}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}$.

Question 1 **D'apès HEC 2006**

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + x$.

• Supposons que f est solution.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x t f(t)\,dt + 1 + x$; $f(0) = 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(0) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - x f(x) + x f(x) + 1$; f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$!!

$f(0) = 1$. $\lambda = 1$

$f'(0) = 1 = \lambda(-\sin 0) + \mu \cos 0$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos x + \sin x$.

• Réciproque. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos x + \sin x$.

$\displaystyle\int_0^x (\cos t + \sin t)\,dt = [\sin t - \cos t]_0^x = \sin x - \cos x + 1$.

$\displaystyle\int_0^x t(\cos t + \sin t)\,dt = [t(\sin t - \cos t)]_0^x - \int_0^x (\sin t - \cos t)\,dt$
o.a.v.

$= x(\sin x - \cos x) - [-\cos t - \sin t]_0^x$

$= x\sin x - x\cos x + \cos x + \sin x - 1$

$f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t) f(t)\,dt = \cos x + \sin x + x[\sin x - \cos x + 1] - x\sin x + x\cos x - \cos x - \sin x + 1$

$= \cos x + \sin x + x\sin x - x\cos x + x - x\sin x + x\cos x - \cos x - \sin x + 1$

$= x + 1$.

R

Question 2 **D'apès HEC 2006**

A, B et C sont trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe trois complexes α, β, γ, non tous nuls et tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une unique valeur propre.

1er cas.. (A,B,C) est liée. $\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$, $(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0_{\mathbb{C}^3}$ et $\alpha A+\beta B+\gamma C = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

(α,β,γ) est solution car $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$ admet une unique valeur propre.

2ème cas.. (A,B,C) est libre

a) (A,B,C,I_2) est liée.

Alors $\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$, $(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0_{\mathbb{C}^3}$ et $I = \alpha A+\beta B+\gamma C$

(α,β,γ) convient.

b) (A,B,C,I_2) est libre. C'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^4$, $\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta I_2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

$\alpha A+\beta+\gamma C = \begin{pmatrix}-\delta&1\\0&-\delta\end{pmatrix}$ admet une valeur propre et une seule.

De plus $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$.

R

Question 3 **D'apès HEC 2006**

$E = \mathbb{R}^3$. f est un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et -1 sont des valeurs propres.

Démontrer que f est diagonalisable.

1er cas.. $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0_E\}$. Alors 0 est valeur propre de f.

f admet au moins trois valeurs propres distinctes.

f est diagonalisable

2e cas.. $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$. f est un automorphisme de E.

$f^4 = f^2$ donc $f^2 = \mathrm{Id}_E$. f est une symétrie. f est diagonalisable.

R

Question 4 D'apès HEC 2006

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$ (on pourra introduire une variable aléatoire usuelle).

Revient à prouver que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \frac{1}{2}$.

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de var qui suivent une loi de Poisson de paramètre 1 et qui sont indépendantes.

Pour $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

$S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$. $E(S_n) = n$ et $V(S_n) = n$.

$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}}$ vers $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \phi(0) = \frac{1}{2}$. $\lim_{n\to+\infty} \left(P(S_n \leq n)\right) = \frac{1}{2}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \frac{1}{2}$ cqfd.

R

Question 5 **D'apès HEC 2006**

Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que : P' divise P $(\bigstar)$. Montrer que P'' divise P'... ($\boxed{JF}$ si $\deg P' \geqslant 1$).

Trouver tous les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient $(\bigstar)$.

$\exists\, \varphi \in \mathbb{R}[X]$, $P = \varphi P'$. Supposons $\deg P' \geq 1$.

Alors $\deg \varphi = 1$ car $\deg P = \deg P' + 1$.

$P' = \varphi' P' + \varphi P''$; $(1-\varphi')P' = \varphi P''$

si $\varphi' = 1$ alors $\varphi P'' = 0$ et $\varphi \neq 0$ donc $P'' = 0$ et P' est constant

si $\varphi' = 1$: $\deg P' \leq 0$. Or $\deg P' \geq 1$.

Ainsi φ' est un réel distinct de 1 ; $P' = \frac{1}{1-\varphi'} \varphi P''$; $P'' \mid P'$.

Supposons que P' divise P.

1er cas.. P est constant. Alors $P' = 0$. Comme P' divise P : $P = 0$.

2e cas.. $\deg P = 1$. Alors $P = \lambda(X-\alpha)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

3e cas. $\deg P \geq 2$. Posons $r = \deg P$.

$\deg P^{(r-1)} = 1$.

P' divise P donc P'' divise P', ..., $P^{(r-1)}$ divise $P^{(r-2)}$

Soit α la racine de $P^{(r-1)}$

α est racine de $P^{(r-1)}, P^{(r-2)}, P^{(r-3)}, \dots, P$.

Alors $(X-\alpha)^r$ divise P. $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $P = \lambda(X-\alpha)^r$ car $\deg P = r$

On peut résumer les trois cas en disant que :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $P = \lambda(X-\alpha)^r$.

Réciproquement si $P = \lambda(X-\alpha)^r$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}^*$

$P = \frac{1}{r}(X-\alpha)\, r\lambda(X-\alpha)^{r-1} = \frac{1}{r}(X-\alpha)P'$; P' divise P.

R

Question 6 D'apès HEC 2006

$n \in [\![2, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Existe-t-il m vecteurs x_1, x_2, ..., x_n de E, avec $m \neq n$ tels que $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \big(< x, x_k > \big)^2$.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une suite d'éléments de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \|x_k\| = 1 \text{ et } \forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \big(< x, x_k > \big)^2.$$

Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base orthonormée de E.

→ 1er Cas.. $m > n$. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base orthonormée de E.

$\forall x \in E$, $x = \sum_{\ell=1}^{n} \langle x, u_\ell \rangle u_\ell$

$\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \langle x, u_\ell \rangle^2$.

Posons $\forall i \in [\![n+1, m]\!]$, $u_i = 0_E$. $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ est solution.

2ème Cas.. $m < n$. Supposons $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ solution.

Posons $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_m)$. $F \subsetneq E$. $\dim F^\perp \geqslant 1$.

Soit $x \in F^\perp - \{0_E\}$.

$\sum_{\ell=1}^{m} \langle x, u_\ell \rangle^2 = 0 \neq \|x\|^2$!

Si $m < n$ le problème n'a pas de solution.

→ $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|u_i\|^2 = \sum_{\ell=1}^{n} (\langle u_i, u_\ell \rangle)^2$; $\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{n} (\langle u_i, u_\ell \rangle)^2 = 0$

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall \ell \in [\![1, n]\!] - \{i\}$, $\langle u_i, u_\ell \rangle = 0$.

$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est alors une famille orthonormée de E.

Le reste est clair.

R

Question 7 **HEC 2006** $\boxed{\text{F 1}}$ *élève*

X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Donner la loi de $Y = e^X$. Existence et valeur du moment d'ordre k.

$Y(\Omega) = [1, +\infty[$. $\forall x \in]-\infty, 1[$, $F_Y(x) = 0$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $F_Y(x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln x) = 1 - e^{-\lambda \ln x} = 1 - x^{-\lambda}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Y(x) = \begin{cases} \lambda x^{-\lambda-1} & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_Y est une densité de Y.

Soit $k \in \mathbb{N}$ $\int_{-\infty}^{1} t^k f_Y(t)\,dt$ converge et vaut 0.

$\forall t \in [1, +\infty[$, $t^k f_Y(t) = \lambda \dfrac{1}{t^{\lambda+1-k}}$

Alors $\int_1^{+\infty} t^k f_Y(t)\,dt$ converge si $\lambda + 1 - k > 1$ ou si $\lambda > k$.

Y possède un moment d'ordre k si $k < \lambda$.

Supposons $k < \lambda$: $E(Y^k) = \lambda \int_1^{+\infty} t^{k-\lambda-1} = \lambda \lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{A^{k-\lambda} - 1}{k - \lambda} = \dfrac{\lambda}{\lambda - k}$.

R

Question 8 **HEC 2006** $\boxed{\text{F 1}}$ *élève*

Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

Une personne dispose de n euros, paye un euro pour tirer une boule et gagne autant d'euros que le numéro de la boule obtenue. Que peut-elle espérer ?

Soit X_i le numéro de la boule obtenue au i^e tirage.

Le joueur peut espérer gagner $\sum_{i=1}^{n} E(X_i) - n$.

1er cas. – Tirage avec remise. $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2n]\!])$.

2e cas. – Tirage sans remise.

$X_i(\Omega) = [\![1,2n]\!]$.

$\forall k \in [\![1,2n]\!]$, $P(X_i=k) = \dfrac{1 \times (2n-1)(2n-2)\cdots(2n-1-(i-1)+1)}{(2n)(2n-1)\cdots(2n-i+1)} = \dfrac{1}{2n}$.

donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2n]\!])$

Résultat $\sum_{i=1}^{n} E(X_i) - n = n \times \dfrac{2n+1}{2} - n = \dfrac{n(2n-1)}{2}$.

R

Question 9 **HEC 2006** $\boxed{\text{F 2}}$ *élève*

On considéres deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ X_n et Y_n suivent la loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que X_1, X_2, ..., X_n, ..., Y_1, Y_2, ..., Y_n, ... sont mutuellement indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, N_n est la variable alétoire égale au nombre d'indices i de $[\![1,n]\!]$ tels que lévénement $\{X_i \leqslant Y_i\}$ se réalise.

Montrer que la suite te terme général $\dfrac{N_n}{n}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = \mathbb{1}_{\{X_i \leq Y_i\}}$.

$(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de vaer → indépendantes
→ ayant même loi
→ possédant une espérance et une variance.

La loi faible des grands nombres montre que $\dfrac{N_n}{n} = \dfrac{B_1 + B_2 + \cdots + B_n}{n}$ converge en probabilité vers $E(B_1) = P(X_1 \leq Y_1)$.

$Y_1 - X_1$ est une vaed (★ de convolution).

$P(Y_1 - X_1 = 0) = 0$. $Y_1 - X_1$ et $X_1 - Y_1$ ont même loi.

Alors $1 = P(X_1 - Y_1 > 0) + P(X_1 - Y_1 = 0) + P(X_1 - Y_1 < 0) = 2P(X_1 - Y_1 < 0) = 2P(X_1 - Y_1 \leq 0)$.

$P(X_1 - Y_1 \leq 0) = \frac{1}{2}$; $P(X_1 \leq Y_1) = \frac{1}{2}$.

Alors $\left(\frac{N_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$.

R