EXERCICES SANS PRÉPARATION 2009

Question 1 HEC 2009-1

Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

Q1. Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

Q2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$.

On traitera le cas général où les valeurs propres de f et de g sont des réels positifs ou nuls. On ajoutera ϕ symétrique !

Question 2 HEC 2009-2

Q1. Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale $J(z) = \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Q2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ $\dfrac{e^{-z}}{z}$.

Question 3 HEC 2009-3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, indépendantes et de même loi .

On définit la variable aléatoire : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Q1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $E(e^{xS_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $P([S_n \geqslant a]) \leqslant e^{-ax}\, E(e^{xS_n})$.

Q2. Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par : $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$.

Question 4 HEC 2009-4

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$.

Q1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, $P([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que si $b > 0$,

$$P\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\,\mathrm{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $P([|X_n - np| \leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

Question 5 HEC 2009-5

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q1. On pose $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,1,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

Q2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.

Q3. Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Question 6 HEC 2009-6

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon indépendant, identiquement distribué de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose λ inconnu et on cherche à l'estimer par un intervalle de confiance.

On pose : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

A l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Question 7 HEC 2009-7

Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. A chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité p, sa poche de gauche pour un prendre un.

Q1. Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?

Q2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$.

Question 8 HEC 2009-8

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$.

Q1. Étudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.

Q3. En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra admettre que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Question 1 HEC 2009-1

Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

Q1. Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant sdes valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

Q2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$.

On traitera le cas général où les valeurs propres de f et de g sont des réels positifs ou nuls. On ajoutera ϕ symétrique !

(Q1) f est un endomorphisme symétrique de E donc f est diagonalisable. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

$\mathrm{Sp}\, f = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k \geqslant 0$. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\phi(e_k) = \sqrt{\alpha_k}\, e_k$. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\phi^2(e_k) = (\sqrt{\alpha_k})^2 e_k = \alpha_k e_k = f(e_k)$.

Ainsi ϕ^2 et f sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Alors $\phi^2 = f$. La matrice de ϕ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale donc symétrique. Alors ϕ est symétrique.

$\mathrm{Sp}\, \phi = \mathrm{Sp}\, M_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathrm{Sp}\, \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$. Ainsi les valeurs propres de ϕ sont positives.

Il existe un endomorphisme symétrique ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $\phi^2 = f$.

Remarque : De même il existe un endomorphisme symétrique ψ de E ayant des valeurs propres positives tel que $\psi^2 = g$.

(Q2) Soit $x \in E$.

- Supposons que $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$. $f(x) = g(x) = 0_E$. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0_E$. $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$.
- Réciproquement supposons que $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$. $f(x) + g(x) = 0_E$. $f(x) = -g(x)$.

$\|\phi(x)\|^2 = \langle \phi(x), \phi(x) \rangle = \langle x, \phi^2(x) \rangle = \langle x, f(x) \rangle = -\langle x, g(x) \rangle = -\langle x, \psi^2(x) \rangle = -\langle \psi(x), \psi(x) \rangle = -\|\psi(x)\|^2$

(ϕ autoadjoint ; ψ autoadjoint)

$0 \leqslant \|\phi(x)\|^2 = -\|\psi(x)\|^2 \leqslant 0$. $\|\phi(x)\|^2 = \|\psi(x)\|^2 = 0$. $\|\phi(x)\| = \|\psi(x)\| = 0$. $\phi(x) = \psi(x) = 0_E$.

...

Alors $f(x) = \varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(0_E) = 0_E$ et $g(x) = \psi^2(x) = \psi(\psi(x)) = \psi(0_E) = 0_E$.

donc $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g$.

Finalement $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g$. et ceci pour tout x dans E.

Donc $\underline{\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g}$.

Exercice montrer l'unicité de φ (φ symétrique à valeurs propres positives tel que $\varphi^2 = f \ldots$).

R.

J.F.C.

Question 2 **HEC 2009-2**

Q1. Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale $J(z) = \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est convergente.

Q2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ $\frac{e^{-z}}{z}$.

(Q1) $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge car $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge. Alors pour tout élément β de $]0,+\infty[$, $\int_\beta^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge.

(Q2) Soit $\beta \in]0,+\infty[$. Soit $A \in]\beta,+\infty[$. Pour $t \in]0,+\infty[$, $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -e^{-t}$.

u et v sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et, $\forall t \in]0,+\infty[$, $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $v(t) = e^{-t}$. Ceci justifie l'intégration par parties qui suit.

$$\int_\beta^A \frac{e^{-t}}{t}dt = \left[\frac{1}{t}(-e^{-t})\right]_\beta^A - \int_\beta^A \left(-\frac{1}{t^2}\right)(-e^{-t})dt = -\frac{1}{A}e^{-A} + \frac{1}{\beta}e^{-\beta} - \int_\beta^A \frac{e^{-t}}{t^2}dt.$$

$\lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-A}}{A} = 0$ et $\int_\beta^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge. Alors $\int_\beta^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$ converge

et $\int_\beta^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = \frac{1}{\beta}e^{-\beta} - \int_\beta^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$.

$\frac{\beta}{e^{-\beta}}J(\beta) = 1 - \frac{\beta}{e^{-\beta}}\int_\beta^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$. Notons que $\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\beta}{e^{-\beta}}\int_\beta^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt\right) = 0$.

$\forall B \in]\beta,+\infty[$, $0 \leq \frac{\beta}{e^{-\beta}}\int_\beta^B \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leq \frac{\beta}{e^{-\beta}}\frac{1}{\beta^2}\int_\beta^B e^{-t}dt = \frac{1}{\beta}e^{\beta}\left[-e^{-t}\right]_\beta^B = \frac{1}{\beta}e^{\beta}(e^{-\beta} - e^{-B}) \leq \frac{1}{\beta}e^{\beta}e^{-\beta} = \frac{1}{\beta}$.

En faisant tendre B vers $+\infty$ il vient $0 \leq \frac{\beta}{e^{-\beta}}\int_\beta^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leq \frac{1}{\beta}$ et ceci pour tout β dans $]0,+\infty[$.

Comme $\lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{\beta} = 0$ il vient par encadrement : $\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\beta}{e^{-\beta}}\int_\beta^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt\right) = 0$.

Alors $\lim_{\beta\to+\infty} \frac{\beta}{e^{-\beta}}J(\beta) = 1$. Donc $\lim_{\beta\to+\infty} \frac{J(\beta)}{\frac{e^{-\beta}}{\beta}} = 1$. $J(\beta) \underset{\beta\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-\beta}}{\beta}$.

Question 3 HEC 2009-3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, indépendantes et de même loi .

On définit la variable aléatoire : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Q1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $E(e^{xS_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $P([S_n \geqslant a]) \leqslant e^{-ax}\, E(e^{xS_n})$.

Q2. Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par : $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

(Q1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $E(e^{xS_n})$ existe. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$\{S_n \geqslant a\} = \{xS_n \geqslant ax\} = \{e^{xS_n} \geqslant e^{ax}\}$.

e^{xS_n} possède une espérance, prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $e^{ax} \in \mathbb{R}_+^*$

l'inégalité de Markov donne : $P(S_n \geqslant a) = P(e^{xS_n} \geqslant e^{ax}) \leqslant \dfrac{E(e^{xS_n})}{e^{ax}}$.

$P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ax} E(e^{xS_n})$.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. e^{xS_n} est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs donc $E(e^{xS_n})$ existe.

$E(e^{xS_n}) = E(e^{xX_1} e^{xX_2} \dots e^{xX_n}) \overset{\text{indépendance}}{=} E(e^{xX_1}) E(e^{xX_2}) \dots E(e^{xX_n})$.

$E(e^{xX_i}) = e^{x}(1-p) + e^{x}p$ (théorème de transfert). $E(e^{xS_n}) = (1-p+e^{x}p)^n$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ax}\left((1-p)e^{-x} + pe^{x}\right)^n$.

R

R.

Question 4 HEC 2009-4

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$.

Q1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, $P([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que si $b > 0$,

$$P\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $P([|X_n - np| \leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

(Q1) Posons $n_0 = \text{Ent}(a)$. Soit $n \in [\![\max(1, n_0), +\infty[\![$.

$$P(X_n \leqslant a) = \sum_{k=0}^{n_0} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Soit $k \in [\![1, n_0]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$. Ceci vaut encore pour $k = 0$ car $\binom{n}{0} = 1$ et $\frac{n^0}{0!} = 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $\forall k \in [\![0, n_0]\!]$, $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} p^k q^{n-k} = \frac{p^k}{q^k k!} (n^k q^n)$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} (n^k q^n) = 0$ par croissance comparée car $|q| = q < 1$.

Alors pour tout k dans $[\![0, n_0]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} \left[\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right] = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leqslant a) = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right] = 0$.

Pour tout réel a strictement positif : $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leqslant a) = 0$.

(Q2) $b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1er Cas : $b\sqrt{n} \leqslant \sqrt{p(1-p)}$. $\min(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}) = b\sqrt{n}$.

Alors $1 \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} b\sqrt{n} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \min(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$.

$b\sqrt{n} > 0$

Or $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq 1$. donc $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$

<u>2ème cas</u>.. $b\sqrt{n}>\sqrt{p(1-p)}$. Alors $\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)=\sqrt{p(1-p)}$

$E(X_n)$ (resp. $V(X_n)$) existe et vaut np (resp. $np(1-p)$).

Alors $E\left(\frac{X_n}{n}\right)$ existe et vaut p. $V\left(\frac{X_n}{n}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2}np(1-p)$ ou $\frac{p(1-p)}{n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)=P\left(\left|\frac{X_n}{n}-E\left(\frac{X_n}{n}\right)\right|>b\right)\leq \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{b^2}=\frac{p(1-p)}{b^2 n}=\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\times\sqrt{p(1-p)}.$$

donc $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$

Ainsi pour tout réel b, strictement positif $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$.

Soit $b\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$.

$\lim_{n\to+\infty} b\sqrt{n}=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)=\sqrt{p(1-p)}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}=0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)\right)=0$. Par encadrement il vient $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)=0$.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\leq b\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\right)=1-0=1$.

donc $\lim_{n\to+\infty} P\left(|X_n-np|\leq b\right)=1$.

Question 5 HEC 2009-5

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q1. On pose $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,1,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

Q2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.

Q3. Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1.. $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3$.

Q2.. M est symétrique à coefficients réels donc M est diagonalisable.

d'après Q1 $2 \in Sp\, M$ et $\dim E(M,2) \geq 3$ (v_1, v_2, v_3 sont clairement libres).

Alors il existe un réel α tel que M soit semblable à $\mathrm{Diag}(1,1,2,\alpha)$.

$4 = \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Diag}(1,1,2,\alpha)) = 4 + \alpha$; $\alpha = -2$.

Donc $\dim E(M,2) \geq 3$, donc $\dim E(M,-2) \geq 1$.

Nécessairement M ne peut avoir d'autres valeurs propres que -2 et 2.

Donc $\dim E(M,-2) = 1$ et $\dim E(M,2) = 3$.

$\mathbb{R}^{4,1} = E(M,-2) \oplus E(M,2)$ et $E(M,-2)$ et $E(M,2)$ sont orthogonaux. Alors $E(M,-2) = (E(M,2))^\perp$.

$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille d'éléments de $E(M,2)$ visiblement libre.

$\mathcal{B}_1$ est une base de $E(M,2)$ car $\dim E(M,2) = 3$.

soit $x = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,1}$. $x \in E(M,-2) \Leftrightarrow x$ orthogonal à $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$x \in E(M,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+t=0 \\ -x+y+z=0 \\ y+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-x \\ y=-x \\ z=x+y-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-x \\ y=-x \\ z=x \end{cases}$$

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E(M,-2)$.

Alors $\mathcal{B} = {}^t\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2{}^t$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $2, 2, 2$ et -2.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$, est inversible et $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(2,2,2,-2)$.

(Q3) * $A^2 = 4I_4$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{2n} = 4^n I_4$ et $A^{2n+1} = 4^n A$.

(Q4) Posons $v_4 = (1,-1,-1,-1)$. Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}$ la base (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbb{R}^4$ (base, ok ?). Soit la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

Soit p_1 (resp. p_2) la projection affine sur $\mathrm{Ker}(f, 2)$ (resp. $\mathrm{Ker}(f, -2)$).

$$M_{\mathcal{B}}(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ et $$M_{\mathcal{B}}(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$.

** Alors $M_{\mathcal{B}}(p_1) = P\,\mathrm{Diag}(1,1,1,0)\,P^{-1}$ et $M_{\mathcal{B}}(p_2) = P\,\mathrm{Diag}(0,0,0,1)\,P^{-1}$.

* Peut s'obtenir directement en écrivant $A^2 = P(\mathrm{Diag}(2,2,2,-2))^2 P^{-1}$.

** $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $M_{\mathcal{B}}(p_1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. $M_{\mathcal{B}}(p_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$