R.

Question 1 **HEC 2011**

n appartient à $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

Q1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ et un seul tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

Q2. Décomposer P_n comme un produit de polynômes de degré 1 lorsque $n \geqslant 1$.

Cours *Énoncer le théorème de l'espérance totale.*

Q1 Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) = z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} + z^n + \frac{1}{z^n}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$.

ceci suggère une preuve par récurrence au moins pour l'existence.

Montrons par récurrence "d'ordre 2" que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ il existe un élément P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^n+\frac{1}{z^n} = P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

* • Posons $P_0 = 2$. $P_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_0\left(z+\frac{1}{z}\right) = 2 = z^0+\frac{1}{z^0}$.

• Posons $P_1 = X$. $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_1\left(z+\frac{1}{z}\right) = z+\frac{1}{z}$.

Ainsi la propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$

* Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$ avec n dans $\mathbb{N}$.

$\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^n+\frac{1}{z^n} = P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$ et $z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}} = P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) = \left(z+\frac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

<u>Posons</u> $P_{n+2} = X P_{n+1} + P_n$.

Alors $P_{n+2} \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ car $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = P_{n+2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

ceci achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$

R.

Montrons l'unicité de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un second élément Q_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ Q_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ (P_n - Q_n)\left(z+\frac{1}{z}\right) = P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) - Q_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = 0$.

En particulier $\forall x \in [1, +\infty[,\ (P_n - Q_n)\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0$.

Posons $\forall x \in [1,+\infty[,\ \varphi(x) = x + \frac{1}{x}$. φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et

$\forall x \in [1,+\infty[,\ \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. $\varphi'(1) = 0$ et $\forall x \in]1,+\infty[,\ \varphi'(x) > 0$. Alors :

φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, φ est continue sur $[1,+\infty[$, $\varphi(1) = 2$ et

$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Alors φ définit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[2,+\infty[$.

Ainsi $\varphi([1,+\infty[) = [2,+\infty[$.

$\forall x \in [1,+\infty[,\ (P_n - Q_n)(\varphi(x)) = (P_n - Q_n)\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0$.

Alors $\forall y \in [2,+\infty[,\ (P_n - Q_n)(y) = 0$.

$P_n - Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines.

Alors $P_n - Q_n$ est le polynôme nul. $Q_n = P_n$.

Donc $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\ P_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}}}$.

Q2 Pour tout n dans $\mathbb{N}$ notons α_n le coefficient de X^n dans P_n

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$.

le coefficient de X^{n+2} dans P_{n+2} est α_{n+2}

" " " " $X P_{n+1}$ est α_{n+1}

" " " " P_n est 0

Alors $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$. Donc la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est constante.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n=\alpha_1$ et $\alpha_1=1$ car $P_1=X$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n=1$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, le coefficient de X^n dans P_n est 1.

Ainsi pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est unitaire et de degré n.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $\theta\in[0,\pi]$.

$P_n(2\cos\theta)=P_n(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=P_n\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)=(e^{i\theta})^n+\frac{1}{(e^{i\theta})^n}=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$.

$P_n(2\cos\theta)=0 \iff 2\cos n\theta=0\iff \cos(n\theta)=0\iff n\theta\equiv\frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \exists k\in\mathbb{Z}, n\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$P_n(2\cos\theta)=0\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \theta=\frac{\pi+2k\pi}{2n} \underset{\theta\in[0,\pi]}{\iff} \exists k\in[\![0,n-1]\!], \theta=\frac{\pi+2k\pi}{2n}$.

Posons $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\theta_k=\frac{\pi+2k\pi}{2n}$ et $x_k=2\cos\theta_k$.

Alors $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $P_n(x_k)=P_n(2\cos\theta_k)=0$.

$0<\theta_0<\theta_1<\dots<\theta_{n-1}<\pi$ et $\cos$ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

Alors $2\cos\theta_0>\cos\theta_1>\dots>\cos\theta_{n-1}$ donc $x_0>x_1>\dots>x_{n-1}$. $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ sont donc n zéros distincts de P_n.

Comme $\deg P_n=n$, $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ sont LES zéros de P_n.

$\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)$ divise P_n et ces deux polynômes sont de degré n.

Alors $\exists\lambda\in\mathbb{R}^*$, $P_n=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)$. Comme P_n est unitaire : $P_n=\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)$

Ainsi $P_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-2\cos\left(\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n}\right)\right)$ et ceci pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Remarque : $P_1=X$, $P_2=X^2-2=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$, $P_3=X^3-3X=X(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$,

$P_4=X^4-4X^2+2=(X-2\cos\frac{\pi}{8})(X+2\cos\frac{\pi}{8})(X-2\cos\frac{3\pi}{8})(X+2\cos\frac{3\pi}{8})$.

$P_4=X^4-4X^2+2=(X-\sqrt{2+\sqrt{2}})(X+\sqrt{2+\sqrt{2}})(X-\sqrt{2-\sqrt{2}})(X+\sqrt{2-\sqrt{2}})$.

R.

Question 2 HEC 2011

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la variable alétoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

On pose $Y_n = \text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Étudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Cours *Théorème de d'Alembert-Gauss*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n.

Y_n prend ses valeurs dans $[0,1]$. Ainsi $\forall x\in]-\infty,0[$, $F_{Y_n}(x)=0$ et

$\forall x\in [1,+\infty[$, $F_{Y_n}(x)=1$.

Soit $x\in[0,1[$, $F_{Y_n}(x) = P(Y_n\leqslant x) = P(\text{Max}(X_1,X_2,\ldots,X_n)\leqslant x)$.

$F_{Y_n}(x) = P(\{X_1\leqslant x\}\cap\{X_2\leqslant x\}\cap\ldots\cap\{X_n\leqslant x\}) = P(X_1\leqslant x)\,P(X_2\leqslant x)\ldots P(X_n\leqslant x)$.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes

Or $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $P(X_k\leqslant x) = x$ car $x\in[0,1[$ et X_k suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Donc $F_{Y_n}(x) = x^n$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ x^n & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ 0 & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in]-\infty,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}.$$

Soit Y la variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ constante égale à 1. Soit F_Y sa fonction répartition. $\forall x\in\mathbb{R}$, $$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in]-\infty,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}.$$

Si $x\in\mathbb{R}$, F_Y est continue en x si et seulement si $x\neq 1$.

De plus $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x)$.

Alors <u>$(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y c'est à dire vers la variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ constante et égale à 1.</u>

R.

Question 3 HEC 2011 S 1155

Soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

On suppose que l'espérance $\theta = E(X_1)$ est non nulle et inconnue.

Trouver l'estimateur sans biais de l'espérance $\theta = E(X_1)$, qui soit de variance minimale dans l'ensemble des estimateurs de la forme $\tilde{\theta_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad ((a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Cours *Rappel de la définition d'un espace vectoriel euclidien*

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i)$ existe et vaut θ.

Alors $E(T_n)$ existe et vaut $\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$ donc $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\theta$

Alors T_n est un estimateur sans biais de θ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ car $\theta \neq 0$

Posons $\sigma^2 = V(X_1)$ ($V(X_1)$ existe car X_1 possède un moment d'ordre 2.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une variance.

Alors $V(T_n)$ existe et $V(T_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

__1er cas..__ $\sigma^2 = 0$. $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = 0$!

Notons $\mathcal{S} = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \; ; \; (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$.

__Les estimateurs sans biais, de variance minimale, qui appartiennent à $\mathcal{S}$ sont les éléments $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ de $\mathcal{S}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.__

__2e cas..__ $\sigma^2 \neq 0$

Le problème revient à trouver $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

2) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\sigma^2$ soit minimal ce qui revient à $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ minimal.

On doit donc étudier $\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ \text{sc } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \end{cases}$

* Posons $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Posons $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$. g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Posons $\mathcal{C} = \{A \in \mathbb{R}^n ; g(A) = 1\}$.

Il s'agit donc de trouver le minimum de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Posons $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} g$. $\mathcal{H}^{\perp} = \operatorname{Vect}(\nabla g(x)) = \operatorname{Vect}((1, 1, \dots, 1))$.

x quelconque dans $\mathbb{R}^n$

* Soit $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$ et $\nabla f(B) \in \mathcal{H}^{\perp} = \operatorname{Vect}(1, 1, \dots, 1)$. $\nabla f(B) = (2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n)$.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $(2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n) = \nabla f(B) = \lambda (1, 1, \dots, 1)$.

Donc $2b_1 = 2b_2 = \dots = 2b_n = \lambda$. $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Alors $n b_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$. $b_1 = \frac{1}{n}$. Ainsi $B = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

* Posons $B = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

Clairement $\underline{B \in \mathcal{C}}$. Soit $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{C}$.

$$1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \times a_i\right)^2 \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = n\, f(A).$$

Alors $f(A) \geq \frac{1}{n}$.

Mieux $f(A) \geq f(B)$.

Alors $\underline{\forall A \in B,\ f(A) \geq f(B)}$.

f atteint un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.

et $B = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ est l'unique point de $\mathcal{C}$ qui réalise ce minimum.

R.

Alors $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$ est l'unique estimateur sans biais de variance minimal parmi les estimateurs sans biais de θ du type $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$.

lorsque $\sigma^2 = V(X_1) \neq 0$.

R

Question 4 **HEC 2011**

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

Q1. Déterminer les noyaux de Φ, $\Phi\circ\Phi$ et Φ^k pour $k \in [\![3,+\infty[\![$?

Q2. Quelle l'image de Φ.

Cours *Définition d'un estimateur sans biais et convergent d'un paramètre réel inconnu.*

Q1 $*$ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de E.

$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \operatorname{Ker}\phi \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=0 \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n$.

$(u_n)_{n\geqslant 0} \in \operatorname{Ker}\phi \iff (u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.

<u>$\operatorname{Ker}\phi$ est le sous-espace vectoriel constitué par les suites constantes de E.</u>

<u>$\operatorname{Ker}\phi$ est encore la droite vectorielle engendrée par la suite constante égale à 1.</u>

<u>Remarque</u>.. $\operatorname{Ker}\phi = \{(P(n))_{n\geqslant 0}\ ;\ P\in\mathbb{R}_0[X]\}$.

$*$ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$. $\phi((u_n)_{n\geqslant 0}) = (u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$

$\phi^2((u_n)_{n\geqslant 0}) = \phi((u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}) = ((u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n))_{n\geqslant 0} = (u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)_{n\geqslant 0}$.

$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\operatorname{Ker}\phi^2 \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0$.

L'équation $x\in\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ et $x^2-2x+1=0$ admet une solution et une seule 1.

Le cours indique alors que : $(u_n)_{n\geqslant 0}\in\operatorname{Ker}\phi^2 \iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha+\beta n$.

<u>$\operatorname{Ker}\phi^2 = \{(u_n)_{n\geqslant 0}\in E \mid \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha+\beta n\}$.</u>

<u>$\operatorname{Ker}\phi^2 = \operatorname{Vect}((1)_{n\geqslant 0}, (n)_{n\geqslant 0})$.</u>

<u>Remarque</u>.. <u>$\operatorname{Ker}\phi^2 = \{(P(n))_{n\geqslant 0}\ ;\ P\in\mathbb{R}_1[X]\}$.</u>

R

---

* Montrons par récurrence que pour tout $\ell \in [\![1,+\infty[\![$, $\operatorname{Ker}\phi^{\ell} = \{(P(n))_{n\geq 0} \,;\, P\in \mathbb{R}_{\ell-1}[X]\}$

→ la propriété est vraie pour $\ell = 1$ (et 2 !) d'après ce qui précède.

→ Supposons la propriété vraie pour ℓ dans $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $\ell+1$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de E.

$(u_n)_{n\geq0} \in \operatorname{Ker}\phi^{\ell+1}$

$\Updownarrow$ $\phi^{\ell+1}((u_n)_{n\geq 0}) = 0_E$

$\Updownarrow$ $\phi^{\ell}(\phi((u_n)_{n\geq0})) = 0_E$

$\Updownarrow$ $\phi((u_n)_{n\geq 0}) \in \operatorname{Ker}\phi^{\ell}$

$\Updownarrow$ $\exists \varphi \in \mathbb{R}_{\ell-1}[X],\ \phi((u_n)_{n\geq 0}) = (\varphi(n))_{n\geq 0}$

$\Updownarrow$ $\exists \varphi\in \mathbb{R}_{\ell-1}[X],\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n = \varphi(n)$.

<u>Lemme</u>.. $\forall \varphi \in \mathbb{R}_{\ell-1}[X],\ \exists P\in \mathbb{R}_{\ell}[X],\ P(X+1)-P(X) = \varphi(X)$.

▲ <u>Preuve du lemme</u>. Posons $\forall U\in \mathbb{R}[X]$, $\Delta U = U(X+1)-U(X)$.

. Δ est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(U,V)\in \mathbb{R}[X]$.

$\Delta(\lambda U+V) = (\lambda U+V)(X+1)-(\lambda U+V)(X) = \lambda U(X+1)+V(X+1)-\lambda U(X)-V(X)$.

$\Delta(\lambda U+V) = \lambda\,(U(X+1)-U(X)) + V(X+1)-V(X) = \lambda\Delta U+\Delta V$.

Δ est linéaire.

Alors <u>Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$</u>.

$\Delta(\mathbb{R}_\ell[X]) = \Delta(\operatorname{Vect}(1,X,\dots,X^\ell)) = \operatorname{Vect}(\Delta 1,\Delta X,\dots,\Delta X^\ell) \overset{\Delta 1 = 0}{=} \operatorname{Vect}(\Delta X,\Delta X^2,\dots,\Delta X^\ell)$.

$\forall i\in[\![1,\ell]\!],\ \Delta X^i = (X+1)^i - X^i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}X^j - X^i = \sum_{j=0}^{i-1}\binom{i}{j}X^j$.

Alors $\forall i\in[\![1,\ell]\!]$, $\deg \Delta X^i = i-1$.

Alors $(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^k)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de cardinal k de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ qui est de dimension k.

$(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^k)$ est donc une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Alors $\Delta \mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Alors $\forall Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_k[X], \Delta P = Q$. Ou encore :

$\forall Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_k[X], P(X+1) - P(X) = Q$. Ceci achève la preuve du lemme. ▲

$(u_n)_{n \geq 0} \in \mathrm{Ker}\, \phi^{k+1}$

$\Updownarrow$ $\exists Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = Q(n)$

$\Updownarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = P(n+1) - P(n)$ — lemme ; si $P \in \mathbb{R}_k[X]$, $P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$

$\Updownarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - P(n+1)) - (u_n - P(n)) = 0$

$\Updownarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \phi\left((u_n - P(n))_{n \geq 0}\right) = 0_E$

$\Updownarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n - P(n) = \lambda$.

$\Updownarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = P(n) + \lambda = (P + \lambda)(n)$

$\Updownarrow$ $\exists \hat{P} \in \mathbb{R}_k[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \hat{P}(n)$

Ainsi $\mathrm{Ker}\, \phi^{k+1} = \{\hat{P}(n) ; \hat{P} \in \mathbb{R}_k[X]\}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Ker}\, \phi^k = \{\hat{P}(n) ; P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Ker}\, \phi^k = \{(u_n)_{n \geq 0} \in E \mid \exists (a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_0 + a_1 n + \dots + a_{k-1} n^{k-1}\}$

Exercice.. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\left((1)_{n \geq 0}, (n)_{n \geq 0}, \dots, (n^{k-1})_{n \geq 0}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, \phi^k$.

R.

Q2 <u>Une petite analyse.</u> Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ un élément de E.

supposons que $(v_n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathrm{Im}\,\phi$. Alors $\exists (u_n)_{n\geq 0}\in E$, $\phi((v_n)_{n\geq 0})=(u_n)_{n\geq 0}$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=v_n$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(u_n-u_0)+u_0=\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)+u_0=\sum_{k=0}^{n-1}v_k+u_0$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum_{k=0}^{n-1}v_k+u_0$.

Plus trop de doute il semble bien que tout élément de E possède au moins un antécédent par ϕ donc que $\mathrm{Im}\,\phi=E$. Naturelle.

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ un élément de E. Posons $u_0=0$ (ou c avec $c\in\mathbb{R}$!!) et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum_{k=0}^{n-1}v_k$ (ou $\sum_{k=0}^{n-1}v_k+c$ ...).

1) $(u_n)_{n\geq 0}\in E$.

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{n}v_k-\sum_{k=0}^{n-1}v_k=v_n$.

$u_1-u_0=\sum_{k=0}^{1-1}v_k-0=v_0$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=v_n$. $\phi((u_n)_{n\geq 0})=(v_n)_{n\geq 0}$.

Ainsi $\forall (v_n)_{n\geq 0}\in E$, $\exists (u_n)_{n\geq 0}\in E$, $\phi((u_n)_{n\geq 0})=(v_n)_{n\geq 0}$.

<u>ϕ est surjective et $\mathrm{Im}\,\phi=E$.</u>

R.

Question 5 HEC 2011 S 1163

Un joueur effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité p et face avec la probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0,1[$.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit la variable aléatoire N égale au rang d'apparition du premier Pile s'il existe et égale à 0 si Pile n'apparaît jamais

On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :

Si N prend la valeur 0, X prend la valeur 0.

Si n appartient à $\mathbb{N}^*$ et si N prend la valeur n, le joueur dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n ; il tire une boule de cette urne et X prend la valeur de la boule tirée.

Q1. Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $P(X = k)$ sous forme de somme.

Q2. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{p}{q} \lim\limits_{M \to +\infty} \displaystyle\int_0^q \sum_{n=k}^{M} t^{n-1}\, dt$.

Q3 Étudier la limite de $\displaystyle\int_0^q \frac{t^M}{1-t}\, dt$ lorsque M tend vers $+\infty$. Déterminer $P(X = 1)$.

Cours *Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ $(n \geqslant 2)$. Donner un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.*

Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ notons P_i (resp. F_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (resp. face).

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $P(N=n) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n) \underset{\text{indépendance des lancers}}{=} P(F_1)P(F_2)\dots P(F_{n-1})P(P_n) = q^{n-1}p$.

$P(N=1) = P(P_1) = p = q^{1-1}p$.

Alors $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N=n) = q^{n-1}p = p\,q^{n-1}}$.

Calculons $P(N=0)$.

V1 $P(N=0) = 1 - P(N \neq 0) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{N=n\}\right) \overset{\text{incompatibilité}}{=} 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p\,q^{n-1}$

$P(N=0) = 1 - p\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 - p\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 - p \times \frac{1}{1-q} = 1 - \frac{p}{p} = 1 - 1 = 0$.

V2 Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$.

$\{N=0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} \subset S_n$.

Le théorème de la limite monotone montre alors que $P(N=0) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(S_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) = P(F_1)P(F_2)\cdots P(F_n) = q^n$.

Donc $P(N=0) = \lim P(S_n) = \lim q^n \underset{\substack{\uparrow \\ |q|<1}}{=} 0$. $P(N=0)=0$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N},\ P(N=n) = \begin{cases} p q^{n-1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } n=0 \end{cases}$.

Q1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(\{N=n\})_{n\geq 0}$ est un système complet d'événements.

$P(X=k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{N=n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{N=n\})$

$\{X=k\} \cap \{N=0\} = \emptyset$ car $k \in \mathbb{N}^*$

$P(X=k) = \displaystyle\sum_{n} P_{\{N=n\}}(X=k)\, P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} p q^{n-1}$.

$P(N=n) \neq 0$ si $n \geq 1$ $\qquad P_{\{N=n\}}(X=k) = \begin{cases} 1/n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{q^n}{n}$. Remarque.- $P(X=0)=0$ car $\{X=0\}=\{N=0\}$

Q2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$\forall m \in [\![k,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{n=k}^{m} \frac{q^n}{n} = \sum_{n=k}^{m} \int_0^q t^{n-1}\,dt = \int_0^q \sum_{n=k}^{m} t^{n-1}\,dt$.

Alors $P(X=k) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{q^n}{n} = \frac{p}{q} \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=k}^{m} \frac{q^n}{n}$.

$P(X=k) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^q \sum_{n=k}^{m} t^{n-1}\,dt$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}^*$

Q3 Soit $m \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,q],\ 0 < 1-q \leq 1-t$.

$\forall t \in [0,q],\ 0 \leq \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-q}$ et $t^m \geq 0$.

$\forall t \in [0,q],\ 0 \leq \dfrac{t^m}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-q} t^m$.

R.

En intégrant on obtient $0 \leq \int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{1-q}\int_0^q t^n\,dt$ car $q \geq 0$.

donc $0 \leq \int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{1-q}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^q = \frac{1}{1-q}\,\frac{q^{n+1}}{n+1} \underset{q\in]0,1[}{\leq} \frac{1}{1-q}\times\frac{1}{n+1}$.

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-q}\times\frac{1}{n+1}\right)=0$. Par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$P(X=k) = \frac{p}{q}\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \sum_{n=k}^{n} t^{n-1}\,dt \underset{\uparrow}{=} \frac{p}{q}\lim_{n\to+\infty}\int_0^q t^{k-1}\frac{1-t^{n-(k-1)}}{1-t}\,dt$.

$t\in[0,q],\ t\neq 1$

$P(X=k) = \frac{p}{q}\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt - \int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt\right) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt$.

$\uparrow \lim_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt$.

En particulier $P(X=1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{dt}{1-t} = \frac{p}{q}\left[-\ln|1-t|\right]_0^q = -\frac{p}{q}\ln|1-q| = -\frac{p}{q}\ln p$.

$P(X=1) = -\frac{p}{q}\ln p$.

<u>Remarque</u>.. Soit $k\in[\![2,+\infty[\![$. $\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt \overset{u=1-t}{=} \int_1^{1-q}\frac{(1-u)^{k-1}}{u}(-du) = \int_p^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{u}\,du$.

$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = \int_p^1 \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{(-u)^i}{u}\,du = \int_p^1 \frac{1}{u}\,du + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^i\int_p^1 u^{i-1}\,du$.

$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = -\ln p + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^i}{i}(1-p^i)$

donc $P(X=k) = -\frac{p}{q}\ln p + \frac{p}{q}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^i}{i}(1-p^i)$

ou encore ...

R.

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = \int_0^q \frac{t^{k-1}-1}{1-t}\,dt + \int_0^q \frac{dt}{1-t}$$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = -\int_0^q (t^{k-2}+t^{k-3}+\cdots+t+1)\,dt + \Big[-\ln|1-t|\Big]_0^q$$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = -\left[\frac{t^{k-1}}{k-1}+\frac{t^{k-2}}{k-2}+\cdots+\frac{t^2}{2}+t\right]_0^q - \ln p = -\sum_{i=1}^{k-1}\frac{q^i}{i} - \ln p$$

Donc $$\underline{\underline{P(X=k) = \frac{p}{q}\left[-\ln p - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{q^i}{i}\right].}}$$

Question 6 HEC 2011

On considère une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \mathrm{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Prouver que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers θ.

Q2. Étudier la convergence en loi de $Y_n = n(\theta - X_n)$.

Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies.

(Q1) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(|X_n-\theta| \geqslant \varepsilon) = P(X_n - \theta \geqslant \varepsilon) + P(X_n - \theta \leqslant -\varepsilon) = P(X_n \geqslant \theta+\varepsilon) + P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon)$

X_n prend ses valeurs dans $[0, \theta]$ donc $P(X_n \geqslant \theta+\varepsilon) = 0$.

$P(X_n \leqslant \theta-\varepsilon) = P(\mathrm{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n) \leqslant \theta - \varepsilon) = P(\{U_1 \leqslant \theta-\varepsilon\} \cap \{U_2 \leqslant \theta-\varepsilon\} \cap \cdots \cap \{U_n \leqslant \theta-\varepsilon\})$

Par indépendance on obtient : $P(X_n \leqslant \theta-\varepsilon) = P(U_1 \leqslant \theta-\varepsilon)\, P(U_2 \leqslant \theta-\varepsilon) \cdots P(U_n \leqslant \theta-\varepsilon)$.

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ ayant même loi il vient : $P(X_n \leqslant \theta-\varepsilon) = (P(U_1 \leqslant \theta-\varepsilon))^n$.

<u>$P(|X_n-\theta| \geqslant \varepsilon) = (P(U_1 \leqslant \theta-\varepsilon))^n$.</u>

<u>1er cas</u>.. $\theta - \varepsilon < 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0^n = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n-\theta| \geqslant \varepsilon) = 0$!

<u>2e cas</u>.. $\theta-\varepsilon \geqslant 0$. Alors $\theta - \varepsilon \in [0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n-\theta| \geqslant \varepsilon) = (P(U_1 \leqslant \theta-\varepsilon))^n = \left(\dfrac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n$

Or $1 - \dfrac{\varepsilon}{\theta} \in [0, 1[$ (car $0 < \dfrac{\varepsilon}{\theta} \leqslant 1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n-\theta| \geqslant \varepsilon) = 0$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$. <u>$(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.</u>

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de Y_n.

Y_n prend ses valeurs dans $[0, n\theta]$. Alors $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_n(x) = 0$ et $\forall x \in [n\theta, +\infty[$, $F_n(x) = 1$.

Soit $x \in [0, n\theta[$. $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(n(\theta - X_n) \leq x) = P(\theta - X_n \leq \frac{x}{n}) = P(\theta - \frac{x}{n} \leq X_n)$.

$F_n(x) = 1 - P(X_n < \theta - \frac{x}{n}) = 1 - P(\{U_1 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \{U_2 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \dots \cap \{U_n < \theta - \frac{x}{n}\})$.

Par indépendance de $U_1, U_2, \dots, U_n$ il vient : $F_n(x) = 1 - P(U_1 < \theta - \frac{x}{n}) P(U_2 < \theta - \frac{x}{n}) \dots P(U_n < \theta - \frac{x}{n})$.

Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{U}([0,\theta])$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(U_k < \theta - \frac{x}{n}) = P(U_k \leq \theta - \frac{x}{n}) = \dfrac{\theta - \frac{x}{n} - 0}{\theta - 0} = 1 - \dfrac{x}{n\theta}$

Alors $F_n(x) = 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n & \text{si } x \in [0, n\theta[\\ 1 & \text{si } x \in [n\theta, +\infty[. \end{cases}$$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(0) = 0$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Posons $n_0 = \mathrm{Ent}(\frac{x}{\theta}) + 1$. $n_0 > \frac{x}{\theta}$; $x < n_0\theta$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n \geqslant n_0$! $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n\theta \geqslant n_0\theta > x$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $F_n(x) = 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n \underset{\underset{1 - \frac{x}{n\theta} > 0}{\uparrow}}{=} 1 - e^{n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})}$.

$n \ln(1 - \frac{x}{n\theta}) \underset{n \to +\infty}{\sim} n(-\frac{x}{n\theta}) = -\frac{x}{\theta}$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})) = -\frac{x}{\theta}$. Par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{x}{\theta}$ il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})} = e^{-\frac{x}{\theta}}$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} & \end{cases} \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-x/\theta} & \text{si } x \in \underline{\underline{[}}0, +\infty[\end{cases}$$

Ainsi $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.

R.

Question 7 **HEC 2011**

Dans cet exercice E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et p, n sont deux entiers strictement positifs.

Q1. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et x un vecteur de E.

Caractériser ne le justifiant le fait que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ soit liée.

Q2. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E supposés non tous nuls.

On note $\mathcal{A} = \{J \subset [\![1, n]\!] \mid (x_i)_{i \in J} \text{ est libre}\}$.

Soit J_0 un élément de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal. Que peut-on dire de $(x_i)_{i \in J_0}$ vis à vis de $\text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?

Q3. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et r le rang de cette famille. On en extrait une famille de n' vecteurs et on note r' le rang de cette famille extraite. Montrer que $n - r \geqslant n' - r'$

Cours *X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition de X et en donner les principales propriétés.*

Q1 Montrons que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ est liée si et seulement si x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

→ La condition est clairement suffisante.

→ Montrons qu'elle est nécessaire. Supposons que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ est liée.

$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) \neq 0_{\mathbb{K}^{p+1}}$ et $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k + \alpha_{p+1} x = 0_E$.

Supposons $\alpha_{p+1} = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E$. Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est libre, on a :

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$. Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = 0$. Donc $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) = 0_{\mathbb{K}^{p+1}}$!!

Par conséquent α_{p+1} n'est pas nul et $x = -\frac{1}{\alpha_{p+1}} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{p} \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_{p+1}}\right) e_k$

Donc x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

Q2 Montrons que $(x_i)_{i \in J_0}$ est une base de $\text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- $(x_i)_{i \in J_0}$ est une famille libre de $\text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Montrons que $(x_i)_{i \in J_0}$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Il suffit de montrer que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $(x_i)_{i \in J_0}$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si $k \in J_0$, x_k est combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in J_0}$.

Supposons que $k \notin J_0$. Alors $\operatorname{card} J_0 \cup \{k\} > \operatorname{card} J_0$.

Alors la famille "$(x_i)_{i\in J_0} \cup (x_k)$" est liée par définition de J_0.

Comme $(x_i)_{i\in J_0}$ est libre, Q1 permet de dire que x_k est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_i)_{i\in J_0}$.

Ainsi $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in \operatorname{Vect}((x_i)_{i\in J_0})$. Alors $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \operatorname{Vect}((x_i)_{i\in J_0})$.

L'inclusion inverse étant claire, on a : $\operatorname{Vect}((x_i)_{i\in J_0}) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$(x_i)_{i\in J_0}$ est une famille libre et génératrice de $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

donc $\underline{\underline{(x_i)_{i\in J_0} \text{ est une base de } \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n).}}$

Q3 Posons $F = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $\dim F = r$ car la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est de rang r.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de n' vecteurs extraite de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et qui a pour rang r'. Si $n = n'$: $r = r'$ et le résultat est clair. Nous supposerons $n > n'$.

<u>1er cas</u>.. $r' = 0$. Alors $\forall i \in I$, $x_i = 0_E$. $F = \operatorname{Vect}\left((x_i)_{i\in [\![1,n]\!] - I}\right)$.

Donc $r = \dim F \leq \operatorname{card}([\![1,n]\!] - I) = n - n'$. Alors $n - r \geq n' = n' - r'$.

<u>2ième cas</u>.. $r' = n'$. Alors $n' - r' = 0$. Comme $n \geq r$: $n - r \geq 0 = n' - r'$

<u>3ième cas</u>.. $0 < r' < n'$. Soit $\mathcal{E} = \{J \subset I \mid (x_i)_{i\in J} \text{ libre}\}$

Soit J_0 un élément de $\mathcal{E}$ de cardinal maximal. D'après ce qui précède $(x_i)_{i\in J_0}$ est une base de $\operatorname{Vect}((x_i)_{i\in I})$ qui est de dimension r'.

Alors $\operatorname{card} J_0 = r'$. Les vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I - J_0}$ sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $(x_i)_{i\in J_0}$.

Alors $F=\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est encore engendré par la concaténée des familles $(x_i)_{i\in J_0}$ et $(x_i)_{i\in [\![1,n]\!]-I}$. Cette famille a pour cardinal $r'+n-n'$

donc $r'+n-n' \geqslant \dim F = r$. Alors $n-r \geqslant n'-r'$.

Dans tous les cas $\underline{\underline{n-r \geqslant n'-r'}}$.

R.

Question 8 **HEC 2011** **S 108**

Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Q1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

Q2. On suppose de plus que pour tout x dans E, $< u(x), x >= 0$.

Montrer que $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), y >= - < u(y), x >$. Que peut-on-dire de u ?

Cours *X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition F de X et en donner des propriétés.*

Q1 Il existe une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure.

Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $u(e_k)$ est combinaison linéaire de $e_1,e_2,\dots,e_k$.

mieux : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $u(\text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)) = \text{Vect}(u(e_1),u(e_2),\dots,u(e_k)) \subset \text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)$.

Le cours sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt montre qu'il existe une base $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ de E, orthonormée et telle que :

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\text{Vect}(e'_1,e'_2,\dots,e'_k)=\text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)$ et $<e'_k,e_k> \geq 0$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $e'_k \in \text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)$ donc $u(e'_k)\in u(\text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k))\subset\text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)$.

Alors $u(e'_k)\in\text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)=\text{Vect}(e'_1,e'_2,\dots,e'_k)$.

Donc pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $u(e'_k)$ est combinaison linéaire de $e'_1,e'_2,\dots,e'_k$.

Cela signifie que $M_{\mathcal{B}'}(u)$ est triangulaire supérieure.

<u>Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ soit triangulaire supérieure.</u>

Q2 Soit $(x,y)\in E^2$. Alors $<u(x+y),x+y>=0$.

$$0=<u(x+y),x+y>=<u(x)+u(y),x+y>=\underbrace{<u(x),x>}_{=0}+<u(x),y>+<u(y),x>+\underbrace{<u(y),y>}_{=0}.$$

Ainsi <u>$<u(x),y>=-<u(y),x>$ et ceci pour tout $(x,y)\in E^2$.</u>

<u>Remarque</u>.. u est antisymétrique.

R.

Posons $A' = M_{B'}(u) = (a'_{ij})$. Montrons que A' est antisymétrique.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $u(e'_i) = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki}\, e'_k$

$$\langle u(e'_i), e'_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki} \underbrace{\langle e'_k, e'_j \rangle}_{= \begin{cases} 1 \text{ si } k=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}} = a_{ji} \text{. De même } \langle u(e'_j), e'_i \rangle = a_{ij} \text{.}$$

Or $\langle u(e'_i), e'_j \rangle = -\langle u(e'_j), e'_i \rangle$.

Donc $a_{ji} = -a_{ij}$ et ceci pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

${}^tA' = -A'$. A' est antisymétrique.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a'_{ii} = -a'_{ii}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a'_{ii} = 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

1er cas... $i > j$. Alors $a'_{ij} = 0$ car A' est triangulaire supérieure.

2e cas... $i < j$ Alors $a'_{ji} = 0$ toujours parce que A' est triangulaire supérieure.

Ainsi $a'_{ij} = -a'_{ji} = 0$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a'_{ij} = 0$.

Finalement $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a'_{ij} = 0$. $A' = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Alors u est l'endomorphisme nul.

R.

Question 9 **HEC 2011** **S 109**

Soit f une endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres. Démontrer que f est diagonalisable.

Cours *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Estimateur sans biais, convergent*

1er cas.. f n'est pas injectif. Alors 0 est valeur propre de f.

Donc f possède trois valeurs propres distinctes et f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3. Alors f est diagonalisable.

2ème cas.. f est injectif. Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et que $\dim \mathbb{R}^3 < +\infty$: f est bijectif.

$f^4 = f^2$ donne en composant deux fois par f^{-1} : $f^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$, ou : $f^2 - Id_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

$X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont -1 et 1. Alors $Sp\, f \subset \{-1, 1\}$.

Comme -1 et 1 sont deux valeurs propres de f : $Sp\, f = \{-1, 1\}$. (1)

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $f^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$ donc f est une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Alors $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^3}) = SEP(f, 1) \oplus SEP(f, -1)$ (2)

(1) et (2) montrent que f est diagonalisable.

R.

Question 10 **HEC 2011** **S 112**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

Q1. Montrer que A admet une seule valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer le sous-espace propre associé à λ.

Q3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cours *Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2-2 & 6-2 & -6+2 \\ -3+1 & -2+1 & 2 \\ 3-1 & 2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2A. \quad \underline{\underline{A^2 + I_3 = 2A}} \ !$$

Q1 $A^2 - 2A + I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de A dont le seul zéro est 1 dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}} A \subset \{1\}$

V1 Or A admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

Ainsi 1 est la seule valeur propre de A.

V2 $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$. Supposons que 1 n'est pas valeur propre de A. Alors $A - I_3$ est inversible. Donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = (A - I_3)^2$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles !

Cette contradiction montre que $1 \in Sp_{\mathbb{R}} A$.

Ainsi <u>1 est la seule valeur propre de A</u>

Supposons que A soit diagonalisable. Alors $SEP(A,1) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc $3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A,1) = 3 - rg(A - I_3)$; $rg(A - I_3) = 0$.

Alors $A - I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $A = I_3$!!

Donc <u>A n'est pas diagonalisable</u>.

R.

Q2 Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX=X \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y-2z=x\\-x+z=y\\x+y=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(x+y-z)=0\\-x-y+z=0\\x+y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow x+y-z=0.$$

SEP(A,1) est le plan vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x+y-z=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$SEP(A,1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de cardinal 2 de SEP(A,1) qui est de dimension 2.

Alors $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de SEP(A,1).

Q3 Posons $E=\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E=\mathbb{R}^3$. Posons $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.
Pour montrer que B est semblable à A il suffit de montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)=B$.

→ Analyse.. Supposons que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ soit une base de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)=B$.

Alors $f(e'_1)=e'_1$, $f(e'_2)=e'_2$ et $f(e'_3)=e'_2+e'_3$.

Donc $e'_1\in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$, $e'_2\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$, $e'_2=(f-\mathrm{Id}_E)(e'_3)\in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$.

Ainsi $e'_1\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$, $e'_2\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $e'_2=(f-\mathrm{Id}_E)(e'_3)$.

→ Synthèse, $\quad \mathrm{Sp}\, f=\mathrm{Sp}\, A=\{1\}$. Comme $SEP(A,1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$;

$SEP(f,1)=\mathrm{Vect}(e_1+e_3,e_2+e_3)$.

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f-\mathrm{Id}_E)=A-I_3=\begin{pmatrix}2&2&-2\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(2e_1-e_2+e_3,\ 2e_1-e_2+e_3,\ -2e_1+e_2-e_3)$

$\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(2e_1-e_2+e_3)$. Remarquons que $2e_1-e_2+e_3=2(e_1+e_3)-(e_2+e_3)\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$.

Posons alors $e'_2=2e_1-e_2+e_3$. Notons que $e'_2=(f-\mathrm{Id}_E)(e_1)$. Posons alors $e'_3=e_1$

Posons enfin $e'_1 = e_1 + e_3$.

$e'_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ donc $\underline{f(e'_1) = e'_1}$.

$e'_2 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ donc $\underline{f(e'_2) = e'_2}$.

$e'_2 = (f - \mathrm{Id}_E)(e_1) = (f - \mathrm{Id}_E)(e'_3)$; $\underline{f(e'_3) = e'_2 + e'_3}$.

Montrons alors que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E. Comme le cardinal de $\mathcal{B}'$ coïncide avec la dimension de E il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0_E$.

$\alpha(e_1 + e_3) + \beta(2e_1 - e_2 + e_3) + \gamma e_1 = 0_E$

$(\alpha + 2\beta + \gamma) e_1 - \beta e_2 + (\alpha + \beta) e_3 = 0_E$. Comme (e_1, e_2, e_3) est libre :

$\alpha + 2\beta + \gamma = -\beta = \alpha + \beta = 0$. Alors $\beta = 0$, $\alpha = 0$ et $\gamma = 0$.

ceci achève de montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. De plus $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

$M_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$ donc <u>A et B sont semblables</u>.

<u>Remarque</u>.. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$B = M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P = P^{-1} A P$. $\underline{B = P^{-1}AP}$

<u>Exercice 1</u>.. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

<u>Exercice 2</u>.. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

R.

Question 11 **S 113** On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

Q1 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(S_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire N_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_k et dont la loi est donnée par :

$N_n(\Omega) = \{n, n+1\}$ et $P(N_n = n) = P(N_n = n+1) = \dfrac{1}{2}\cdot$

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)}$.

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(T_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Cours *Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement le même rang ?*

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ ou $X_k \hookrightarrow \Gamma(1,1)$ ou $X_k \hookrightarrow \gamma(1)$.

Le cours montre alors que : $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \Gamma(1,n)$ ou $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Donc S_n suit la loi gamma de paramètres 1 et n ou la loi gamma de paramètre n.

b) $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, ayant même loi, d'espérance 1 et de variance 1.

Le théorème de la limite centrée montre alors que $\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Soit ϕ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leqslant x\right) = \phi(x)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

$S_n \hookrightarrow \Gamma(1,n)$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 1\right) = \phi(1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n + \sqrt{n}) = \phi(1)$.

R.

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geq n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} P(S_n > n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} (1 - P(S_n \leq n+\sqrt{n})) = 1-\phi(1)$$

S_n est à densité.

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geq n+\sqrt{n}) = 1-\phi(1) = \phi(-1) \simeq 0,1587$$

(Q2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F_{T_n} la fonction de répartition de T_n. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(\{N_n = n\}, \{N_n = n+1\})$ est un système complet d'événements

Alors $P(T_n \leq x) = P(\{T_n \leq x\} \cap \{N_n = n\}) + P(\{T_n \leq x\} \cap \{N_n = n+1\})$

$P(T_n \leq x) = P(\{S_n \leq x\} \cap \{N_n = n\}) + P(\{S_{n+1} \leq x\} \cap \{N_n = n+1\})$.

$X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ et N_n sont indépendantes donc S_n et N_n (resp. S_{n+1} et N_n) sont indépendantes.

Alors $F_{T_n}(x) = P(T_n \leq x) = P(S_n \leq x) P(N_n = n) + P(S_{n+1} \leq x) P(N_n = n+1)$.

$$F_{T_n}(x) = \frac{1}{2}\left[P(S_n \leq x) + P(S_{n+1} \leq x)\right].$$

Notons F_n et F_{n+1} les fonctions de répartition de S_n et S_{n+1}.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \frac{1}{2}\left[F_{S_n}(x) + F_{S_{n+1}}(x)\right].$

F_{S_n} et $F_{S_{n+1}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{S_{n+1}}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} x^{n}}{n!} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

f_{S_n} (resp. $f_{S_{n+1}}$) est une densité continue sur $\mathbb{R}^*$ de S_n (resp. S_{n+1}). Alors F_{S_n} (resp. $F_{S_{n+1}}$) est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

de plus $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{S_n}(x) = f_{S_n}(x)$ et $F'_{S_{n+1}}(x) = f_{S_{n+1}}(x)$.

$F_{T_n} = \frac{1}{2}[F_{S_n} + F_{S_{n+1}}]$.

Alors F_{T_n} est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

ceci achève de montrer que T_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{T_n}(x) = \frac{1}{2}(F'_{S_n}(x) + F'_{S_{n+1}}(x)) = \frac{1}{2}(f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x))$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{T_n}(x) = \frac{1}{2}(f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x))$.

g_{T_n} est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{T_n} sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors g_{T_n} est une densité de T_n.

$E(S_n)$ (resp. $E(S_{n+1})$) existe et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_n}(t)\,dt$ (resp. $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_{n+1}}(t)\,dt$) converge et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t\left(\frac{1}{2}(f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t))\right)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}(n+(n+1))$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_{T_n}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

$E(T_n)$ existe et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

S_n et S_{n+1} possèdent un moment d'ordre 2 donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t)\,dt$ convergent.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{1}{2}(f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t))\right)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t)\,dt$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g_{T_n}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}(E(S_n^2) + E(S_{n+1}^2))$.

R.

Alors T_n possède un moment d'ordre 2 qui vaut $\frac{1}{2}\left[E(S_n^2)+E(S_{n+1}^2)\right]$

Ainsi <u>T_n possède une variance</u>.

$V(T_n)=E(T_n^2)-(E(T_n))^2=\frac{1}{2}\left[E(S_n^2)+E(S_{n+1}^2)\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$

$V(T_n)=\frac{1}{2}\left[V(S_n)+(E(S_n))^2+V(S_{n+1})+(E(S_{n+1}))^2\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2.$

$V(T_n)=\frac{1}{2}\left[n+n^2+(n+1)+(n+1)^2\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$

$V(T_n)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1+(n+1))-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2=(n+1)^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=\left(n+1+n+\frac{1}{2}\right)\left(n+1-n-\frac{1}{2}\right).$

$V(T_n)=(2n+3/2)(1/2)=n+\frac{3}{4}.$

$$\underline{\underline{V(T_n)=n+\frac{3}{4}.}}$$

T_n est une variable aléatoire à densité.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-P(T_n<n+\sqrt{n})=1-P(T_n\leq n+\sqrt{n})$

$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-F_{T_n}(n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}\left[F_{S_n}(n+\sqrt{n})+F_{S_{n+1}}(n+\sqrt{n})\right]$

$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}P(S_n\leq n+\sqrt{n})-\frac{1}{2}P(S_{n+1}\leq n+\sqrt{n}).$

$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}P(S_n^*\leq 1)-\frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{n+\sqrt{n}-(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{2}P(S_n^*\leq 1)-\frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)$

↑

$$\begin{cases} S_n^*=\dfrac{S_n-n}{\sqrt{n}} \\ S_{n+1}^*=\dfrac{S_{n+1}-(n+1)}{\sqrt{n+1}} \end{cases}$$

Rappelons que $\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}P(S_n^*\leq x)=\lim_{n\to+\infty}P(S_{n+1}^*\leq x)=\phi(x).$

Alors $\lim_{n\to+\infty}P(S_n^*\leq 1)=\phi(1)$. Ne reste plus qu'à trouver $\lim_{n\to+\infty}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right).$

Notons que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}=1$ car $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=1$ ... et que $\lim_{n\to+\infty}P(S_{n+1}^*\leq 1)=\phi(1)$

R.

Montrons alors que $\lim_{n\to+\infty} P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) = \phi(1)$ en utilisant la définition.

<u>Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.</u> Montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Rightarrow |P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

ϕ est continue en 1 donc $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-1| < \eta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\alpha = \frac{\eta}{2}$. $1-\alpha \in \mathbb{R}$ et $|(1-\alpha)-1| = |\alpha| \underset{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}{=} \alpha < \eta$. Alors $|\phi(1-\alpha) - \phi(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $-\frac{\varepsilon}{2} < \phi(1-\alpha) - \phi(1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nous retiendrons que $\boxed{(1)}$ $\underline{-\frac{\varepsilon}{2} + \phi(1) < \phi(1-\alpha)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ $\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leq 1 \right)$.

Alors $\{S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\} \subset \{S_{n+1}^* \leq 1\}$ donc $P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \leq P(S_{n+1}^* \leq 1)$.

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_1 \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} - 1\right| < \alpha$ car $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $1-\alpha < \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} < 1+\alpha$.

Donc $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $\{S_{n+1}^* \leq 1-\alpha\} \subset \{S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\}$ et $P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha) \leq P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}})$.

Ainsi $\underline{\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![, \quad P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha) \leq P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \leq P(S_{n+1}^* \leq 1).}$ $\boxed{(2)}$

$\lim_{n\to+\infty} P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha) = \phi(1-\alpha)$ et $\lim_{n\to+\infty} P(S_{n+1}^* \leq 1) = \phi(1)$.

Alors $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2 \Rightarrow |P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha) - \phi(1-\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists n_3 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_3 \Rightarrow |P(S_{n+1}^* \leq 1) - \phi(1)| < \varepsilon$.

Alors :

$\underline{\forall n \in [\![n_2, +\infty[\![, \quad \phi(1-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \overset{\boxed{(3)}}{<} P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha)}$ et $\underline{\forall n \in [\![n_3, +\infty[\![, \quad P(S_{n+1}^* \leq 1) \overset{\boxed{(4)}}{<} \phi(1)+\varepsilon}$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0$.

$$\phi(1) - \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} + \phi(1) - \frac{\varepsilon}{2} \underset{(1)}{<} \phi(1-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \underset{(3)}{<} P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha) \underset{(2)}{\leq} P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \underset{(2)}{\leq} P(S_{n+1}^* \leq 1) \underset{(4)}{<} \phi(1) + \varepsilon$$

Donc $\phi(1) - \varepsilon < P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) < \phi(1) + \varepsilon$ ou $|P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

Nous avons donc prouvé que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \; n \geqslant n_0 \Rightarrow \left| P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) - \phi(1)\right| < \varepsilon$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) = \phi(1)$ ▲

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(T_n \geqslant n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} P(S_n^* \leqslant 1) - \frac{1}{2} P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2}\phi(1) - \frac{1}{2}\phi(1)$.

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n \geqslant n+\sqrt{n}) = 1 - \phi(1) = \phi(-1).$$

▲ On retrouve ce type de preuve dans HEC$^{\Pi II}$ V 2001 III Q 6 ou dans HEC ΠII 2011 Q13