EXERCICES SANS PRÉPARATION 2011 (suite)

Voici des questions sans préparation de l'oral HEC 2011 obtenues auprès des élèves. Les énoncés ne sont pas garantis. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 1 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE **F1**

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$, $\operatorname{Ker}(\Phi\circ\Phi)$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Cours *Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.*

Déjà donnée en 2010.

Question 2 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE **F1⁻**

X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-(x-a)} & \text{si } x\in]a,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi que X.

Donner la loi de $n\left(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\operatorname{Min}} X_k - a\right)$.

Cours *Inégalité de Taylor-Lagrange.*

Question 3 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE **F2**

$n\in[\![2,+\infty[\![$. Soient x et y deux réels et F l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ F(M)=x\,M+y\,{}^tM$.

Q1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un projecteur.

Q2. Donner les valeurs propres de F.

Q3. F est-il diagonalisable ?

Question 4 **HEC 2011** T. EHRMANN **F2**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Q1. $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ est une famille libre de E et x est un vecteur de E.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1,e_2,\dots,e_p,x)$ soit liée.

Q2. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille d'éléments de E de rang r non nul. $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties non vides J de $[\![1, n]\!]$ telles que la famille $(x_i)_{i\in J}$ soit libre. J_0 est une partie de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal.

a) Donner un lien entre $(x_i)_{i\in J_0}$ et $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

b) On extrait une famille de n' vecteurs de cette famille et on note r' son rang. Montrer que $n - r \geqslant n' - r'$.

Question de cours : Définition et propriétés principales de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

Question 5 HEC 2011 G. FOUBART $\boxed{\textbf{F2}}$

Q1. X suit la loi normale centrée réduite. Montrer que $Z = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une denité f_Z.

Q2. a est un élément de $[-1, 1]$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \begin{cases} (1 + a\sin(2\pi \ln x))\, f_Z(x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Plus une question non lue.

Je propose : T est une variable aléatoire à densité de densité f_a. Existence et valeur éventuelle de $E(T)$.

Question de cours : Comparaison des séries à termes positifs.

Question 6 HEC 2011 C. DAUDET $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Soit n un entier naturel non nul.

Q1. Trouver un réel C_n pour que la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 4.

Trouver, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité.

Question de cours : Définition d'une forme linéaire. Noyau et image d'une forme linéaire.

Question 7 HEC 2011 V. MESKHI $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Image, noyau, valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Plus deux autres questions non lues.

Question de cours : Théorème de la limite centrée. Définition d'un intervalle de confiance.

Question 8 HEC 2011 E. PHILIP $\boxed{\textbf{F1}}$

f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)\, f(x-y) = \big(f(x)\big)^2$. On suppose que f n'est pas la fonction nulle..

On se propose de montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $f(0) \neq 0$.

Q2. Si a est un réel tel que $f(a) = 0$, montrer que $f\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0$.

Q3. Conclure.

Q4. Donner un exemple d'une telle fonction.

Question de cours : X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé.

On suppose que $V(X)$ et $V(Y)$ existent. Montrer que $\big(\mathrm{cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant V(X)\,V(Y)$.

Question 9 **HEC 2011** Vu par JF $\boxed{\mathbf{F1^+}}$

$(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \mathrm{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.

Q2. Montrer que $\big(n\,(\theta - X_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours : Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

---

Question 10 **HEC 2011** Vu par JF $\boxed{\mathbf{F2}}$

$A = (a_{i,j})$ est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Justifier l'inversibilité de A et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Q2. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$

Question de cours : Loi exponentielle.

Question 1 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$, $\operatorname{Ker}(\Phi\circ\Phi)$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Cours *Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.*

Déjà donnée en 2010.

- Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$.

$(u_n)_{n\geqslant 0}\in \operatorname{Ker}\phi \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=0 \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.

Ker ϕ est le sous-espace vectoriel de E constitué par les suites constantes.

- Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$

$\phi^2((u_n)_{n\geqslant 0})=\phi((u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0})=((u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n))_{n\geqslant 0}$

$\phi^2((u_n)_{n\geqslant 0})=(u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)_{n\geqslant 0}$.

$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\operatorname{Ker}\phi^2 \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0$.

L'équation $z\in\mathbb{C}$ et $z^2-2z+1=0$ admet une solution et une seule 1.

Alors Ker ϕ^2 est le plan vectoriel engendré par les suites $(1)_{n\geqslant 0}$ et $(n)_{n\geqslant 0}$

- Remarque.. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}\in\operatorname{Im}\phi$. $\exists (u_n)_{n\geqslant 0}\in E,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=v_n$.

$$\text{Alors } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=(u_n-u_0)+u_0=\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)+u_0$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\sum_{k=0}^{n-1}v_k+u_0$. Cela donne fortement envie de construire un antécédent par ϕ pour tout élément de E, donc de montrer que ϕ est surjectif. Soit $(w_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de E. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de E définie par : $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\sum_{k=0}^{n-1}w_k$.

arbitraire ...

Montrons que $\phi((u_n)_{n\geqslant 0})=(w_n)_{n\geqslant 0}$.

Il s'agit de montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=w_n$.

R

Soit $n \in \mathbb{N}$

- Si $n=0$: $u_{n+1}-u_n = u_1 - u_0 = u_1 = \sum_{k=0}^{1-1} w_k = w_0 = w_n$.

- Supposons $n \geqslant 1$.

$$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=0}^{n} w_k - \sum_{k=0}^{n-1} w_k = w_n.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = w_n$. Alors $\phi\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = (w_n)_{n\geqslant 0}$.

$\forall (w_n)_{n\geqslant 0} \in E$, $\exists (u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, $\phi\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = (w_n)_{n\geqslant 0}$.

<u>ϕ est surjectif. $\mathrm{Im}\,\phi = E$.</u>

<u>Exercice.-</u> Trouver $\mathrm{Ker}\,\phi^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

R

Question 2 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE

X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-a)} & \text{si } x \in]a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi que X.

Donner la loi de $n\left(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\operatorname{Min}} X_k - a\right)$.

Cours *Inégalité de Taylor-Lagrange.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F_n la fonction de répartition de $n\left(\underset{1\leq k\leq n}{\operatorname{Min}} X_k - a\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_n(x) = P\left(\underset{1\leq k\leq n}{\operatorname{Min}} X_k \leq \frac{x}{n} + a\right) = 1 - P\left(\underset{1\leq k\leq n}{\operatorname{Min}} X_k > \frac{x}{n} + a\right)$.

$F_n(x) = 1 - P\left(\{X_1 > \frac{x}{n} + a\} \cap \dots \cap \{X_n > \frac{x}{n} + a\}\right)$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et ont même loi que X donc $F_n(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k > \frac{x}{n} + a) = 1 - \left(P(X > \frac{x}{n} + a)\right)^n$.

$F_n(x) = 1 - \left(1 - F_X\left(\frac{x}{n} + a\right)\right)^n$.

<u>1er cas.</u> $x \in]-\infty, 0]$. Alors $\frac{x}{n} + a \in]-\infty, a]$. $F_X\left(\frac{x}{n} + a\right) = 0$.

donc $F_n(x) = 1 - 1^n = 0$

<u>2ème cas.</u> $x \in]0, +\infty[$. Alors $\frac{x}{n} + a \in]a, +\infty[$. $F_X\left(\frac{x}{n} + a\right) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{n} + a - a\right)} = 1 - e^{-\frac{x}{n}}$

$F_n(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right)\right)^n = 1 - \left(e^{-\frac{x}{n}}\right)^n = 1 - e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Alors $n\left(\underset{1\leq k\leq n}{\operatorname{Min}} X_k - a\right)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

R

Question 3 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE $n \in [\![2,+\infty[\![$

Soient x et y deux réels et F l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ F(M) = x\,M + y\,{}^tM$.

Q1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un projecteur.

Q2. Donner les valeurs propres de F.

Q3. F est-il diagonalisable ?

Q1 $\forall M \in M_n(\mathbb{R}) : F^2(M) = F(F(M)) = x\,F(M) + y\,{}^tF(M) = x(xM + y\,{}^tM) + y\,{}^t(xM + y\,{}^tM)$.

$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ F^2(M) = x^2 M + xy\,{}^tM + yx\,{}^tM + y^2 M = (x^2+y^2)M + 2xy\,{}^tM$

$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ F^2(M) = (x^2+y^2)M + 2x(F(M) - xM) = (y^2-x^2)M + 2x\,F(M)$. (A)

* Supposons que F soit un projecteur. Alors $F \circ F = F$.

$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ (y^2-x^2)M + 2x\,F(M) = F(M)$. ou $(y^2-x^2)M = (1-2x)\,F(M)$.

En particulier $(y^2-x^2)I_n = (1-2x)(x I_n + y\,{}^tI_n) = (1-2x)(x+y)I_n$.

Comme $I_n \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$: $y^2 - x^2 = (1-2x)(x+y) = x - 2x^2 + y - 2xy$. $x^2+y^2+2xy-x-y=0$

$n \geqslant 2$. Il existe une matrice antisymétrique ($^tJ=-J$) J de $M_n(\mathbb{R})$ non nulle (ex : $J = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & 0 & \\ -1 & & (0) \end{pmatrix}$)

Alors $(y^2-x^2)J = (1-2x)(xJ + y\,{}^tJ) \overset{\downarrow}{=} (1-2x)(x-y)J$ et $J \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $y^2 - x^2 = (1-2x)(x-y) = x - 2x^2 - y + 2xy$; $x^2+y^2-2xy-x+y=0$.

$\begin{cases} x^2+y^2+2xy-x-y=0 \\ x^2+y^2-2xy-x+y=0 \end{cases}$. Par différence on obtient $4xy - 2y = 0$.

donc $y=0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

1er cas.. $y=0$. Alors $x^2 - x = 0$. $x=0$ ou $x=1$.

2e cas.. $y \neq 0$. Alors $x = \frac{1}{2}$. $0 = \frac{1}{4} + y^2 + y - \frac{1}{2} - y$; $y^2 = \frac{1}{4}$. $y = \frac{1}{2}$ ou $y = -\frac{1}{2}$

<u>Si F est un projecteur : $(x,y) \in \mathcal{S} = \{(0,0), (1,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.</u>

* Réciproquement supposons que $(x,y) \in \mathcal{S} = \{(0,0), (1,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.

1) F est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$

2) <u>1er cas</u>.. $x=y=0$. Alors $F = 0_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))}$ donc $F^2 = 0_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))} = F$.

2ème cas.. $(x,y)=(1,0)$. Alors $F=Id_{M_n(\mathbb{R})}$. $F\circ F=Id_{M_n(\mathbb{R})}=F$.

3e cas.. $(x,y)\in\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$. Alors $y^2-x^2=0$ et $2x=1$.

(A) donne alors $\forall M\in M_n(\mathbb{R}), F^2(M)=F(M)$. $F^2=F$.

Si $(x,y)\in S=\{(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$ F est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ tel que

$F^2=F$ donc F est un projecteur.

Finalement F est un projecteur si et seulement si $(x,y)\in\{(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$.

(Q2) (A) donne $\forall M\in M_n(\mathbb{R})$, $F^2(M)-2xF(M)+(x^2-y^2)M=0_{M_n(\mathbb{R})}$

donc $\forall M\in M_n(\mathbb{R})$, $(F^2-2xF+(x^2-y^2)Id_{M_n(\mathbb{R})})(M)=0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Alors $F^2-2xF+(x^2-y^2)Id_{M_n(\mathbb{R})}=0_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))}$. $P=X^2-2xX+x^2-y^2$ est un

polynôme annulateur de F. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\alpha^2-2x\alpha+x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (\alpha-x)^2=y^2 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-x=y\\ \text{ou}\\ \alpha-x=-y\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=x+y$ ou $\alpha=x-y$.

Les zéros de P sont $x+y$ et $x-y$. $Sp\,F\subset\{x+y,x-y\}$.

$F(I_n)=(x+y)I_n$ et $I_n\neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$; $x+y\in Sp\,F$.

Reprenons la matrice antisymétrique J non nulle.

$F(J)=(x-y)J$ et $J\neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$; $x-y\in Sp\,F$.

Finalement $Sp\,F=\{x+y,x-y\}$.

(Q3) 1er cas.. $y=0$. Alors $F=x\,Id_{M_n(\mathbb{R})}$. F est une homothétie vectorielle.

F est diagonalisable.

2e cas.. $y\neq 0$. $Sp\,F=\{x+y,x-y\}$ et $x+y\neq x-y$.

Soit $M\in M_n(\mathbb{R})$. $F(M)=(x+y)M \Leftrightarrow xM+y\,{}^tM=xM+yM \Leftrightarrow y({}^tM-M)=0_{M_n(\mathbb{R})}$

$F(M)=(x+y)M \underset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} {}^tM-M=0_{M_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow {}^tM=M$.

$F(M) = (x-y)M \Leftrightarrow xM + y\,{}^tM = xM - yM \Leftrightarrow y\,{}^tM = -yM \underset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} {}^tM = -M$.

Ainsi $SEP(F, x+y)$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n$ de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$

$SEP(F, x-y)$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n$ de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

→ $SEP(F, x+y)$ et $SEP(F, x-y)$ sont en somme directe car $x+y \neq x-y$. Ainsi $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont en somme directe.

→ . $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n \subset M_n(\mathbb{R})$

. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Posons $M_1 = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $M_2 = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

- $M = M_1 + M_2$
- ${}^tM_1 = \frac{1}{2}({}^tM + M) = M_1$ donc $M_1 \in \mathcal{S}_n$
- ${}^tM_2 = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -M_2$ donc $M_2 \in \mathcal{A}_n$

Alors $M \in \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

On peut ainsi dire que $M_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

Finalement $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = SEP(F, x+y) \oplus SEP(F, x-y)$.

<u>F est diagonalisable.</u>

R.

Question 4 **HEC 2011** T. EHRMANN

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Q1. $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une famille libre de E et x est un vecteur de E.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ soit liée.

Q2. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille d'éléments de E de rang r non nul. $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties non vides J de $[\![1, n]\!]$ telles que la famille $(x_i)_{i \in J}$ soit libre. J_0 est une partie de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal.

a) Donner un lien entre $(x_i)_{i \in J_0}$ et $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

b) On extrait une famille de n' vecteurs de cette famille et on note r' son rang. Montrer que $n - r \geqslant n' - r'$.

Question de cours : Définition et propriétés principales de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

Q1 Montrons que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ est liée si et seulement si $x \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

• La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire.

Supposons $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ liée.

$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k + \alpha_{p+1} x = 0_E$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}) \neq 0_{\mathbb{R}^{p+1}}$.

Supposons que $\alpha_{p+1} = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E$. Or $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est libre, ainsi

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$. Alors $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}) = 0_{\mathbb{R}^{p+1}}$!!

Donc $\alpha_{p+1} \neq 0$. Alors $x = \sum_{k=1}^{p} \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_{p+1}}\right) e_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

$(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ liée $\iff x \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

Q2 a) Montrons que $(x_j)_{j \in J_0}$ est une base de $F = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

→ Par définition $(x_j)_{j \in J_0}$ est libre

→ $(x_j)_{j \in J_0}$ est une famille d'éléments de F.

→ Montrons que cette famille est une famille génératrice de F.

Soit G le sous-espace vectoriel qu'elle engendre. $G \subset F$.

Pour montrer que $F \subset G$ il suffit de montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in G$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

1er cas. $i \in J_0$. Alors $x_i \in G$.

<u>2ème cas</u>.. $i \notin J_0$. Posons $J_1 = \{i\} \cup J_0$. $\operatorname{card} J_1 = \operatorname{card} J_0 + 1 > \operatorname{card} J_0$.

Alors par définition de J_0, $(x_j)_{j \in J_1}$ est liée. Comme $(x_j)_{j \in J_0}$ est libre, ① montre que x_i appartient au sous-espace vectoriel engendré par $(x_j)_{j \in J_0}$ donc $x_i \in G$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \in G$. Alors $F \subset G$.

Finalement $F = G$ et ainsi $(x_j)_{j \in J_0}$ est une famille génératrice de F.

Ainsi <u>$(x_j)_{j \in J_0}$ ou $(x_i)_{i \in J_0}$ est une base de $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.</u>

b) Soit $(x_k)_{k \in K}$ une famille de n' vecteurs extraite de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $\operatorname{card} K = n'$. Notons r' le rang de cette famille.

<u>1er cas</u>. $r' = n'$. Alors $n - r \geqslant 0 = n' - r'$

<u>2e cas</u>.. $r' = 0$. Alors $\forall k \in K$, $x_k = 0$. Donc $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{Vect}((x_i)_{i \in [\![1,n]\!] - K})$.

Alors $r = \dim \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \dim \operatorname{Vect}((x_i)_{i \in [\![1,n]\!] - K}) \leqslant \operatorname{card}([\![1,n]\!] - K)$.

Donc $r \leqslant n - \operatorname{card} K = n - n'$; $n - r \geqslant n' = n' - 0 = n' - r'$.

<u>3ème cas</u>.. $r' \in [\![1, n'-1]\!]$.

Soit $(x_k)_{k \in K_0}$ une base de $H = \operatorname{Vect}((x_k)_{k \in K})$ (K_0 est une partie non vide de K de cardinal maximal tel que $(x_k)_{k \in K_0}$ soit libre).

Alors $\operatorname{card} K_0 = r'$.

Considérons l'ensemble des parties J de $[\![1,n]\!]$ telles que $\begin{cases} 1) \ K_0 \subset J \\ 2) \ (x_j)_{j \in J} \text{ est libre} \end{cases}$

Soit J_0 une partie de cet ensemble (qui est non vide car il contient K_0) de cardinal maximal.

Comme dans a) on montre que $(x_j)_{j \in J_0}$ est une base de $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ainsi $\operatorname{card} J_0 = r$.

Soit $\ell \in K \setminus K_0$. x_ℓ est combinaison linéaire de la famille $(x_k)_{k \in K_0}$ car c'est une base de $\mathrm{Vect}((x_k)_{k \in K})$. Supposons que $\ell \in J_0$. Notons que $K_0 \subset J_0 - \{\ell\}$

Alors x_ℓ est combinaison linéaire de la famille $(x_k)_{k \in K_0}$ donc de la sous-famille $(x_j)_{j \in J_0 - \{\ell\}}$. Alors dans ces condition la famille $(x_j)_{j \in J_0}$ est liée !! Ainsi $\ell \notin J_0$.

Finalement $K \setminus K_0 \subset [\![1, n]\!] \setminus J_0$.

Donc $\mathrm{card}(K \setminus K_0) \leq \mathrm{card}([\![1, n]\!] \setminus J_0)$.

Alors $n' - r' \leq n - r$ car $K_0 \subset K$, $J_0 \subset [\![1, n]\!]$, $\mathrm{card}\, K_0 = r'$, $\mathrm{card}\, K = n'$, $\mathrm{card}\, J_0 = r$ et $\mathrm{card}\, [\![1, n]\!] = n$.

Donc $\underline{\underline{n' - r' \leq n - r}}$

R

Question 5 **HEC 2011** G. FOUBART $\boxed{\text{F}}$

Q1. X suit la loi normale centrée réduite. Montrer que $Z = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une denité f_Z.

Q2. a est un élément de $[-1,1]$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \begin{cases} (1 + a \sin(2\pi \ln x))\, f_Z(x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Plus une question non lue.

Je propose : T est une variable aléatoire à densité de densité f_a. Existence et valeur éventuelle de $E(T)$.

Question de cours : *Comparaison des séries à termes positifs.*

Q1 X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrons que Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

1er cas. $x \in]-\infty, 0]$. $Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid e^{X(\omega)} \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A}$

2ème cas. $x \in]0, +\infty[$. $Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid e^{X(\omega)} \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq \ln x\}$

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}(]-\infty, \ln x]) \in \mathcal{A}$

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $Z^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

Ceci achève de montrer que <u>Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.</u>

Notons F_Z la fonction de répartition de Z et Φ celle de X.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_Z(x) = P(Z^{-1}(]-\infty, x])) = P(\emptyset) = 0$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $F_Z(x) = P(Z^{-1}(]-\infty, x])) = P(X^{-1}(]-\infty, \ln x])) = \Phi(\ln x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

Rappelons que Φ est de classe C^1 et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Nous posons $\varphi = \Phi'$.

$x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Alors par composition $x \mapsto \Phi(\ln x)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Ainsi F_Z est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Comme F_Z est nulle sur $]-\infty, 0]$, F_Z est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$.

Sous ces conditions 1) F_Z est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{0\}$

2) F_Z est continue à gauche en 0.

Montrons que F_Z est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{t\mapsto -\infty} \phi(t) = 0$ donc $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \phi(\ln x) = 0$.

Alors $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} F_Z(x) = 0 = F_Z(0)$; F_Z est continue à droite en 0.

F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Alors <u>Z est une variable aléatoire à densité</u>.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Z'(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $F_Z'(x) = \frac{1}{x}\phi'(\ln x) = \frac{1}{x}\varphi(\ln x)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\varphi(\ln x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_Z est positive sur son domaine

de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_Z' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble

fini de points. <u>f_Z est une densité de Z.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x)^2/2} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q2 • $x \mapsto 2\pi \ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$ et sin est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition

$x \mapsto \sin(2\pi \ln x)$ est continue sur $]0,+\infty[$. $x \mapsto 1+\sin(2\pi \ln x)$ également.

f_Z coïncide avec F_Z' sur $]0,+\infty[$ et F_Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Alors f_Z est continue sur $]0,+\infty[$.

Par produit f_a est continue sur $]0,+\infty[$.

f_a est nulle sur $]-\infty,0]$ donc f_a est continue sur $]-\infty,0]$.

Alors f_a est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de

points.

R

- $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f_a(x) = 0$ donc $f_a(x) \geqslant 0$

  - Soit $x \in]0, +\infty[$. $|a \sin(2\pi \ln x)| = |a|\,|\sin(2\pi \ln x)| \leqslant |a| \leqslant 1$.

    Alors $-1 \leqslant a \sin(2\pi \ln x) \leqslant 1$; $1 + a\sin(2\pi \ln x) \geqslant 0$. Comme $f_Z(x) \geqslant 0$:

    $f_a(x) = (1 + a\sin(2\pi \ln x))\, f_Z(x) \geqslant 0$.

Finalement $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) \geqslant 0}}$.

- $\to f_a$ est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc $\int_{-\infty}^{0} f_a(x)\,dx$ existe et vaut 0.

  $\to \forall x \in]0, +\infty[$, $0 \leqslant f_a(x) = (1 + a\sin(2\pi \ln x))\, f_Z(x) \leqslant 2 f_Z(x)$

  $0 \leqslant 1 + a\sin(2\pi \ln x) \leqslant 1 + |a|\,|\sin(2\pi \ln x)| \leqslant 1 + |a| \leqslant 2$

  De plus $\int_0^{+\infty} 2 f_Z(x)\,dx$ converge.

  Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ converge.

  Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$; ceci justifie le changement de variable $u = \ln x$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^A f_a(x)\,dx = \int_\varepsilon^A (1 + a\sin(2\pi \ln x))\frac{1}{x}\varphi(\ln x)\,dx \underset{\substack{u=\ln x \\ du = \frac{dx}{x}}}{=} \int_{\ln\varepsilon}^{\ln A} (1 + a\sin(2\pi u))\,\varphi(u)\,du.$$

$$\int_\varepsilon^A f_a(x)\,dx = \int_{\ln\varepsilon}^{\ln A} \varphi(u)\,du + a\int_{\ln\varepsilon}^{\ln A} \sin(2\pi u)\,\varphi(u)\,du.$$

1°) $\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ converge.

2°) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln\varepsilon = -\infty$ et $\lim_{A \to +\infty} \ln A = +\infty$

3°) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u)\,\varphi(u)\,du$ converge et $\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx = 1 + a\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u)\,\varphi(u)\,du$.

En toute rigueur il faudrait supposer $a \neq 0$, mais si $a = 0$ ...

R

$u \mapsto \sin(2\pi u)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ et φ est paire sur $\mathbb{R}$. Donc $u \mapsto \sin(2\pi u)\,\varphi(u)$ est impaire sur $\mathbb{R}$. L'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u)\,\varphi(u)\,du$ vaut alors 0.

Donc $\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx = 1$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\,dx = 1$.

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{f_a \text{ est une densité de probabilité}}}$.

Soit T une variable aléatoire à densité de densité f_a. Montrons que $E(T)$ existe.

- $\int_{-\infty}^{0} x f_a(x)\,dx$ existe et vaut 0.
- Montrons que $\int_0^1 x f_a(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} x f_a(x)\,dx$ converge.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx = \int_1^A x\,(1+a\sin(2\pi \ln x))\,\varphi(\ln x)\,\frac{1}{x}\,dx \underset{u=\ln x}{=} \int_0^{\ln A} e^u (1+a\sin(2\pi u))\,\varphi(u)\,du$$

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx = \int_0^{\ln A} (1+a\sin(2\pi u))\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{u^2}{2}+u}\,du$$

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx = \int_0^{\ln A} (1+a\sin(2\pi u))\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(u-1)^2}{2}}\,e^{1/2}\,du$$

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx \underset{v=u-1}{=} \int_{-1}^{\ln A-1} (1+a\underbrace{\sin(2\pi(v+1))}_{\sin(2\pi v)})\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,e^{1/2}\,dv$$

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx = e^{1/2}\int_{-1}^{\ln A-1} (1+a\sin(2\pi v))\,\varphi(v)\,dv$$

$$\int_1^A x f_a(x)\,dx \overset{1}{=} e^{1/2}\int_{-1}^{\ln A-1} \varphi(v)\,dv + e^{1/2} a\int_{-1}^{\ln A-1} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv \quad \boxed{\text{ET}}$$

$$\int_A^1 x f_a(x)\,dx \overset{2}{=} e^{1/2}\int_{\ln A-1}^{-1} \varphi(v)\,dv + a\,e^{1/2}\int_{\ln A-1}^{-1} \sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$$

R

$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v)dv$ converge et vaut 1.

$\forall v\in\mathbb{R},\ 0\leq|\sin(2\pi v)\varphi(v)|=|\sin(2\pi v)||\varphi(v)|\leq|\varphi(v)|=\varphi(v)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent (en deux temps ...) la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}|\sin(2\pi v)\varphi(v)|dv$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi v)\varphi(v)\,dv$ est absolument convergente donc convergente.

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv=0$ car $v\mapsto\sin(2\pi v)\varphi(v)$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{A\to+\infty}(\ln A-1)=+\infty$ et $\lim_{A\to0^+}(\ln A-1)=-\infty$.

① donne alors $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A x f_a(x)dx=e^{1/2}\int_{-1}^{+\infty}\varphi(v)dv+ae^{1/2}\int_{-1}^{+\infty}\sin(2\pi v)\varphi(v)dv$.

Donc $\int_1^{+\infty}x f_a(x)dx$ existe et vaut $e^{1/2}\int_{-1}^{+\infty}\varphi(v)dv+ae^{1/2}\int_{-1}^{+\infty}\sin(2\pi v)\varphi(v)dv$

② donne alors $\lim_{A\to0^+}\int_A^1 x f_a(x)dx=e^{1/2}\int_{-\infty}^{-1}\varphi(v)dv+ae^{1/2}\int_{-\infty}^{-1}\sin(2\pi v)\varphi(v)dv$.

Donc $\int_0^1 x f_a(x)dx$ existe et vaut $e^{1/2}\int_{-\infty}^{-1}\varphi(v)dv+ae^{1/2}\int_{-\infty}^{-1}\sin(2\pi v)\varphi(v)dv$.

Alors $\int_0^{+\infty}x f_a(x)dx$ converge et vaut $e^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v)dv+ae^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi v)\varphi(v)dv$

Donc $\int_0^{+\infty}x f_a(x)dx$ converge et vaut $e^{1/2}\times1+ae^{1/2}\times0$ donc $e^{1/2}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}x f_a(x)dx$ converge et vaut $e^{1/2}$.

<u>T possède une espérance qui vaut $e^{1/2}$.</u>

R.

Question 6 HEC 2011 C. DAUDET

Soit n un entier naturel non nul.

Q1. Trouver un réel C_n pour que la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 4.

Trouver, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité.

Question de cours : Définition d'une forme linéaire. Noyau et image d'une forme linéaire.

Q1 Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{t}{1/4n}}\, t^{n-1}}{(1/4n)^n\, \Gamma(n)} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

g_n est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4n}$ et n

Notons que $f_n = \dfrac{C_n\,\Gamma(n)}{(4n)^n}\, g_n$. Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt$ existe et vaut 1.

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut $\dfrac{C_n\,\Gamma(n)}{(4n)^n}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1 \iff C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

* donc si f_n est une densité de probabilité : $C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

* Réciproquement supposons que $C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

1°) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut 1.

2°) $C_n > 0$. Ainsi $\forall t \in]-\infty,0[,\ f_n(t) = 0 \geqslant 0$ et

$\forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1} \geqslant 0$.

Donc f_n est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

3°) $\forall t \in]-\infty,0[,\ f_n(t) = 0$ donc f_n est continue sur $]-\infty,0[$

$\forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1}$ donc f_n est continue sur $[0,+\infty[$.

Alors f_n est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

ceci achève de montrer que f_n est une densité de probabilité.

<u>f_n est une densité de probabilité si et seulement si $c_n = \frac{(4n)^n}{\Gamma(n)} = \frac{(4n)^n}{(n-1)!}$.</u>

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre 4 donc la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4}$ et 1.

Le cours indique que $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4}$ et n.

<u>Toujours d'après le cours $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4n}$ et n.</u>

<u>Remarque</u>.. Si $c_n = \frac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$, $f_n = g_n$ donc f_n est une densité de Z_n.

1) $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

2) Les variables aléatoires de cette suite ont même espérance $\frac{1}{4}$ et même variance $1/16$.

La loi faible des grands nombres montre alors que la suite $\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{4}$.

<u>$(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{4}$.</u>

Question 7 **HEC 2011** V. MESKHI

Image, noyau, valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Plus deux autres questions non lues.

Question de cours : Théorème de la limite centrée. Définition d'un intervalle de confiance.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$.

Ainsi $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Donc 0 est valeur propre de A et $SEP(A,0) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$\dim \operatorname{Im} A = 3 - \dim \operatorname{Ker} A = 3 - 1 = 2$. De plus $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} A$ ayant pour cardinal 2. Alors $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Im} A$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$. $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$L_1 \leftrightarrow L_3$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1$ donne : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$. $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$ est une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$.

$\lambda \in Sp A \iff A - \lambda I_3$ non inversible $\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$ non inversible $\iff \begin{cases} -\lambda-1=0 \\ \text{ou} \\ \lambda(2-\lambda)=0 \end{cases}$

$\lambda \in Sp A \iff \lambda = -1$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$. $Sp A = \{-1, 0, 2\}$.

Remarque.. A est diagonalisable car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A admet trois valeurs propres distinctes

Exercice.. Diagonaliser A.

R

Question 8 **HEC 2011** E. PHILIP

f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)\,f(x-y) = \big(f(x)\big)^2$. On suppose que f n'est pas la fonction nulle..

On se propose de montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $f(0) \neq 0$.

Q2. Si a est un réel tel que $f(a) = 0$, montrer que $f\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0$.

Q3. Conclure.

Q4. Donner un exemple d'une telle fonction.

Question de cours : X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé.

On suppose que $V(X)$ et $V(Y)$ existent. Montrer que $\big(\operatorname{cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant V(X)\,V(Y)$.

Q1 Supposons $f(0)=0$. $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = f(x+x)f(x-x) = f(2x)f(0) = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=0$. f est la fonction nulle. C'est contraire à l'hypothèse !

Ainsi $\underline{f(0) \neq 0}$.

Q2 Soit a un réel tel que $f(a)=0$. $\left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 = f\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right) f\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right) = \underbrace{f(a)}_{f(a)=0} f(0) = 0$

donc $f\left(\frac{a}{2}\right)=0$.

$\underline{\forall a \in \mathbb{R},\ f(a)=0 \Rightarrow f\left(\frac{a}{2}\right)=0}$.

Q3 Supposons que f s'annule sur $\mathbb{R}$. $\exists b \in \mathbb{R}, f(b)=0$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{b}{2^n}\right)=0$.

→ c'est clair pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$f\left(\frac{b}{2^n}\right)=0$ donc $f\left(\frac{\frac{b}{2^n}}{2}\right)=0$ d'après Q2. Ainsi $f\left(\frac{b}{2^{n+1}}\right)=0$.

ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{b}{2^n}\right)=0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b}{2^n} = 0$ et f est continue en 0.

Alors $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{b}{2^n}\right) = f(0)$; $f(0)=0$. Ceci est impossible.

Ainsi $\underline{f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}}$.

Q4 exp est continue sur $\mathbb{R}$, n'est pas la fonction nulle et :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x+y)\exp(x-y) = \exp(2x) = (\exp(x))^2$. $\underline{\exp \text{ convient}}$.

<u>Exercice</u>.. Trouver l'ensemble S des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2$ (R. $S = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists (\lambda, a) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{ax}\}$).

Question 9 **HEC 2011** Vu par JF

$(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \text{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.

Q2. Montrer que $\left(n\,(\theta - X_n)\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours : Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

---

Q1.. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de X_n.

X_n prend ses valeurs dans $[0, \theta]$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_n(x) = 0$ et

$\forall x \in [1, +\infty[,\ F_n(x) = 1$.

Soit $x \in [0, \theta[$. $F_n(x) = P(X_n \leqslant x) = P(\max(U_1, U_2, \ldots, U_n) \leqslant x)$

$F_n(x) = P(\{U_1 \leqslant x\} \cap \{U_2 \leqslant x\} \cdots \cap \{U_n \leqslant x\})$. Par indépendance il vient

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^{n} P(U_k \leqslant x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x-0}{\theta-0} = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ (x/\theta)^n & \text{si } x \in [0, \theta[\\ 1 & \text{si } x \in [\theta, +\infty[\end{cases}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = P(\{X_n - \theta \geqslant \varepsilon\} \cup \{X_n - \theta \leqslant -\varepsilon\})$.

$P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = P(X_n \geqslant \theta + \varepsilon) + P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = 0 + F_n(\theta - \varepsilon) = F_n(\theta - \varepsilon)$

$$P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta - \varepsilon < 0 \\ \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n & \text{si } \theta - \varepsilon \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > \theta \\ \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n & \text{si } \varepsilon \leqslant \theta \end{cases}.$$

<u>1er cas</u>.. $\varepsilon > \theta$ Alors clairement $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$

<u>2ème cas</u>.. $\varepsilon \leqslant \theta$. Alors $0 \leqslant 1 - \frac{\varepsilon}{\theta} < 1$. $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n = 0$.

Finalement : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$.

<u>$(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à θ.</u>

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons G_n la fonction de répartition de $Y_n = n(\theta - X_n)$.

Y_n prend ses valeurs dans $[0, n\theta]$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[$, $G_n(x) = 0$ et

$\forall x \in [n\theta, +\infty[$, $G_n(x) = 1$. Soit $x \in [0, n\theta[$.

$G_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(n(\theta - X_n) \leqslant x) = P(\theta - X_n \leqslant \frac{x}{n}) = P(\theta - \frac{x}{n} \leqslant X_n)$.

$G_n(x) = 1 - P(X_n < \theta - \frac{x}{n}) = 1 - P(X \leqslant \theta - \frac{x}{n}) = 1 - F_n(\theta - \frac{x}{n})$.

Or $x \in [0, n\theta[$ donc $\theta - \frac{x}{n} \in]0, \theta]$.

$\forall z \in [0, \theta[$, $F_n(z) = \left(\frac{z}{\theta}\right)^n$ et $F_n(\theta) = 1$. Donc $\forall z \in [0, \theta]$, $F_n(z) = \left(\frac{z}{\theta}\right)^n$.

Ainsi $G_n(x) = 1 - \left(\dfrac{\theta - \frac{x}{n}}{\theta}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, n\theta[\\ 1 & \text{si } x \in [n\theta, +\infty[\end{cases}.$$

- Si $x \in]-\infty, 0[$: $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = 0$.
- Fixons alors x dans $[0, +\infty[$. Posons $n_0 = \text{Ent}\left(\frac{x}{\theta}\right) + 1$. Notons que $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$. $n \geqslant n_0 > \frac{x}{\theta}$; $x < n\theta$. Alors $G_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n$ et

$1 - \frac{x}{n\theta} > 0$. $G_n(x) = 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{x}{n\theta} = 0$ donc $n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n\left(-\frac{x}{n\theta}\right) = -\frac{x}{\theta}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)\right) = -\frac{x}{\theta}$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lim G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $(n(\theta - X_n))$ converge vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.

Question 10 **HEC 2011** Vu par JF

$A = (a_{i,j})$ est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Justifier l'inversibilité de A et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Q2. Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$

Question de cours : Loi exponentielle.

Q1.. A est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Le cours indique alors que A est une matrice orthogonale. Ainsi <u>A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.</u>

Q2.. Soit $<.,.>$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|.\|$ la norme associée. Soit Y l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Posons $Z = AY = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

Alors $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i \times 1\right| = |<Z,Y>| = |<AY,Y>|$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|<AY,Y>| \leqslant \|AY\|\,\|Y\|$.

Or $\|AY\|^2 = <AY,AY> = {}^t(AY)AY = {}^tY\,{}^tA\,A\,Y = {}^tY\,I_n\,Y = {}^tY\,Y = \|Y\|^2$.

Donc $\|AY\| = \|Y\|$ car $\|AY\| \geqslant 0$ et $\|Y\| \geqslant 0$ (ou cours ici).

Alors $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant \|AY\|\,\|Y\| = \|Y\|\,\|Y\| = \|Y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$.

<u>$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.</u>

(*) <u>Exercice..</u> $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que M est orthogonale si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\| = \|X\|$.