Question 1 **HEC 2012-1-S7** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0,1]$.

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{\frac{1}{n}}$ et $Y_n = (e\,X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln Y_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours. *Définition et proppriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\ln Y_n = \ln\left((eX_n)^{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\,[\ln e + \ln X_n] = \sqrt{n}\,[1 + \ln \prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}]$

$\ln Y_n = \sqrt{n}\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right] = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln U_i + n\right] = \frac{S_n + n}{\sqrt{n}}$ où $S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln U_i$.

Posons $T = \ln U_1$. Utilisons le théorème de transfert pour montrer l'existence de $E(T)$ et $V(T)$ et les calculer.

Posons $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R} - [0,1]$, $f(t) = 0$.

- f est une densité de U_1 ;
- U_1 prend ses valeurs dans $]0,1]$;
- $\ln$ est continue sur $]0,1]$;

Alors $E(\ln U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$t \mapsto \ln t\, f(t)$ est continue sur $]0,1]$.

$\forall \varepsilon \in\,]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt = \int_\varepsilon^1 \ln t\,dt = [t\ln t - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon$.

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt = -1$. Donc $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge et vaut -1

Alors $\int_0^1 -\ln t\, f(t)\,dt$ converge également donc $\int_0^1 |\ln t\, f(t)|\,dt$ converge.

$\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge absolument donc $E(\ln U_1)$ existe.

$E(T)$ existe et $E(T) = E(\ln U_1) = \int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt = -1$.

$T^2 = (\ln U_1)^2 = \ln^2 U_1$.

- f est une densité de U_1
- U_1 prend ses valeurs dans $]0,1[$
- $\ln^2$ est continue sur $]0,1[$.

Alors $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$\forall t \in]0,1[,\quad \ln^2 t\, f(t) = \ln^2 t \geq 0$.

Donc $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\,dt$ converge.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. $\int_\varepsilon^1 \ln^2 t\,dt = [t\ln^2 t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 t \times 2 \times \frac{1}{t} \times \ln t\,dt = -\varepsilon\ln^2\varepsilon - 2\int_\varepsilon^1 \ln t\,dt$.

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln^2 t\,dt = 0 - 2\int_0^1 \ln t\,dt = 2$. $\int_0^1 \ln^2 t\,dt$ existe et vaut 2.

Alors $E((\ln U_1)^2)$ existe et $E((\ln U_1)^2) = \int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt = \int_0^1 \ln^2 t\,dt = 2$.

$E(T^2)$ existe et vaut 2 donc $V(T)$ existe et vaut $2 - 1^2$ c'est-à-dire 1.

Appliquons alors le théorème de la limite centrée.

1) $(\ln U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes car $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes

2) Toutes les variables aléatoires de la suite $(\ln U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi.

3) Les variables aléatoires de cette suite ont pour espérance -1 et pour variance 1 $(1>0\,!)$.

Alors la suite de terme général $\dfrac{\sum_{i=1}^n \ln U_i - E\left(\sum_{i=1}^n \ln U_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^n \ln U_i\right)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{i=1}^n \ln U_i = S_n$. $E\left(\sum_{i=1}^n \ln U_i\right) = \sum_{i=1}^n E(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n (-1) = -n$.

$V\left(\sum_{i=1}^n \ln U_i\right) = \sum_{i=1}^n V(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

par indépendance

Alors $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \ln U_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right)}} = \dfrac{S_n - (-n)}{\sqrt{n}} = \dfrac{S_n + n}{\sqrt{n}} = \ln Y_n.$

Ainsi la suite $(\ln Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale ~~centrée réduite~~.

Remarque.. Pour calculer l'espérance et la variance de $\ln U_1$ on aurait pu remarquer que $-\ln U_1$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Ainsi $E(-\ln U_1) = \frac{1}{1}$ et $V(-\ln U_1) = \frac{1}{1^2}$.

Alors $E(\ln U_1) = -1$ et $V(\ln U_1) = 1$.

Question 2 **HEC 2012-2-S9** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On suppose $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Q1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A

Q2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Question de cours. *Sommes de Riemann.*

Q1 Supposons que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est symétrique donc <u>A est diagonalisable</u>.

Qui peut le plus peut le moins. Pour donner plus d'épaisseur à Q2 nous allons chercher les valeurs propres de A dans le cas général c'est à dire avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ notons $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \ldots, C_n(A)) = \dim \operatorname{Vect}\left(a_1E_n, a_2E_n, \ldots, a_{n-1}E_{n-1}, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)$.

Comme $a_1 \neq 0$: $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\left(E_n, a_2E_n, \ldots, a_{n-1}E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right) = \dim \operatorname{Vect}\left(E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)$.

Finalement $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_n, V)$ avec $V = \sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} a_k E_k$. Notons que (E_n, V) est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha E_n + \beta V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

$\alpha E_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta a_k E_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. La liberté de $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ donne : $\alpha = \beta a_1 = \beta a_2 = \cdots = \beta a_{n-1} = 0$

Comme $a_1 \neq 0$: $\alpha = \beta = 0$. Ceci achève de montrer que (E_n, V) est libre.

Alors $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_n, V) = 2 < n$. A n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de A.

De plus $\dim SEP(A,0) = n - \operatorname{rg} A = n-2$.

<u>0 est valeur propre de A et $\dim SEP(A,0) = n-2$.</u> Cherchons les valeurs propres non nulles de A. Soit $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ a_2 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i \times \frac{a_i}{\lambda} x_n + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ x_i = \dfrac{a_i}{\lambda} x_n \\ \text{et} \\ \left(\lambda^2 - a_n \lambda - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2\right) x_n = 0 \end{cases}$$

<u>1er cas.</u> $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$.

Alors $AX = \lambda X \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!], x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n \\ \text{et} \\ x_n = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \iff X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Donc λ n'est pas valeur propre de A.

<u>2ème cas.</u> $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$.

$AX = \lambda X \iff \forall k \in [\![1, n-1]\!], x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n$.

$X_0 = \begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ a_2/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément non nul de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX_0 = \lambda X_0$. De plus $AX = \lambda X \iff X = x_n X_0$.

Ainsi λ est valeur propre de A et $SEP(A,\lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ a_2/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi 1) les sous-espaces propres associés à des valeurs propres non nulles de A, s'il en existe, sont des droites vectorielles

2) Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda \in Sp\,A \iff \lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$ (1)

Envisageons deux cas.

1° * <u>$\mathbb{K} = \mathbb{R}$.</u> Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. (1) $\iff \left(\lambda - \dfrac{a_n}{2}\right)^2 = \dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$.

(1) $\iff \lambda = \dfrac{a_n}{2} + \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ ou $\lambda = \dfrac{a_n}{2} - \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$.

$0^2 - 0 \times \lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 > 0$ car $a_1 \neq 0$ donc 0 n'est pas solution de (1)

Alors $\dfrac{a_n}{2} + \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ et $\dfrac{a_n}{2} - \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ sont deux réels non nuls.

De plus ces réels sont distincts car $\sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2} > 0$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, A admet exactement trois valeurs propres distinctes qui sont :

0, $\frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$ et $\frac{a_n}{2}-\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$. Ceci achève Q1.

(Q2) Supposons $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

0 solution de (1) $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$.

Si $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$ la seule solution non nulle de (1) est a_n.

Alors $\mathrm{Sp}\,A=\{0,a_n\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,a_n)=n-2+1=n-1<n$.

Ainsi A n'est pas diagonalisable.

Supposons $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$. 0 n'est pas solution de (1).

Le discriminant de (1) est $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2$.

1er cas.. $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$. (1) admet une solution et une seule : $\frac{a_n}{2}$

Alors $\mathrm{Sp}\,A=\{0,\frac{a_n}{2}\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\frac{a_n}{2})=n-2+1=n-1<1$.

A n'est pas diagonalisable.

2ème cas.. $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$ (1) admet deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 et ces solutions ne sont pas nulles.

Alors $\mathrm{Sp}\,A=\{0,\lambda_1,\lambda_2\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\lambda_1)+\dim SEP(A,\lambda_2)=n-2+1+1=n$.

A est diagonalisable.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$ et $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$

Par exemple

pour $a_1=i$, $a_2=a_3=\dots=a_{n-1}=0$ et $a_n=2$: A n'est pas diagonalisable.

Ainsi si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, A n'est pas nécessairement diagonalisable.

R.

Question 3 **HEC 2012-3-S12** $\boxed{\text{F 1}}$ **C. GRASSET**

f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien $(E, <.,.>)$.

On suppose l'existence d'une constante réelle α positive ou nulle telle que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\,\|x\|$.

Montrer que $f^2 = \alpha^2\ \mathrm{Id}_E$.

Question de cours *Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.*

Soit $(x,y) \in E^2$. $<x,y> = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right]$.

$<f(x),f(y)> = \frac{1}{2}\left[\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|f(x+y)\|^2 - \alpha^2\|x\|^2 - \alpha^2\|y\|^2\right]$.

$<f(x),f(y)> = \frac{1}{2}\left[\alpha^2\|x+y\|^2 - \alpha^2\|x\|^2 - \alpha^2\|y\|^2\right] = \alpha^2\,\frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = \alpha^2 <x,y>$.

$\underline{\forall (x,y) \in E^2,\ <f(x),f(y)> = \alpha^2 <x,y>}$. Posons $g = f^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_E$

$\forall (x,y) \in E^2,\ <g(x),y> = <f^2(x),y> - \alpha^2<x,y> = <f(x),f(y)> - \alpha^2<x,y> = 0$.
↑ f est symétrique.

$\forall x \in E, \forall y \in E,\ <g(x),y> = 0$. $\forall x \in E,\ g(x) \in E^\perp = \{0_E\}$. $\forall x \in E,\ g(x) = 0_E$. $g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $f^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\underline{f^2 = \alpha^2\,\mathrm{Id}_E}$.

<u>Remarque</u>.. <u>Rapidement</u> une autre approche.

- f est symétrique donc f^2 est symétrique. Ainsi $g = f^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_E$ est symétrique.
- $\forall x \in E,\ <g(x),x> = <f^2(x),x> - \alpha^2<x,x> = <f(x),f(x)> - \alpha^2\|x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \alpha^2\|x\|^2 = 0$.

$\forall x \in E,\ <g(x),x> = 0$. Ceci montre que g est antisymétrique (classique !).

Alors g est symétrique et antisymétrique donc g est l'endomorphisme nul.

On retrouve ainsi $f^2 = \alpha^2\,\mathrm{Id}_E$.

R.

Question 4 HEC 2012-4-S16 $\boxed{\text{F } 1^-}$ **P. KONIECZNY**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. On considère le polynôme P_n de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $P_n = X^n + 1$.

Pour quelles valeurs de n, P_n est-il divisible par $X^2 + 1$?

Question de cours. *Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables sont à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et dans le cas où elles possèdent une densité.*

$X^2+1=(X-i)(X+i)$. Donc X^2+1 divise P_n si et seulement si i et $-i$ sont racines de P_n.

Or $\forall z \in \mathbb{C}$, $P_n(\bar{z}) = \bar{z}^n+1 = \overline{z^n}+1 = \overline{z^n+1} = \overline{P_n(z)}$. Donc si z est racine de P_n alors $\bar{z}$ est racine de P_n. Ainsi X^2+1 divise P_n si et seulement si i est racine de P_n autrement dit si et seulement si $i^n=-1$.

Soit r le reste dans la division par 4 de n. $r \in \{0,1,2,3\}$ et $\exists q \in \mathbb{N}$, $n=4q+r$.

$$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q\, i^r = 1^q\, i^r = i^r = \begin{cases} 1 & \text{si } r=0 \\ i & \text{si } r=1 \\ -1 & \text{si } r=2 \\ -i & \text{si } r=3 \end{cases}$$

Donc $i^n=-1 \iff r=2$.

X^2+1 divise P_n si et seulement si le reste dans la division de n par 4 est 2.

X^2+1 divise $P_n \iff n \equiv 2\ [4]$.

Question 5 **HEC 2012-5-S20** $\boxed{\text{F 2}}$

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Question de cours. *Théorème de la limite centrée.*

Q1 • Soit $f \in E$. Posons $F = T(f)$ et montrons que $F \in E$.

Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $P_f(x) = \int_0^x f(t)dt$. P_f est la primitive de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0 (f est continue sur $[0,+\infty[$).

P_f est donc de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Alors par produit $F = T(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Donc F est largement continue sur $]0,+\infty[$.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right) = \lim_{x\to 0}\frac{P_f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{P_f(x)-P_f(0)}{x-0} = P_f'(0) = f(0)$. Ainsi F est continue en 0.

F est donc continue sur $[0,+\infty[$. $F \in E$.

$\forall f \in E$, $T(f) \in E$. <u>T est une application de E dans E.</u>

• Montrons que T est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f,g) \in E^2$.

→ $T(\lambda f+g)(0) = (\lambda f+g)(0) = \lambda f(0)+g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0) = (\lambda T(f)+T(g))(0)$.

→ Soit $x \in]0,+\infty[$. $T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x(\lambda f+g)(u)du = \lambda\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$.

$T(\lambda f+g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) = (\lambda T(f)+T(g))(x)$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(\lambda f+g)(x) = (\lambda T(f)+T(g))(x)$. $T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$.

$\forall \lambda\in\mathbb{R}$ $\forall (f,g)\in E^2$, $T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$. <u>$T$ est linéaire</u>.

Finalement <u>T est un endomorphisme de E</u>

• Soit $f \in \operatorname{Ker} T$. $T(f) = 0_E$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 0$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)dt = 0$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$. En dérivant on obtient : $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x)=0$. $f=0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} T = \{0_E\}$. <u>T est injectif.</u>

<u>Remarque</u>.. Nous avons vu que si $f \in E$, $T(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

les éléments de $\operatorname{Im} T$ sont donc de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $h(x) = |x-1|$.

h est continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1. Ainsi $h \in E$ mais $h \notin \operatorname{Im} T$

Alors T n'est pas surjectif.

<u>Exercice</u>.. Montrer que $\operatorname{Im} T$ est l'ensemble des éléments g de E tels que :

1) g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$;

2) $\lim_{x \to 0^+} (x g'(x)) = 0$.

Q2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\mathcal{E}_\lambda = \{f \in E \mid T(f) = \lambda f\}$. Notons que $\mathcal{E}_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

Si $\lambda = 0$: $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_0 = \operatorname{Ker} T = \{0_E\}$. Donc nous supposerons dans ce qui suit $\lambda \neq 0$.

<u>Analysons</u> un peu. Partons d'un élément f appartenant à $\mathcal{E}_\lambda$.

Notons de nouveau P_f la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

$T(f)(0) = \lambda f(0)$ donc $f(0) = \lambda f(0)$; $(\lambda - 1) f(0) = 0$. Notons que si $\lambda \neq 1$: $f(0) = 0$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f'(x) = f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{\lambda x} P_f(x)$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f'(x) - \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = 0$.

Notons que $x \mapsto \frac{1}{\lambda} \ln x$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction continue sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{\lambda x}$.

Le cours permet de dire que : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f(x) = C\, e^{\frac{1}{\lambda} \ln x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = P_f'(x) = \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = C \frac{1}{\lambda x} e^{\frac{1}{\lambda}\ln x} = C \frac{1}{\lambda x} x^{1/\lambda} = \frac{C}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda} - 1}$.

<u>Donc $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = d\, x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ et $f(0) = 0$ si $\lambda \neq 1$</u>. Poursuivons l'analyse.

f est continue en 0 donc $f(0) = \lim_{x\mapsto 0^+} \left(d\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} \right)$. Notons que cette limite est finie !

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ $\lim_{x\mapsto 0^+} (x^{\frac{1}{\lambda}-1}) = +\infty$ donc nécessairement $d = 0$.

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ $f(0) = \lim_{x\mapsto 0^+} (d\, x^0) = d$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = d\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} = d\, x^0 = d$.

donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = d$. Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_1(x) = 1$. $\underline{f = d\, f_1}$

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$ Alors $f(0) = 0$ car $\lambda \neq 1$ et ainsi $f(0) = d \times 0$.

de plus $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = d \times x^{\frac{1}{\lambda}-1}$

Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. $f = \underline{d\, f_\lambda}$.

Résumons cette analyse.

Si $\lambda = 0$: $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$: $\mathcal{S}_\lambda \subset \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ donc si $\lambda = 1$:

$\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{Vect}(f_1)$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

Notons que $0_E \in \mathcal{S}_\lambda$, que $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et

$\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda \in]0, 1[$.

Alors 1°) $\forall \lambda \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$, $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$.

2°) $\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{Vect}(f_1)$ où $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_1(x) = 1$.

3°) $\forall \lambda \in]0, 1[$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Reste à envisager deux réciproques.

Notons que $\mathcal{S}_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$ donc $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E ceci pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

f_1 est continue sur $[0, +\infty[$, $f_1 \in E$. $T(f_1)(0) = f_1(0)$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $T(f_1)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 1\, dt = \frac{1}{x} \times x = 1 = f_1(x)$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $T(f_1)(x) = 1 \times f_1(x)$. $T(f_1) = 1 \times f_1$. $f_1 \in \mathcal{S}_1$.

Donc $Vect(f_1) \subset \mathcal{S}_1$. Alors $\mathcal{S}_1 = Vect(f_1)$.

Soit $\lambda \in]0,1[$. $\mathcal{S}_\lambda \subset Vect(f_\lambda)$. Pour montrer que $Vect(f_\lambda) \subset \mathcal{S}_\lambda$ il suffit de montrer que $f_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ car $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

f_λ est continue sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x^{\frac{1}{\lambda}-1} \underset{\frac{1}{\lambda}-1>0}{=} 0 = f_\lambda(0)$ donc f_λ est continue en 0.

Ainsi f_λ est continue sur $[0,+\infty[$. $f_\lambda \in E$.

$T(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0) = 0 = \lambda f_\lambda(0)$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

Soit $\varepsilon \in]0,x[$. $\int_\varepsilon^x f_\lambda(t)\,dt = \int_\varepsilon^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \left[\frac{t^{1/\lambda}}{1/\lambda}\right]_\varepsilon^x = \lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]$.

Alors $\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \lim\limits_{\varepsilon\mapsto 0^+}\left(\lambda\left[x^{1/\lambda}-\varepsilon^{1/\lambda}\right]\right) = \lambda x^{1/\lambda}$ car $\frac{1}{\lambda}>0$.

Alors $T(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{x}\lambda x^{1/\lambda} = \lambda\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f_\lambda(x)$.

Finalement $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(f_\lambda)(x) = \lambda f_\lambda(x)$. $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$; $f_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$.

Alors $Vect(f_\lambda) \subset \mathcal{S}_\lambda$ et finalement $\mathcal{S}_\lambda = Vect(f_\lambda)$.

<u>Conclusion</u>.
- $\forall \lambda \in]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$, $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$
- $\mathcal{S}_1 = Vect(f_1)$ où f_1 est l'élément de E défini par $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x)=1$
- Si $\lambda \in]0,1[$, $\mathcal{S}_\lambda = Vect(f_\lambda)$ où f_λ est l'élément de E défini par :
  $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Ainsi
→ $Sp\,T =]0,1]$
→ $SEP(T,\lambda) = Vect(f_\lambda)$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

<u>Remarque</u>. – On aurait sans doute pu poser $\forall \lambda \in]0,1]$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$...

R.

Question 6 HEC 2012-6-S23 $\boxed{\text{F 1}}$ **I. KARDASZEWICZ**

a, b sont deux réels strictement positifs. α est réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabili~~s~~sé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X=0)=0$;
- $P(X>0)=\alpha$;
- $P_{\{X>0\}}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1-e^{-ax} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $P_{\{X<0\}}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. *Je mettrais plutôt* $P_{\{X<0\}}(-X < x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & si\ x>0 \\ 0 & si\ x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Déterminer la fonction de répartition de X.

Q2. La variable aléatoire X est-elle à à densité ?

Q3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

Question de cours. *Développement limité d'ordre* 1 *au point* a *de* $\mathbb{R}^n$ *pour une fonction numérique* f *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^n$.

Q1 $(\{X>0\}, \{X=0\}, \{X<0\})$ est un système complet d'événements.

Alors $1 = P(X>0) + P(X=0) + P(X<0) = \alpha + 0 + P(X<0)$. $\underline{P(X<0) = 1-\alpha.}$

soit $x \in]-\infty, 0]$

$P(X \leqslant x) = P(\{X \leqslant x\} \cap \{X<0\}) + P(\{X \leqslant x\} \cap \{X=0\}) + P(\{X \leqslant x\} \cap \{X>0\})$.

$\{X \leqslant x\} \cap \{X>0\} = \emptyset$ donc $P(\{X \leqslant x\} \cap \{X>0\}) = 0$ ... car $x \leqslant 0$

$\{X \leqslant x\} \cap \{X=0\} \subset \{X=0\}$. Alors $0 \leqslant P(\{X \leqslant x\} \cap \{X=0\}) \leqslant P(X=0) = 0$.

donc $P(\{X \leqslant x\} \cap \{X=0\}) = 0$.

Alors $P(X \leqslant x) = P(\{X \leqslant x\} \cap \{X<0\}) = P(\{-X \geqslant -x\} \cap \{X<0\})$

$P(X \leqslant x) = P(X<0)\, P_{\{X<0\}}(-X \geqslant -x) = (1-\alpha)\left(1 - P_{\{X<0\}}(-X < -x)\right) = (1-\alpha)\left[1-(1-e^{-b(-x)})\right]$

$-x \geqslant 0$ donc dans si $-x>0$ et encore vrai si $-x=0$!!

$\underline{P(X \leqslant x) = (1-\alpha)\, e^{bx} \text{ si } x \in]-\infty, 0].}$

soit $x \in]0, +\infty[$.

$P(X \leqslant x) = P(\{X \leqslant x\} \cap \{X<0\}) + P(\{X \leqslant x\} \cap \{X=0\}) + P(\{X \leqslant x\} \cap \{X>0\})$.

$P(\{X \leqslant x\} \cap \{X<0\}) = P(X<0) = 1-\alpha$ et comme plus haut $P(\{X \leqslant x\} \cap \{X=0\}) = 0$ car $P(X=0)=0$.

Ainsi $P(X \leqslant x) = 1-\alpha + P(X>0)\, P_{\{X>0\}}(X \leqslant x) = 1-\alpha+\alpha(1-e^{-ax}) = 1-\alpha e^{-ax}$.

La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie par

$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\alpha e^{-ax} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$.

Q2 $(1-\alpha)e^{b\times 0} = 1-\alpha = 1-\alpha e^{-a\times 0}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\alpha e^{-ax} & \text{si } x \in \underline{[}0, +\infty[\end{cases}$

$x \mapsto (1-\alpha)e^{bx}$ et $x \mapsto 1-\alpha e^{-ax}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F_X est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que :

1°) F_X est continue sur $\mathbb{R}$

2°) F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Ainsi <u>X est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty, 0[, F'_X(x) = (1-\alpha)b e^{bx}$ et $\forall x \in]0, +\infty[, F'_X(x) = \alpha a e^{-ax}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \begin{cases} \alpha a e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ (1-\alpha)b e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$

f_X est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R}-\{0\}$, donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, avec F'_X donc <u>f_X est une densité de X.</u>

Q3 Posons $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

g est une densité d'une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Alors $\int_0^{+\infty} x g(x)\,dx$ converge et vaut $E(Y)$.

Donc <u>$\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$.</u> (1) $-Y$ est alors une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \frac{1}{|-1|} g(-x)$ en est une densité.

$E(-Y)$ existe et vaut $-E(Y)$ donc $-\frac{1}{\lambda}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,h(x)\,dx$ existe et vaut $-\frac{1}{\lambda}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc $\int_{-\infty}^{0} \lambda x e^{\lambda x}\,dx$ existe et vaut $-\frac{1}{\lambda}$. (2)

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f_X(x) = \begin{cases} \alpha a x e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ (1-\alpha) b x e^{bx} & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi • $\int_{0}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $\alpha \times \frac{1}{a}$ (d'après (1)).

• $\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $(1-\alpha)\left(-\frac{1}{b}\right)$ (d'après (2)).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{\alpha}{a} - \frac{1-\alpha}{b}$.

Donc X possède une espérance et $E(X) = \frac{\alpha}{a} - \frac{1-\alpha}{b}$.

R.

Question 7 **HEC 2012-7-S27** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Q1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

Q2. La réciproque est-elle vraie ?

Question de cours. *Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.*

Q1 X est une variable aléatoire à densité qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc X possède une densité f définie sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty, 0]$.

- X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$;
- $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$;
- f est une densité de X ;
- $E(X + \frac{1}{X})$ existe

alors le théorème de transfert montre que $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) f(t)\, dt$ est absolument convergente donc convergente.

$\int_{-\infty}^0 t f(t)\, dt$ existe et vaut 0. $\forall t \in]0, +\infty[$, $0 \leq t \leq t + \frac{1}{t}$ et $f(t) \geq 0$.

donc $\forall t \in]0, +\infty[$, $0 \leq t f(t) \leq (t + \frac{1}{t}) f(t)$ et $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) f(t)\, dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge. donc <u>X possède une espérance.</u>

Q2 La réciproque est fausse. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

- <u>X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$</u> (non ?)
- <u>E(X) existe.</u>
- <u>la fonction g définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$</u> <u>est une densité de X</u>

$t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc, d'après le théorème de transfert, $X + \frac{1}{X}$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) g(t)\, dt$ est absolument convergente.

Or $(t + \frac{1}{t}) g(t) \underset{0}{\sim} \frac{\lambda}{t}$; $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{\lambda}{t} \geq 0$ et $\int_0^1 \frac{\lambda}{t}\, dt$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 (t + \frac{1}{t}) g(t)$ diverge. Alors $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) g(t)\, dt$ diverge. <u>$X + \frac{1}{X}$ n'a pas d'espérance.</u>

R.

Question 8 **HEC 2012-8-S28** $\boxed{\text{F 2}}$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. On note $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

Q1. Exprimer P^{-1} en fonction de P.

Q2. Établir l'inégalité $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\right| \leqslant n$.

Question de cours. *Soit p un paramètre réel inconnu vérifiant $0 < p < 1$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit X_1, X_2, ..., X_n n variable aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli d'espérance p. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.*

Rappeler comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir à partir de $\overline{X_n}$, un intervalle de confiance de risque α $(0 < \alpha < 1)$ pour le paramètre p.

Q1 P est la matrice de passage d'une base orthonormée B_1 de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormée B_2 de $\mathbb{R}^n$ donc P est une matrice orthogonale.

Alors P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

Q2 Soit U l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Posons $V = PU = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $v_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}$.

Notons $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

$<U, PU> = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 \times v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}$.

$\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\right| = |<U, PU>| \leqslant \|U\|\,\|PU\|$ d'après Cauchy-Schwarz.

$\|PU\|^2 = <PU, PU> = {}^t(PU)PU = {}^tU\,{}^tPPU = {}^tU I_n U = {}^tUU = \|U\|^2$ donc $\|PU\| = \|U\|$.

Alors $\|U\|\,\|PU\| = \|U\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$.

Ainsi $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\right| \leqslant n$.

R.

Question 9 **HEC 2012-9-S33** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit D une matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Question de cours. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Rappeler la signification de la relation : $v_n = \mathrm{o}(u_n)$.*

Montrer que si $v_n = \mathrm{o}(u_n)$ et si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n l'est et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

Soit $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3-2M=D$.

Alors $MD=M(M^3-2M)=M^4-2M^2=(M^3-2M)M=DM$. M et D commutent.

Alors $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-a&4b\\-c&4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a&-b\\4c&4d\end{pmatrix}$; $\begin{cases}4b=-b\\-c=4c\end{cases}$; $b=c=0$.

Donc si $M\in M_2(\mathbb{R})$ et si $M^3-2M=D$, M est diagonale. Cherchons donc les matrices diagonales solution du problème. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Posons $\Delta=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$.

$\Delta^3-2\Delta=D \iff \begin{pmatrix}\alpha^3&0\\0&\beta^3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}\iff\begin{cases}\alpha^3-2\alpha=-1\\ \beta^3-2\beta=4\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha^3-2\alpha+1=0\\ \beta^3-2\beta-4=0.\end{cases}$

1 (resp. 2) est un zéro de $P=X^3-2X+1$ (resp. $Q=X^3-2X-4$).

$P=(X-1)(X^2+X-1)=(X-1)\left[\left(X+\frac12\right)^2-\frac54\right]=(X-1)\left(X+\frac12+\frac{\sqrt5}{2}\right)\left(X+\frac12-\frac{\sqrt5}{2}\right)$.

$Q=(X-2)(X^2+2X+2)=(X-2)\left((X+1)^2+1\right)$.

Les racines réelles de P sont : 1, $-\frac12-\frac{\sqrt5}{2}$, $-\frac12+\frac{\sqrt5}{2}$. 2 est la seule racine réelle de Q.

Ainsi $\Delta^3-2\Delta=D\iff\begin{cases}\alpha\in\left\{1,-\frac12-\frac{\sqrt5}{2},-\frac12+\frac{\sqrt5}{2}\right\}\\ \beta=2\end{cases}$.

<u>L'équation $M\in M_2(\mathbb{R})$ et $M^3-2M=D$ admet trois solutions :</u>

$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{-1-\sqrt5}{2}&0\\0&2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt5}{2}&0\\0&2\end{pmatrix}$.