R.

Question 10 **HEC 2012-10-S34** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Q1. a) Montrer que pour tout entier n strictement supérieur à $\lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n)\, \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

b) En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n \to +\infty}{\sim} P(X = n)$.

Q2. Montrer que $P(X > n) = \mathrm{o}\big(P(X = n)\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Question de cours. Donner deux conditions suffisantes de diagonalisibilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres .

Q1 a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n > \lambda - 1$.

$$P(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \times \frac{n!}{k!} = P(X=n) \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{n!}{k!}.$$

Soit $k \in [\![n+1, +\infty [\![$, $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{k(k-1)\cdots(n+1)} = \displaystyle\prod_{i=n+1}^{k} \frac{1}{i} \leqslant \prod_{i=n+1}^{k} \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n}$.

Notons que $\forall k \in [\![n+1, +\infty [\![$, $\dfrac{n!}{k!} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et $\lambda^{k-n} \geqslant 0$.

Donc $\forall k \in [\![n+1, +\infty [\![$, $\lambda^{k-n} \dfrac{n!}{k!} \leqslant \left(\dfrac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}$. Notons que ceci vaut encore pour $k=n$.

Alors $\forall k \in [\![n, +\infty [\![$, $\lambda^{k-n} \dfrac{n!}{k!} \leqslant \left(\dfrac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}$. Or $0 \leqslant \dfrac{\lambda}{n+1} \overset{n > \lambda - 1}{<} 1$ donc la série de terme général $u_i = \left(\dfrac{\lambda}{n+1}\right)^i$ converge.

Ainsi $P(X \geqslant n) = P(X=n) \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{n!}{k!} \overset{P(X=n) \geqslant 0}{\leqslant} P(X=n) \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n} = P(X=n) \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{i}$.

$$P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}} = P(X=n) \frac{n+1}{n+1-\lambda}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \lambda - 1 \Rightarrow P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \frac{n+1}{n+1-\lambda}.$$

---

b) Posons $n_0 = \operatorname{Max}(0, \operatorname{Ent}(\lambda))$. Alors $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_0 \geqslant \operatorname{Ent}(\lambda) > \lambda - 1$.

Soit $n \in [\![n_0, +\infty [\![$. $n \geqslant n_0$ donc $n > \lambda - 1$.

Ainsi $P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

De plus $\{X=n\} \subset \{X \geq n\}$. Alors par croissance de P : $P(X=n) \leq P(X \geq n)$.

Finalement : $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $P(X=n) \leq P(X \leq n) \leq P(X=n) \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$ et $P(X=n)>0$.

Donc $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $1 \leq \dfrac{P(X \leq n)}{P(X=n)} \leq \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{n+1}{n+1-\lambda} = 1$.

Alors, par encadrement, il vient $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{P(X \leq n)}{P(X=n)} = 1$. Donc $\underline{\underline{P(X \leq n) \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} P(X=n)}}$.

Q2 $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{P(X>n)}{P(X=n)} = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{P(X \geq n) - P(X=n)}{P(X=n)} = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\dfrac{P(X \geq n)}{P(X=n)} - 1 \right) = 0$

Ainsi $\underline{\underline{P(X>n) \underset{n \mapsto +\infty}{=} o(P(X=n))}}$.

R.

Question 11 **HEC 2012-11-S36** $\boxed{\text{F 1}}$

n appartient à $\mathbb{N}^*$ et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Établir l'existence d'un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

Question de cours. *Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.*

Q1 $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$ et $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de n^2+1 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc liée.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$, $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$. $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Il existe un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q2 Supposons que A est inversible. $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

$\{k \in [\![0, n^2]\!] \mid a_k \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Elle possède donc un plus petit élément que nous noterons r (r est la valuation de P).

Alors $a_r \neq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=r}^{n^2} a_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. En multipliant par $(A^{-1})^r$ on

obtient $\displaystyle\sum_{k=r}^{n^2} a_k A^{k-r} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ ("en clair" : $a_r I_n + a_{r+1} A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2-r} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).

Si $r = n^2$: $a_{n^2} A^0 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc $a_{n^2} I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Alors $a_{n^2} = 0$. $a_r = 0$.

Ainsi $a_r = 0$. Ce qui n'est pas. Par conséquent $r < n^2$.

Alors $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = a_r I_n + \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n^2} a_k A^{k-r} = a_r I_n + A\Big(\sum_{k=r+1}^{n^2} a_k A^{k-r-1}\Big)$.

Ainsi $A\Big(\displaystyle\sum_{k=r+1}^{n^2} \Big(-\frac{a_k}{a_r}\Big) A^{k-r-1}\Big) = I_n$. En multipliant à gauche par A^{-1}

on obtient : $A^{-1} = \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n^2} \Big(-\frac{a_k}{a_r}\Big) A^{k-r-1}$.

Par conséquent A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

Question 12 **HEC 2012-12-S39** $\boxed{\text{F 1}}$

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de poisson de paramètre λ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \dfrac{1}{2}\cdot$ On pose $Z = XY$.

Q1. Déterminer la loi de Z.

Q2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Question de cours. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Q1 $Z(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$. $(\{Y=1\},\{Y=2\})$ est un système complet d'événements

$P(Z=k)=P(\{Y=1\}\cap\{Z=k\})+P(\{Y=2\}\cap\{Z=k\})$. d'après la formule des probabilités totales.

$P(Z=k)=P(\{Y=1\}\cap\{X=k\})+P(\{Y=2\}\cap\{X=\frac{k}{2}\})$. Ce qui donne par indépendance :

$P(Z=k)=P(Y=1)P(X=k)+P(Y=2)P(X=\frac{k}{2})=\frac{1}{2}\left[P(X=k)+P(X=\frac{k}{2})\right]$.

$\underline{\forall k\in\mathbb{N},\ P(Z=k)=\frac{1}{2}\left[P(X=k)+P(X=\frac{k}{2})\right]}$.

$P(X=\frac{2k+1}{2})=0$

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z=2k)=\frac{1}{2}\left[P(X=2k)+P(X=k)\right]$ et $P(Z=2k+1)=\frac{1}{2}P(X=2k+1)$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z=2k)=\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}+\frac{\lambda^{k}}{k!}\right]e^{-\lambda}$ et $P(Z=2k+1)=\frac{1}{2}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda}$.

Q2 Soit A l'événement Z prend une valeur paire. $A=\bigcup_{k=0}^{+\infty}\{Z=2k\}$

Par incompatibilité il vient $P(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z=2k)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[P(X=2k)+P(X=k)\right]$.

$P(A)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=2k)+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)}_{=1}$ car les deux séries convergent

$P(A)=\frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}+\frac{1}{2}$. Calculons $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$. $e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}$ et $e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}$.

$e^{\lambda}+e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k+(-\lambda)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^k}{k!}\lambda^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{2k}}{(2k)!}\lambda^{2k}=2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$.

$1+(-1)^k=0$ si k est impair

Ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}$. Alors $P(A)=\frac{e^{-\lambda}}{2}\times\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+e^{-2\lambda}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda}$

La probabilité pour que Z prenne des valeurs paires est $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda}$

Exercice.. Calculer $E(Z)$ ... de deux manières différentes ...

R.

Question 13 HEC 2012-13-S40 $\boxed{\text{F 2}}$

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0, 1[$ sur $g(]0, 1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Question de cours. Comparaison des séries à termes positifs.

• **Analyse. -** Soit g une application continue et strictement monotone de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

1) $I = g(]0,1[)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2) g définit une bijection de $]0,1[$ sur I.

Supposons encore que $Y = g(X) = g \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Notons F_Y (resp. F_X) la fonction de répartition de Y (resp. X).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[. \end{cases}$

$\forall x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(Y \leqslant g(x)) = P(g \circ X \leqslant g(x))$.

1er cas. - g est strictement croissante sur $]0,1[$.

soit $x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(g \circ X \leqslant g(x)) = P(X \leqslant x) = F_X(x) \underset{x \in]0,1[}{=} x$

de plus $F_Y(g(x)) = 0$ ou $1 - e^{-g(x)}$. Donc $x = 0$ ou $x = 1 - e^{-g(x)}$.

Or $x \in]0,1[$. Ainsi $x = 1 - e^{-g(x)}$. $e^{-g(x)} = 1 - x$; $-g(x) = \ln(1-x)$; $g(x) = -\ln(1-x)$.
$\uparrow x \in]0,1[$

$\forall x \in]0,1[$, $g(x) = -\ln(1-x)$.

2ième cas. - g est strictement décroissante sur $]0,1[$.

soit $x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(g \circ X \leqslant g(x)) = P(X \geqslant x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leqslant x)$

Alors $F_Y(g(x)) = 1 - x$ car $x \in]0,1[$. Or $F_Y(g(x)) = 0$ ou $1 - e^{-g(x)}$.

comme $x \neq 1$: $1 - x = F_Y(g(x)) = 1 - e^{-g(x)}$; $x = e^{-g(x)}$; $\ln x = -g(x)$.

$\forall x \in]0,1[$, $g(x) = -\ln(x)$.

• **Synthèse.** Posons $\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x)$ et $g_2(x) = -\ln x$.

Notons que g_1 et g_2 sont continues et strictement monotones sur $]0,1[$ et que, $g_1 \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $g_2 \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Posons $Y_1 = g_1 \circ X$ et $Y_2 = g_2 \circ X$.

$u : x \to 1-x$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, $\forall x \in]0,1[$, $u(x) \in]0,1[$,

$-\ln$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

Par composition g_1 est continue et strictement croissante sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x) \in]0,+\infty[$. Alors $Y_1 = g_1 \circ X$ prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.

Soit F_{Y_1} la fonction de répartition de Y_1. $\forall x \in]-\infty,0]$, $F_{Y_1}(x) = 0$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

$F_{Y_1}(x) = P(g_1 \circ X \leq x) = P(-\ln(1-X) \leq x) = P(\ln(1-X) \geq -x) = P(1-X \geq e^{-x})$.

$F_{Y_1}(x) = P(X \leq 1-e^{-x}) = 1-e^{-x}$

$\hat{=} \begin{cases} 1-e^{-x} \in]0,1[\text{ car } x \in]0,+\infty[\\ X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[). \end{cases}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} \text{ si } x \in]0,+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ ou $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} \text{ si } x \in]0,+\infty[. \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. g_1 est solution.

$\forall x \in]0,1[$, $g_2(x) = -\ln x$. g_2 est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $g_2(x) = -\ln x = -\ln(1-(1-x)) = g_1(1-x)$. $Y_2 = g_1(1-X)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. Rappelons alors que $1-X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. Mais alors, d'après ce qui précède (" $X \leftarrow 1-X$ " !), $g_1(1-X) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. g_2 est solution.

> Les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suit la loi exponentielle sont les fonctions g_1 et g_2 définies par $\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x)$ et $g_2(x) = -\ln x$.

R.

Question 14 **HEC 2012-14-S42** $\boxed{\text{F1}}$

α est un réel positif ou nul. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

Q1. Montrer que si $\alpha = 2$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Q2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Question de cours. Définition de la covariance et du coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1

Q1 Ici $\alpha = 2$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = n \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)$. Posons $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = \ln(1+t^2)$.

f est continue sur $[0,1]$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = I$ où $I = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Notons que f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi $I > 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right) = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)\right) = +\infty$.

$\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n) = +\infty$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\ln u_n}\right) = +\infty$. $\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Q2 Ici $0 \leqslant \alpha < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right) \geqslant 1$.

Alors $0 \leqslant \ln u_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right) \underset{\uparrow}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^2} \underset{\uparrow\, \alpha \geqslant 0}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n}\frac{n^\alpha}{n^2} = n \times \frac{n^\alpha}{n^2} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leqslant x-1$.

De plus $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}} = 0$ car $1-\alpha > 0$. Donc par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n) = 0$

Par continuité de la fonction exponentielle en 0 il vient $\lim_{n\to+\infty} e^{\ln u_n} = e^0$.

Ainsi $\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

<u>Exercice</u>.. Etudier $\lim_{n\to+\infty} u_n$ pour tout $\underline{\alpha \in \mathbb{R}}$.

R.

Question 15 **HEC 2012-15** $\boxed{\text{F1}}$ **N. KARPIEL**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.

Soit θ un réel. On pose $Y_0 = X_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n$.

Q1. Donner la loi de Y_n.

Q2. Calculer $\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

Déjà vu en 2007.

Question de cours *Théorème de d'Alembert.*

Q1 $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $Y_k = \theta Y_{k-1} + X_k$. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{Y_k}{\theta^k} - \dfrac{Y_{k-1}}{\theta^{k-1}} = \dfrac{X_k}{\theta^k}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{Y_n}{\theta^n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{Y_k}{\theta^k} - \frac{Y_{k-1}}{\theta^{k-1}}\right) + \frac{Y_0}{\theta^0} \underset{\substack{\uparrow \\ Y_0 = X_0}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{\theta^k} + \frac{X_0}{\theta^0} = \sum_{k=0}^{n}\frac{X_k}{\theta^k}.$$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $Y_n = \sum_{k=0}^{n} \theta^{n-k} X_k$. Notons que ceci vaut également pour $n=0$ car $Y_0 = X_0$. Ainsi $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ Y_n = \sum_{k=0}^{n}\theta^{n-k} X_k}$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\theta^{n-k}X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,(\theta^{n-k})^2)$.

De plus $\theta^n X_0, \theta^{n-1}X_1, \dots, \theta^0 X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes car $X_0, X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Le théorème de stabilité sur les lois normales montre que $\underline{Y_n \text{ suit la loi}}$ normale d'espérance 0 et d'écart type $\left(\sum_{k=0}^{n}(\theta^{n-k})^2\right)^{1/2}$ ou $\left(\sum_{i=0}^{n}\theta^{2i}\right)^{1/2}$.

Q2 Ici $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$ et $0<k<n$. bilinéarité de la covariance.

$$\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=0}^{n}\theta^{n-i}X_i, \sum_{j=0}^{n-k}\theta^{n-k-j}X_j\right) \underset{\downarrow}{=} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\theta^{n-i}\theta^{n-k-j}\,\mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

Or $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} V(X_j) \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ (indépendance).

Alors $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Donc $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = \sum_{j=0}^{n-k} \theta^{n-j}\theta^{n-k-j} = \underset{\ell = n-k-j}{\sum_{\ell=0}^{n-k}} \theta^{n-(n-k-\ell)}\theta^{\ell} = \theta^k \sum_{\ell=0}^{n-k} (\theta^2)^\ell$.

Si $\theta^2 \neq 1$ $\sum_{\ell=0}^{n-k} (\theta^2)^\ell = \dfrac{1-\theta^{2(n-k+1)}}{1-\theta^2}$ et $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = \dfrac{\theta^k - \theta^{2n-k+2}}{1-\theta^2}$.

Si $\theta = 1$ $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = 1 \times \sum_{\ell=0}^{n-k} 1 = n-k+1$

Si $\theta = -1$ $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = (-1)^k \sum_{\ell=0}^{n-k} 1 = (n-k+1)(-1)^k$

$$\underline{\underline{\text{Donc } \operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k})}} = \begin{cases} \dfrac{\theta^k - \theta^{2n-k+2}}{1-\theta^2} & \text{si } \theta \neq 1 \text{ et } \theta \neq -1 \\ n-k+1 & \text{si } \theta = 1 \\ (n-k+1)(-1)^k & \text{si } \theta = -1 \end{cases}.$$

__Remarque__ .. Ceci vaut encore pour $k=0$ ... et pour $k=n$ ... et pour $(k,n)=(0,0)$.

R.

Question 16 **HEC 2012-16** $\boxed{\text{F1}}$ **T. PILEWICZ**

A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

Montrer que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

Une deuxième question non lue.

Question de cours Définition et propriétés de la loi exponentielle.

Posons $E = \mathbb{C}^2$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E = \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$. Nous avons $f^5 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et nous devons montrer que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Si A est inversible, A^5 est inversible comme produit de cinq matrices inversibles ! ce qui n'est pas car $A^5 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$. Donc A n'est pas inversible. Alors f n'est pas bijectif. Comme $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim E < +\infty$, f n'est pas injectif. Il existe donc un vecteur non nul u appartenant à $\operatorname{Ker} f$.
(u) est une famille libre de E que l'on peut compléter en une base $\mathcal{B}' = (u, v)$ de E.
Posons $C = M_{\mathcal{B}'}(f)$. $C^5 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$ et il s'agit de montrer que $C^2 = 0$.
$f(u) = 0_E$ donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Alors $\operatorname{Sp} C \overset{*}{=} \{0, \beta\}$. Or X^5 est un polynôme annulateur de C dont 0 est la seule racine ; $\operatorname{Sp} C \subset \{0\}$.
Ainsi $\beta = 0$. $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\underline{\underline{A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}}}$.

* C est triangulaire supérieure.

<u>Remarque</u>.- le résultat vaut encore si l'on remplace $A^5 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$ par A est nilpotente autrement dit par : $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $A^r = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

R.

Question 17 **HEC 2012-17** $\boxed{\textbf{F1}}$ **M. ARNOLD**

f et g sont deux endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

Q1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.

Q2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

Question de cours *Définition et propriétés de la loi Poisson.*

Q1 Lemme.. Soient u et v deux endomorphismes de E.
$\mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$ & $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\, u$

▲ Preuve du lemme. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, v$. $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$.

$\forall x \in \mathrm{Ker}\, v$, $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$. $\mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$.

$v(E) \subset E$ donc $u(v(E)) \subset u(E)$. $\mathrm{Im}(u \circ v) = (u \circ v)(E) = u(v(E)) \subset u(E) = \mathrm{Im}\, u$.

Ainsi $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\, u$. ▼

d'après le lemme : $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ & $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.

$f \circ g = \mathrm{Id}_E$ donc $f \circ g \circ f = f$ & $g \circ f \circ g = g$.

Alors $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ (g \circ f)) = \mathrm{Ker}(f \circ g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$

et $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}(g \circ f \circ g) = \mathrm{Im}((g \circ f) \circ g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$ ... en appliquant le lemme.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$.

donc $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$ & $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.

Q2 Version 1. Posons $h = g \circ f$.

- h est un endomorphisme de E comme composé de deux endomorphismes de E
- $h \circ h = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \mathrm{Id}_E \circ f = g \circ f = h$; $h^2 = h$.

Ainsi h est un projecteur de E.

Alors $E = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}\, h = \mathrm{Ker}(g \circ f) \oplus \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

$E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

<u>Version 2.</u> Soit $x \in E$. Montrons par analyse-synthèse que :

$\exists ! (y,z) \in \mathrm{Ker} f \times \mathrm{Im} g,\ x = y + z$.

- <u>Analyse / Unicité.</u>

<u>Supposons</u> que $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker} f$ et $z \in \mathrm{Im} g$.

$f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$;

$\exists t \in E,\ z = g(t)$ car $z \in \mathrm{Im} g$ donc $f(x) = f(z) = f(g(t)) = (f \circ g)(t) \overset{f \circ g = Id_E}{=} t$. $t = f(x)$.

Alors $z = g(t) = g(f(x))$ et $y = x - z = x - g(f(x))$.

<u>$y = x - g(f(x))$ et $z = g(f(x))$</u>. D'où l'unicité.

- <u>Synthèse / Existence.</u>

<u>Posons</u> $y = x - g(f(x))$ et $z = g(f(x))$.

→ $y + z = x - g(f(x)) + g(f(x)) = x$. <u>$x = y + z$.</u>

→ $f(y) = f(x) - f(g(f(x))) = f(x) - (f \circ g)(f(x)) \overset{f \circ g = Id_E}{=} f(x) - f(x) = 0_E$; <u>$y \in \mathrm{Ker} f$.</u>

→ $z = g(f(x))$ donc <u>$z \in \mathrm{Im} g$</u>.

D'où l'existence.

Ainsi $\forall x \in E,\ \exists ! (y,z) \in \mathrm{Ker} f \times \mathrm{Im} g,\ x = y + z$.

Alors <u>$E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} g$.</u>

<u>Exercice</u>

1.. Que dire de $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} g$?

2.. Que dire si E est de dimension finie.

3.. Proposer un exemple où l'on aurait $f \circ g = Id_E$ sans avoir $g \circ f = Id_E$.

R.

Question 18 **HEC 2012-18** $\boxed{\text{F2}}$ Obtenue par un élève.

E est un espace euclidien de dimension n. On note $< .,. >$ le produit scalaire et $||.||$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < x,y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0.$$

Montrer qu'il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x dans E, $||f(x)|| = k\,||x||$.

Déja vu en 2007 à HEC

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = 0$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle e_i + e_j, e_i - e_j \rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1 = 0$.

Alors $\|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2 = \langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle = \langle f(e_i+e_j), f(e_i - e_j) \rangle = 0$

donc $\|f(e_i)\|^2 = \|f(e_j)\|^2$. Par conséquent $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

$\exists k \in \mathbb{R}^+,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \|f(e_i)\| = k$. Soit x un élément de E. Montrons que $\|f(x)\| = k\|x\|$

$\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ car $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle f(e_i), f(e_j) \rangle$

$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \langle f(e_i), f(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \|f(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \times k^2 = k^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = k^2 \|x\|^2$.

$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = 0$ si $j \neq i$

$\|f(x)\|^2 = (k\|x\|)^2$ et $\|f(x)\| \geqslant 0$ et $k\|x\| \geqslant 0$. Alors $\|f(x)\| = k\|x\|$.

$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|$.

R.

Question 19 **HEC 2012-19** $\boxed{\textbf{F1}}$ Obtenue par un élève.

a, b, c sont trois réels tels que $a^2+b^2+c^2=1$. $U=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$.

Q1. Calculer $M=U{}^tU$.

Q2. M est-t-elle diagonalisable, inversible ?

Q3. Calculer M^n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Q4. Trouver les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres de M.

Q1 $M=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}(a\ \ b\ \ c)=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac\\ ba & b^2 & bc\\ ca & cb & c^2\end{pmatrix}$.

Q2 • ${}^tM={}^t(U{}^tU)={}^t({}^tU)\,{}^tU=U{}^tU=M$.

M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\underline{M \text{ est diagonalisable}}$.

• $\operatorname{rg} M=\dim \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} a^2\\ ba\\ ca\end{pmatrix},\begin{pmatrix} ab\\ b^2\\ cb\end{pmatrix},\begin{pmatrix} ac\\ bc\\ c^2\end{pmatrix}\right)=\dim\operatorname{Vect}(aU,bU,cU)\underset{\uparrow}{=}\dim\operatorname{Vect}(U)\underset{\uparrow}{=}1$.

$(a,b,c)\neq(0,0,0)$ car $a^2+b^2+c^2=1$; $U\neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

$\operatorname{rg} M=1$ et $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\underline{M \text{ n'est pas inversible}}$.

Q3 $M^2=U{}^tUU{}^tU\underset{\uparrow}{=}U{}^tU=M$. Une récurrence simple donne $\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ M^n=M}$.

${}^tUU=\|U\|^2=a^2+b^2+c^2=1$

Q4 $\operatorname{rg} M=1$ et $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\underline{0\in\operatorname{Sp} M \text{ et } \dim SEP(M,0)=2}$.

$U\neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}}$ et $MU=U{}^tUU\underset{\uparrow}{=}U$. Alors $1\in\operatorname{Sp} M$ et $\operatorname{Vect}(U)\subset SEP(M,1)$.

${}^tUU=1$ ou (1) !

$\{0,1\}\subset\operatorname{Sp} M$, $\dim SEP(M,0)=2$ et $\dim SEP(M,1)\geqslant 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres de M étant inférieure ou égale à 3 on peut dire que : $\operatorname{Sp} M=\{0,1\}$ et $\dim SEP(M,1)=1$. Notons alors que $SEP(M,1)=\operatorname{Vect}(U)$. $SEP(M,0)$ et $SEP(M,1)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et ils sont orthogonaux car M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $SEP(M,0)=(\operatorname{Vect}(U))^\perp$.

$\underline{\operatorname{Sp} M=\{0,1\},\ SEP(M,0)=(\operatorname{Vect}(U))^\perp \text{ et } SEP(M,1)=\operatorname{Vect}(U)}$.

<u>Remarque</u>.. On aurait pu pour traiter Q4 exploiter le fait que M est la matrice d'une projection et même d'une projection orthogonale ...

R.

Question 20 **HEC 2012-20** $\boxed{\textbf{F1}}$ Obtenu par un élève.

$A=(a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow a_{i,j}=1$ et $\forall i\in[\![1,n]\!],\ a_{i,i}>1$.

Montrer que A est matrice définie positive, c'est à dire que A est symétrique réelle telle que pour tout élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX>0$.

Déja vu en 2011 à l'ESCP

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Si $i\neq j$: $a_{i,j}=1=a_{j,i}$. Si $i=j$, $a_{i,j}=a_{i,i}=a_{j,i}$.

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}=a_{j,i}$. A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$ un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Posons $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\y_n\end{pmatrix}=AX$. $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $y_i=\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$.

$${}^tXAX={}^tXY=\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_ix_j=\sum_{i=1}^n\Big[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n x_ix_j+a_{ii}x_i^2\Big]$$

$${}^tXAX=\sum_{i=1}^n\Big[\sum_{j=1}^n x_ix_j-x_i^2+a_{ii}x_i^2\Big]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j+\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2.$$

$${}^tXAX=\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n x_j\Big)+\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2=\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2+\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2\geqslant\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2.$$

$${}^tXAX\geqslant\sum_{i=1}^n(a_{i,i}-1)x_i^2.$$

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $(a_{ii}-1)x_i^2\geqslant 0$ et $\exists i_0\in[\![1,n]\!]$, $x_{i_0}\neq 0$ car $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\uparrow$ $a_{ii}>1$ et $x_i^2\geqslant 0$

Donc ${}^tXAX\geqslant(a_{i_0,i_0}-1)x_{i_0}^2>0$

$\uparrow$ $a_{i_0,i_0}>1$ et $x_{i_0}^2>0$.

$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\Rightarrow {}^tXAX>0$.

R..

Question 21 **HEC 2012-21** $\boxed{\text{F1}}$ Obtenu par un élève.

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E.

Montre que $\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Ker} g$

Posons $\forall x \in f(E)$, $u(x) = g(x)$. $g \in \mathcal{L}(E)$ donc u est une application linéaire de $f(E)$ dans E.

$\mathrm{Im}\, u = u(f(E)) = g(f(E))$. Ainsi $\mathrm{rg}\, u = \dim g(f(E)) = \dim (g \circ f)(E) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Le théorème du rang appliqué à u donne :

$\dim f(E) = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u = \dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Alors $\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Or $\mathrm{Ker}\, u = f(E) \cap \mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, g$; $\dim \mathrm{Ker}\, u \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, g$

Ainsi $\mathrm{rg} f \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Alors $n - \dim \mathrm{Ker} f \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, g + n - \dim \mathrm{Ker}(g \circ f)$ car $n = \dim E$.

ce qui donne : $\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Ker}\, g$.

Exercice.. Montrer que $\mathrm{rg} f + \mathrm{rg}\, g - n \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}(\mathrm{rg} f, \mathrm{rg}\, g)$.

R.

Question 22 **HEC 2012-22** $\boxed{\text{F1}^{+}}$ Obtenu par un élève.

f est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$ et telle que $f(0)=f(1)$.

Montre qu'il existe un réel x appartenant à $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=f(x)$.

Plus une question oubliée.

Et si on disait que la question oubliée était : généralisez ! Alors montrons que $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\exists x_n \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$, $f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)=f(x_n)$ et n'en parlons plus !

Posons $\forall x \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, $g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$ et supposons que g ne s'annule pas sur $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.

f est continue sur $[0,1]$ donc g est continue sur $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$. Comme g ne s'annule pas sur cet intervalle, g garde un signe constant sur $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.

Quitte à changer f en $-f$ supposons que g est strictement positive sur $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.

Alors $\forall x \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, $g(x)>0$. $\forall x \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, $f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)>0$.

Ainsi $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)>0$.

Alors $0 < \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=f\left(\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{0}{n}\right)=f(1)-f(0)=0$!!

donc g s'annule sur $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$. $\exists x_n \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, $g(x_n)=0$

Par conséquent : $\underline{\exists x_n \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right],\ f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)=f(x_n) \text{ et ceci pour tout } n \text{ dans } [\![2,+\infty[\![}$

En particulier $\underline{\exists x_2 \in \left[0,\frac{1}{2}\right],\ f\left(x_2+\frac{1}{2}\right)=f(x_2)}$.