Question 3 HEC 2005 $\boxed{\text{F 2}}$ *élève*

Existe-t-il une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, symétrique, orthogonale et dont la première ligne est $(1 \quad 0 \quad 0)$.

• Supposons que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \end{pmatrix}$ est orthogonale et symétrique.

Alors $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha'' \\ \beta'' \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$1+\alpha^2+\beta^2=1$; $\alpha=\beta=0$

$\alpha'^2+\beta'^2=\alpha''^2+\beta''^2=1$. $\exists\, t' \in [0,2\pi[$, $\exists\, t'' \in [0,2\pi[$, $\alpha'=\cos t'$, $\beta'=\sin t'$,

$\alpha''=\cos t''$; $\beta''=\sin t''$.

De plus $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t' \\ \sin t' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t'' \\ \sin t'' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Alors $0=\cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' = \cos(t'-t'') = \cos(t''-t')$

$t''-t' \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]$. $\exists\, \ell \in \mathbb{Z}$, $t''-t' = \frac{\pi}{2} + \ell\pi$

Or $t''-t' \in\,]-2\pi, 2\pi[$. Alors $\ell \in \{-1, 0, 1\}$

1) $\ell=-1$ $\alpha''=\cos t''=\cos(t'-\frac{\pi}{2})=\sin t'$ $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t' & \sin t' \\ 0 & \sin t' & -\cos t' \end{pmatrix}$

$\beta''=\sin t''=\sin(t'-\frac{\pi}{2})=-\cos t'$

2) $\ell=0$ $\alpha''=\cos t''=\cos(t'+\frac{\pi}{2})=-\sin t'$ $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t' & -\sin t' \\ 0 & \sin t' & \cos t' \end{pmatrix}$

$\beta''=\sin t''=\sin(t'+\frac{\pi}{2})=\cos t'$

A est symétrique ; $\sin t'=-\sin t'$; $\sin t'=0$ et $\cos t'=\pm 1$ $\quad A=I_3$ ou $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\ell=1$ $\alpha''=\cos t''=\cos(t'+\frac{3\pi}{2})=\sin t'$ $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t' & \sin t' \\ 0 & \sin t' & -\cos t' \end{pmatrix}$

$\beta''=\sin t''=\sin(t'+\frac{3\pi}{2})=-\cos t'$

• Réciproquement si $A=I_3$ ou $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

alors A est symétrique et orthogonale.

<u>Remarque</u>.. La réponse à l'exercice tient en un mot : OUI (ex I_3 !!) Ici j'ai voulu donner toutes les solutions.

R

Question 8 HEC 2005 $\boxed{\text{F 1}}$

Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices symétriques non diagonalisable ?

Pour $n=1$: NON

Pour $n=2$: OUI $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ (*) $\quad$ $\mathrm{Sp}\, A = \{1\}$ et A n'est pas scalaire donc A n'est pas diagonalisable.

Pour $n \geqslant 3$: OUI $\quad \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right)$

Piste pour trouver A.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Soit A est symétrique. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda \in \mathrm{Sp}\, A \iff (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = 0 \iff \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$

$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-b^2) = (a-d)^2 + 4b^2$

Il ne reste plus qu'à trouver $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(a-d)^2 + 4b^2 = 0$ et $b \neq 0$

R

Question 10 **HEC 2005** $\boxed{\text{F 2}}$

f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\,g(x) \geqslant 4$.

Montrer que $36 \leqslant \left(\int_{-2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-2}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ 4 \leq f(x)g(x) = |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)|$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ 2 \leq \sqrt{|f(x)|}\sqrt{|g(x)|}$ CS

$$\int_{-2}^{1} 2\,dt \leq \int_{-2}^{1} \sqrt{|f(x)|}\sqrt{|g(x)|}\,dx = \left|\int_{-2}^{1}\sqrt{|f(x)|}\sqrt{|g(x)|}\,dx\right| \overset{\text{CS}}{\leq} \sqrt{\int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx}\sqrt{\int_{-2}^{1}|g(x)|\,dx}$$

Alors $6 \leq \sqrt{\int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx}\sqrt{\int_{-2}^{1}|g(x)|\,dx}$

Ainsi $36 \leq \int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx \int_{-2}^{1}|g(x)|\,dx$

Supposons que : $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$.

Alors f prend la valeur 0 en un point de $\mathbb{R}$; ceci est impossible car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) \geq 4$.

Ainsi ou $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 0$.

Donc
- ou $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ et alors $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0$ (1)
- ou $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$ et alors $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) < 0$ (2)

(1) donne $\int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx \int_{-2}^{1}|g(x)|\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx \int_{-2}^{1} g(x)\,dx$

(2) donne $\int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx \int_{-2}^{1}|g(x)|\,dx = \int_{-2}^{1}(-f(x))\,dx \int_{-2}^{1}(-g(x))\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx \int_{-2}^{1} g(x)\,dx$.

Ainsi dans tous les cas $36 \leq \left(\int_{-2}^{1} f(t)\,dt\right)\left(\int_{-2}^{1} g(t)\,dt\right)$.

R

Question 6 **D'apès HEC 2006**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Existe-t-il m vecteurs x_1, x_2, ..., x_m de E, avec $m \neq n$ tels que $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \left(< x, x_k > \right)^2$.

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une suite d'éléments de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \|x_k\| = 1 \text{ et } \forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(< x, x_k > \right)^2.$$

Montrer que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base orthonormée de E.

→ 1er cas.. $m > n$. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base orthonormée de E.

$\forall x \in E$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k$

$\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle^2$.

Posons $\forall i \in [\![n+1, m]\!]$, $x_i = 0_E$. $(u_1, u_2, \dots, x_m)$ est solution.

2ème cas.. $m < n$. ~~Supposons~~ $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ solution.

Posons $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_m)$. $F \subsetneq E$. $\dim F^\perp \geqslant 1$.

Soit $x \in F^\perp - \{0_E\}$.

$\sum\limits_{k=1}^{m} \langle x, x_k \rangle^2 = 0 \neq \|x\|^2$!

Si $m < n$ le problème n'a pas de solution.

→ $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|x_i\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (\langle x_i, x_k \rangle)^2$; $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (\langle x_i, x_k \rangle)^2 = 0$

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall k \in [\![1, n]\!] - \{i\}$, $\langle x_i, x_k \rangle = 0$.

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est alors une famille orthonormée de E.

Le reste est clair.

R

R.

Question 11 **HEC 07-11-S103** $\boxed{\text{F 1}}$ f et g sont deux endomorphismes d'un espace euclidien E, qui commutent. On suppose que les matrices S et T de f et g dans une base orthonormale sont respectivement symétrique et antisymétrique, c'est à dire vérifient ${}^tS = S$ et ${}^tT = -T$.

Montrer que, pour tout élément x de E, on a $f(x) \perp g(x)$ et $\|f(x) + g(x)\| = \|f(x) - g(x)\|$

Notons $\mathcal{B}$ la base intervenant dans cet exercice.

Soit x un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$.

- $\langle f(x), g(x)\rangle = \langle SX, TX\rangle = {}^t(SX)TX = {}^tX\,{}^tS\,T\,X \overset{{}^tS = S}{=} {}^tX\,S\,T\,X$
- $\langle g(x), f(x)\rangle = \langle TX, SX\rangle = {}^t(TX)SX = {}^tX\,{}^tT\,S\,X \underset{{}^tT = -T}{=} -{}^tX\,T\,S\,X$

Ainsi $\langle f(x), g(x)\rangle = -\langle g(x), f(x)\rangle$ donc $\langle f(x), g(x)\rangle = -\langle f(x), g(x)\rangle$.

$2\langle f(x), g(x)\rangle = 0$. $\langle f(x), g(x)\rangle = 0$.

- $\|f(x)+g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + 2\langle f(x), g(x)\rangle + \|g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2$.
- $\|f(x)-g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), g(x)\rangle + \|g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2$.

donc $\|f(x)+g(x)\|^2 = \|f(x)-g(x)\|^2$. Comme $\|f(x)+g(x)\|$ et $\|f(x)-g(x)\|$ sont positifs :

$\|f(x)+g(x)\| = \|f(x)-g(x)\|$.

Question 12 **HEC 07-12-S104** $\boxed{\textbf{F 2}}$ E est un espace euclidien de dimension n. On note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < x,y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0.$$

Montrer qu'il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x dans E, $\|f(x)\| = k\,\|x\|$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Supposons $i \neq j$.

- $<e_i, e_j> = 0$ donc $\underline{< f(e_i), f(e_j) > = 0}$
- $<e_i+e_j, e_i-e_j> = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1-1 = 0$. Donc $< f(e_i+e_j), f(e_i-e_j) > = 0$.

Alors $0 = < f(e_i)+f(e_j), f(e_i)-f(e_j) > = \|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2$.

Donc $\|f(e_i)\|^2 = \|f(e_j)\|^2$. Comme $\|f(e_i)\|$ et $\|f(e_j)\|$ sont dans $\mathbb{R}^+$: $\underline{\underline{\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|}}$

Finalement $\|f(e_1)\| = \|f(e_2)\| = \dots = \|f(e_n)\|$.

Posons alors $k = \|f(e_1)\| = \|f(e_2)\| = \dots = \|f(e_n)\|$ et montrons que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un élément de E.

$\|f(x)\|^2 = <f(x), f(x)> = <f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i), f(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j)> = <\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j)>$

$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j <f(e_i), f(e_j)> = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 <f(e_i), f(e_i)> = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 k^2 = k^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$< f(e_i), f(e_j) > = 0$ si $i \neq j$.

Donc $\|f(x)\|^2 = k^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = k^2 \|x\|^2$

Alors $\|f(x)\| = k\|x\|$ car $\|f(x)\| \geq 0$, $k \geq 0$, $\|x\| \geq 0$.

$\underline{\underline{\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|}}$

R.

Question 14 HEC 07-14-S108 $\boxed{\text{F 2}}$ n est un entier naturel non nul et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n. Soit A et B dans $\mathcal{S}_n$. On dit que $A \leqslant B$ si et seulement si pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX \leqslant {}^tXBX$.

Montrer que si A, B, et C sont trois éléments de $\mathcal{S}_n$, on a :

i) $\Big[A \leqslant B \text{ et } B \leqslant C\Big] \Rightarrow A \leqslant C$;

ii) $\Big[A \leqslant B \text{ et } B \leqslant A\Big] \Rightarrow A = B$.

---

i) Supposons que $A \leqslant B$ et $B \leqslant C$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ${}^tXAX \leqslant {}^tXBX$ et ${}^tXBX \leqslant {}^tXCX$ donc ${}^tXAX \leqslant {}^tXCX$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \leqslant {}^tXCX$; $A \leqslant C$.

Donc $\underline{\underline{A \leqslant B \text{ et } B \leqslant C \text{ donne } A \leqslant C.}}$ $\underline{\leqslant \text{ est transitive}}$.

ii) Supposons que $A \leqslant B$ et $B \leqslant A$. Posons $D = A - B$ et montrons que $D = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \leqslant {}^tXBX$ et ${}^tXBX \leqslant {}^tXAX$

donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^tXBX$ ou ${}^tX(A-B)X = 0$.

Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXDX = 0$.

V1 Soit λ une valeur propre de D et X_0 un vecteur propre associé.

$0 = {}^tX_0DX_0 = {}^tX_0(\lambda X_0) = \lambda\, {}^tX_0X_0 = \lambda \|X_0\|^2$ et $\|X_0\|^2 \neq 0$ car $X_0 \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

donc $\lambda = 0$.

Ainsi $\operatorname{Sp} D \subset \{0\}$. Or D est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme différence de deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors D est diagonalisable, $\operatorname{Sp} D = \{0\}$ et $SEP(D,0) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc $n = \dim SEP(D,0) = n - \operatorname{rg} D$. $\operatorname{rg} D = 0$. $D = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ce qui donne $A = B$.

V2 D est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme différence de deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Notons que D est antisymétrique en utilisant $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXDX = 0$.

Soit $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$.

$0 = {}^t(X+Y)D(X+Y) = ({}^tX + {}^tY)D(X+Y) = \underbrace{{}^tXDX}_{=0} + {}^tXDY + {}^tYDX + \underbrace{{}^tYDY}_{=0}$

donc $0 = {}^tXDY + {}^tYDX = \langle X, DY\rangle + \langle Y, DX\rangle = \langle X, DY\rangle + \langle DX, Y\rangle$

$0 = {}^tX D Y + {}^t(DX) Y = {}^tX D Y + {}^tX {}^tD Y = {}^tX (D + {}^tD) Y = \langle X, (D+{}^tD)Y \rangle$.

$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, (D+{}^tD)Y\rangle = 0$.

Donc $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $(D+{}^tD)Y \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^{\perp} = \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Ainsi $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $(D+{}^tD)Y = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $(D+{}^tD)E_j = 0$.

Donc pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de $D+{}^tD$ est nulle.

Plus de doute $D + {}^tD = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ et ainsi ${}^tD = -D$. Or ${}^tD = D$ donc

$D = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. On retrouve alors que $A = B$.

$\underline{\underline{A \leq B \text{ et } B \leq A \Rightarrow A = B.}}$ $\underline{\leq \text{ est antisymétrique.}}$

<u>Remarque</u> ... Comme $\leq$ est également réflexive, $\leq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

<u>Exercice</u> .. $D \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer et retenir que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX D X = 0$ ou $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, DX \rangle = 0$

ii) $\forall (X,Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle DX, Y \rangle = -\langle X, DY \rangle$.

iii) ${}^tD = -D$

Notons que nous avons montré dans ce qui précède que : i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) !

Question 1 HEC 2009-1

* Ajouter symétrique !

Soit $(E, < .,. >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

Q1. Prouver qu'il existe un endomorphisme * ϕ de E ayant sdes valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

Q2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$.

$\boxed{\textbf{On traitera le cas général où les valeurs propres de } f \textbf{ et de } g \textbf{ sont des réels positifs ou nuls.}}$

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. Posons $A=M_{\mathcal{B}}(f)$. A est symétrique.
Il existe une matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D=\mathrm{Diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$
telles que $P^{-1}AP=D$. (ou $A=PDP^{-1}$).
$\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}=\mathrm{Sp}\,D=\mathrm{Sp}\,A=\mathrm{Sp}\,f\subset\mathbb{R}_+$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_k\geqslant 0$.
Posons $\Delta=\mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1},\sqrt{\alpha_2},\dots,\sqrt{\alpha_n})$. $\Delta^2=D$.
$A=PDP^{-1}=P\Delta^2P^{-1}=(P\Delta P^{-1})^2$. Soit ϕ l'endomorphisme de E de matrice $P\Delta P^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$.
$M_{\mathcal{B}}(\phi^2)=(P\Delta P^{-1})^2=A=M_{\mathcal{B}}(f)$. $\phi^2=f$.
Notons que ϕ est symétrique car $\mathcal{B}$ est orthonormée et $M_{\mathcal{B}}(\phi)=P\Delta P^{-1}=P\Delta\,{}^tP$ est symétrique.

<u>Remarque</u> : De même il existe un endomorphisme symétrique ψ tel que $\psi^2=g$.

Q2 • Clairement $\mathrm{Ker}\, f\cap\mathrm{Ker}\, g\subset\mathrm{Ker}(f+g)$.
• Soit $x\in\mathrm{Ker}(f+g)$. $f(x)=-g(x)$. $\langle x,f(x)\rangle=-\langle x,g(x)\rangle$.
$\langle x,\phi^2(x)\rangle=-\langle x,\psi^2(x)\rangle$
$\langle\phi(x),\phi(x)\rangle=-\langle\psi(x),\psi(x)\rangle$. $\|\phi(x)\|^2=-\|\psi(x)\|^2$.
Alors $\|\phi(x)\|^2=\|\psi(x)\|^2=0$. $\phi(x)=\psi(x)=0_E$.
$f(x)=\phi^2(x)=0_E$ et $g(x)=\psi^2(x)=0_E$. $x\in\mathrm{Ker}(f\cap g)$.

Finalement $\mathrm{Ker}(f+g)=\mathrm{Ker}\, f\cap\mathrm{Ker}\, g$.

Question 14 **HEC 2010** F. HUA $\boxed{\textbf{F 1}}$

L appartient à $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $M = {}^tLL$.

Q1. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Q2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur L pour que les valeurs propres de M soient strictement positives.

Cours *Théorème de convolution.*

Q1 • $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$

• ${}^tM = {}^t({}^tLL) = {}^tL\,{}^t({}^tL) = {}^tLL = M$. M est symétrique.

M est symétrique à coefficients réels donc <u>M est diagonalisable</u>.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\, M$. $\exists X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})}$, $MX = \lambda X$.

${}^tLLX = \lambda X$; ${}^tX\,{}^tL\,LX = \lambda\,{}^tXX$; $\|LX\|^2 = \lambda \|X\|^2$ et $\|X\|^2 \neq 0$

norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

norme de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

Donc $\lambda = \dfrac{\|LX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.

<u>Les valeurs propres de M sont positives ou nulles.</u>

Q2 * <u>Supposons que $\{X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \mid LX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. (*)</u>

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\, M$. D'après ce qui précède il existe un élément non nul X de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda = \dfrac{\|LX\|^2}{\|X\|^2}$. Supposons que $\lambda = 0$.

Alors $\|LX\|^2 = 0$. $\|LX\| = 0$. $LX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. D'après l'hypothèse (*) $X = 0_{\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})}$!!

Ainsi $\lambda \neq 0$. Donc $\lambda > 0$.

<u>Alors les valeurs propres de M sont strictement positives.</u>

* <u>Réciproquement supposons que les valeurs propres de M sont strictement positives.</u> Montrons par l'absurde que l'on a (*).

Supposons qu'il existe un élément non nul X de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que $LX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $MX = {}^tLLX = {}^tL\,0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})}$.

R

$\Pi X = 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$ et $X \neq 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$ donc 0 est valeur propre de Π. Ceci est impossible.

Ainsi $\{X \in M_{k,1}(\mathbb{R}) \mid JX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$.

Les valeurs propres de Π sont strictement positives si et seulement si

$\{X \in M_{k,1}(\mathbb{R}) \mid JX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$ ... ou si et seulement si

« $\operatorname{Ker} J = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$ ».

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^k$ et de $\mathbb{R}^n$ est J.

$\operatorname{Sp} \Pi \subset \mathbb{R}_+^* \iff \{X \in M_{k,1}(\mathbb{R}) \mid JX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\} \iff \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^k}\}$.

$\operatorname{Sp} \Pi \subset \mathbb{R}_+^* \iff \dim \operatorname{Ker} f = 0 \underset{\text{relation du rang}}{\iff} \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^k \iff \operatorname{rg} f = k \iff \operatorname{rg} J = k$.

Les valeurs propres de Π sont strictement positives si et seulement si $\operatorname{rg} J = k$.

R.

Question 8 HEC 2011 S 108

Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Q1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

Q2. On suppose de plus que pour tout x dans E, $< u(x), x >= 0$.

Montrer que $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), y >= - < u(y), x >$. Que peut-on-dire de u ?

Cours *X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition F de X et en donner des propriétés.*

Q1 Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure.

Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $u(e_k)$ est combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_k$.

Mieux : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_k)) \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

Le cours sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt montre qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E, orthonormée et telle que :

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_k) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ et $< e'_k, e_k > > 0$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $e'_k \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ donc $u(e'_k) \in u(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)) \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

Alors $u(e'_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_k)$.

Donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $u(e'_k)$ est combinaison linéaire de $e'_1, e'_2, \dots, e'_k$.

Cela signifie que $M_{\mathcal{B}'}(u)$ est triangulaire supérieure.

<u>Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ soit triangulaire supérieure.</u>

Q2 Soit $(x,y) \in E^2$. Alors $< u(x+y), x+y > = 0$.

$$0 = < u(x+y), x+y > = < u(x)+u(y), x+y > = \underbrace{< u(x), x >}_{=0} + < u(x), y > + < u(y), x > + \underbrace{< u(y), y >}_{=0}.$$

Ainsi <u>$< u(x), y > = - < u(y), x >$ et ceci pour tout $(x,y) \in E^2$.</u>

<u>Remarque</u>.. u est antisymétrique.

R.

Posons $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = (a'_{ij})$. Montrons que A' est antisymétrique.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $u(e'_i) = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki}\, e'_k$

$$\langle u(e'_i), e'_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki} \underbrace{\langle e'_k, e'_j \rangle}_{= \begin{cases} 1 \text{ si } k=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}} = a_{ji}.$$

De même $\langle u(e'_j), e'_i \rangle = a_{ij}$.

Or $\langle u(e'_i), e'_j \rangle = -\langle u(e'_j), e'_i \rangle$.

Donc $\underline{a_{ji} = -a_{ij} \text{ et ceci pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$.

${}^tA' = -A'$. A' est antisymétrique.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a'_{ii} = -a'_{ii}$. $\underline{\forall i \in [\![1,n]\!],\ a'_{ii} = 0.}$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

1er cas... $i > j$. Alors $a'_{ij} = 0$ car A' est triangulaire supérieure.

2ème cas... $i < j$ Alors $a'_{ji} = 0$ toujours parce que A' est triangulaire supérieure.

Ainsi $a'_{ij} = -a'_{ji} = 0$.

$\underline{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a'_{ij} = 0.}$

Finalement $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a'_{ij} = 0$. $A' = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors $\underline{\underline{u \text{ est l'endomorphisme nul.}}}$

Question 10 HEC 2011 Vu par JF

$A = (a_{i,j})$ est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Justifier l'inversibilité de A et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Q2. Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$

Question de cours : Loi exponentielle.

Q1.. A est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Le cours indique alors que A est une matrice orthogonale. Ainsi $\underline{A \text{ est inversible et } A^{-1} = {}^tA}$.

Q2.. Soit $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soit Y l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Posons $Z = AY = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

Alors $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i \times 1\right| = |\langle Z, Y\rangle| = |\langle AY, Y\rangle|$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|\langle AY, Y\rangle| \leqslant \|AY\|\,\|Y\|$.

Or $\|AY\|^2 = \langle AY, AY\rangle = {}^t(AY)AY = {}^tY\,{}^tA\,A\,Y = {}^tY\,I_n\,Y = {}^tY\,Y = \|Y\|^2$.

Donc $\|AY\| = \|Y\|$ car $\|AY\| \geqslant 0$ et $\|Y\| \geqslant 0$ (ou comme ci).

Alors $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant \|AY\|\,\|Y\| = \|Y\|\,\|Y\| = \|Y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$.

$$\underline{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n.}$$

(*) <u>Exercice</u>.. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que M est orthogonale si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\| = \|X\|$.