
Question 2 D'apès HEC 2006

A, B et C sont trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe trois complexes α, β, γ, non tous nuls et tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une unique valeur propre.

1er cas.. (A,B,C) est liée. $\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$, $(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0_{\mathbb{C}^3}$ et $\alpha A+\beta B+\gamma C=0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

(α,β,γ) est solution car $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$ admet une unique valeur propre.

2ième cas.. (A,B,C) est libre

a) (A,B,C,I_2) est liée.

Alors $\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$, $(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0_{\mathbb{C}^3}$ et $I_2=\alpha A+\beta B+\gamma C$

(α,β,γ) convient.

b) (A,B,C,I_2) est libre. C'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$, $\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta I_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

$\alpha A+\beta+\gamma C=\begin{pmatrix}-\delta&1\\0&-\delta\end{pmatrix}$ admet une valeur propre et une seule.

De plus $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$.

Question 3 **D'apès HEC 2006**

$E = \mathbb{R}^3$. f est un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et -1 sont des valeurs propres.

Démontrer que f est diagonalisable.

1er cas.. $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$. Alors 0 est valeur propre de f.

f admet au moins trois valeurs propres distinctes.

f est diagonalisable

2e cas.. $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. f est un automorphisme de E.

$f^4 = f^2$ donc $f^2 = Id_E$. f est une symétrie. f est diagonalisable.

R

R,

Question 2 **HEC 07-2** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé.

Q1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer toutes les droites D de $\mathbb{R}^3$ stables par f, c'est à dire telles que $f(D) \subset D$.

Q1 A est symétrique et A est à coefficients réels donc A est diagonalisable.

Q2 Soit D une droite de $\mathbb{R}^3$. Notons que D est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

* Supposons que D est stable par f. Soit u un vecteur non nul de D.

Alors $D = \mathrm{Vect}(u)$ et $f(D) \subset D$. Donc $f(\mathrm{Vect}(u)) \subset \mathrm{Vect}(u)$ ou $\mathrm{Vect}(f(u)) \subset \mathrm{Vect}(u)$. Alors $f(u) \in \mathrm{Vect}(u)$. Ainsi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f(u) = \lambda u$.

$u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f(u) = \lambda u$, donc u est un vecteur propre de f et D est engendrée par un vecteur propre de f.

* Réciproquement supposons que D est engendrée par un vecteur propre w de f.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f(w) = \lambda w$.

$f(D) = f(\mathrm{Vect}(w)) = \mathrm{Vect}(f(w)) = \mathrm{Vect}(\lambda w) \subset \mathrm{Vect}(w) = D$.

↑ avec égalité si et seulement si $\lambda \neq 0$.

Ainsi $f(D) \subset D$ et D est stable par f.

Conclusion : Les droites vectorielles stables par f sont les droites vectorielles engendrées par un vecteur propre de f.

Cherchons les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Soit $\lambda \in \mathbb{R} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3 \in \mathbb{R}^3$.

$$f(u) = \lambda u \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \lambda x \\ 2y - z = \lambda y \\ -y + 2z = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda - 1)x = 0 \\ (2 - \lambda) y - z = 0 \\ (\lambda - 1)(y + z) = 0 \end{cases} \leftarrow \text{"} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \text{"}$$

<u>1er cas</u>.. $\lambda = 1$. $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y - z = 0$.

$1 \in Sp f$ et le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1 est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $y - z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

<u>2ème cas</u>.. $\lambda \neq 1$ $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (2-\lambda) y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ (3-\lambda) y = 0 \end{cases}$

<u>a)</u> $\lambda = 3$ $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$.

Alors 3 est une valeur propre de f et le sous espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_2 - e_3$.

<u>b)</u> $\lambda \neq 3$ $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. λ n'est pas valeur propre.

Finalement $Sp f = \{1, 3\}$. $SEP(f, 1)$ est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $y - z = 0$ dans B.
$SEP(f, 3)$ est la droite vectorielle engendrée par $Vect(e_2 - e_3)$.

<u>Conclusion</u>.. <u>les droites vectorielles stables par f sont les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ contenues dans le plan d'équation $y - z = 0$ dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et la droite vectorielle engendrée par $e_2 - e_3$.</u>

<u>Remarque</u>.. $(e_1, e_2 + e_3)$ est une base du plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $y - z = 0$ dans B.
Alors l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$ stables par f est :

$$\underline{Vect(e_2 - e_3) \cup \{ Vect(\alpha e_1 + \beta (e_2 + e_3)) ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \}}.$$

R.

Question 5 **HEC 07-5** [F 1] On suppose que $P = X(X+2)$ est un polynôme annulateur d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que -2 est valeur propre de A et que A est diagonalisable.

P est un polynôme annulateur de A dont les zéros sont -2 et 0. Ainsi $\mathrm{Sp}\, A \subset \{-2, 0\}$.

1er cas. A est inversible. $A+2I_n = A^{-1}A(A+2I_n) = A^{-1}\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors $A = -2I_n$. Pas de doute -2 est valeur propre de A et A est diagonalisable.

2e cas. A n'est pas inversible.

Alors $0 \in \mathrm{Sp}\, A$

Supposons que -2 n'est pas valeur propre de A. Alors $A+2I_n$ est inversible.

Donc $A = A(A+2I_n)(A+2I_n)^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(A+2I_n)^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Or A n'est pas la matrice nulle. Ainsi $A+2I_n$ n'est pas inversible ; $-2 \in \mathrm{Sp}\, A$.

$0 \in \mathrm{Sp}\, A$, $-2 \in \mathrm{Sp}\, A$ et $\mathrm{Sp}\, A \subset \{-2, 0\}$. Donc $\mathrm{Sp}\, A = \{-2, 0\}$. Montrons que A est diagonalisable.

Pour cela posons $F = SEP(A, -2)$ et $G = SEP(A, 0)$ et montrons que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

- F et G sont en somme directe car ce sont deux sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes.
- F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $F + G \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Soit U un élément quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $A(A+2I_n)U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Posons $U_2 = (A+2I_n)U$. $AU_2 = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $U_2 \in SEP(A, 0)$; $U_2 \in G$.

$(A+2I_n)AU = (A^2+2A)U = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Posons $U_1 = AU$. $(A+2I_n)U_1 = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $U_1 \in SEP(A, -2)$; $U_1 \in F$.

$U_1 - U_2 = AU - (A+2I_n)U = -2U$.

Alors $U = \left(-\frac{1}{2}\right)U_1 + \frac{1}{2}U_2$. De plus $-\frac{1}{2}U_1 \in F$ et $\frac{1}{2}U_2 \in G$. Alors $U \in F + G$.

$\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $U \in F + G$. Ainsi $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \subset F + G$.

Finalement : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F + G = F \oplus G = SEP(A, -2) \oplus SEP(A, 0)$ et $\mathrm{Sp}\, A = \{-2, 0\}$.

Ici encore -2 est valeur propre de A et A est diagonalisable.

Question 19 **HEC 07-19-S130** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et f.

g, h trois endomorphismes de E vérifiant : $f+g+h=\mathrm{Id}_E$ et $f\circ g=g\circ f=g\circ h=h\circ g=h\circ f=f\circ h$.

Q0. Le texte dit : montrer que f, g et h sont des projecteurs. Montrer que c'est faux... au moins si $\dim E\geqslant 1$.

Dans la suite on suppose que $f+g+h=\mathrm{Id}_E$ et $f\circ g=g\circ f=g\circ h=h\circ g=h\circ f=f\circ h=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q1. Montrer que f, g et h sont des projecteurs.

Q2. Prouver que $\varphi=f+g-2\,h$ est diagonalisable.

Q3. Donner un exemple d'un tel triplet d'endomorphismes.

Q0 Supposons $\dim E\geqslant 1$. Posons $f=g=h=\frac{1}{3}\mathrm{Id}_E$

- f, g et h sont trois endomorphismes de E
- $f+g+h=\mathrm{Id}_E$
- $f\circ g=g\circ f=g\circ h=h\circ g=h\circ f=f\circ g=\frac{1}{9}\mathrm{Id}_E$.

Or $f^2=\frac{1}{9}\mathrm{Id}_E\neq\frac{1}{3}\mathrm{Id}_E=f$. f n'est pas un projecteur ! g et h pas davantage.

Q1 f est un endomorphisme de E. $f=f\circ\mathrm{Id}_E=f\circ(f+g+h)=f^2+\underbrace{f\circ g}_{0_{\mathcal{L}(E)}}+\underbrace{f\circ h}_{0_{\mathcal{L}(E)}}=f^2$.
Ainsi <u>f est un projecteur.</u>
On montre de même que <u>g et h sont des projecteurs</u>.

Q2 $\varphi=f+g-2h=\mathrm{Id}_E-3h$. h est un projecteur donc h est diagonalisable.
Ainsi Id_E-3h est diagonalisable (si $M_{\mathcal{B}}(h)$ est diagonale $M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E-3h)$ est également diagonale !).

Q3 On obtient un triplet solution en prenant $f=\mathrm{Id}_E$, $g=h=0_{\mathcal{L}(E)}$!
On peut aussi prendre un projecteur f et poser $g=\mathrm{Id}_E-f$ et $h=0_{\mathcal{L}(E)}$.

R.

Question 20 **HEC 07-20-S143** $\boxed{\text{F 2}}$ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. Déterminer les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Q2. Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par f. Montrer que $\dim f(P) = 1$.

En déduire les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Posons $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

Q1 Notons que les droites vectorielles de E stables par f sont les droites vectorielles de E engendrées par un vecteur propre de f.

* Soit D une droite vectorielle de E stable par f. Soit u un vecteur non nul de D.
$D = \text{Vect}(u)$ et $f(D) \subset D$.
Alors $f(u) \in \text{Vect}(f(u)) = f(\text{Vect}(u)) = f(D) \subset D = \text{Vect}(u)$. $f(u) \in \text{Vect}(u)$.
Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f(u) = \lambda u$ et $u \neq 0_E$. Ainsi u est un vecteur propre de f.
D est engendrée par un vecteur propre de f.

* Réciproquement supposons que D soit une droite de E engendrée par un vecteur propre de E que nous noterons v. $D = \text{Vect}(v)$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f(v) = \lambda v$.
$f(D) = f(\text{Vect}(v)) = \text{Vect}(f(v)) = \text{Vect}(\lambda v) \subset \text{Vect}(v) = D$; $f(D) \subset D$. D est stable par f.
avec égalité si $\lambda \neq 0$

Ceci achève de montrer que les droites vectorielles de E stables par f sont les droites vectorielles engendrées par un vecteur propre de f.

Cherchons les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

$\text{Sp} f = \text{Sp} A = \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{1, 0\}$ car A est triangulaire supérieure. $\text{Sp} f = \{0, 1\}$

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément de E.

$f(u) = 0_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$. Alors $SEP(f, 0) = \text{Vect}(e_1 - e_2)$.

$f(u) = u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = x \\ z = y \\ 0 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Alors $SEP(f, 1) = \text{Vect}(e_1)$.

Ainsi il existe deux droites vectorielles de E stables par f et deux seulement :

$D_1 = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2)$ et $D_2 = \mathrm{Vect}(e_1)$. Notons que $f(D_1) = \{0_E\}$ et $f(D_2) = D_2$.

(Q2) Soit P un plan vectoriel de E stable par f. $f(P) \subset P$.

Alors $\dim f(P) \leq \dim P = 2$. $\dim f(P) \in \{0, 1, 2\}$.

Supposons que $\dim f(P) = 0$. Alors $f(P) = \{0_E\}$. $P \subset \mathrm{Ker} f$. $2 = \dim P \leq \dim \mathrm{Ker} f = 1$!

Supposons que $\dim f(P) = 2$. $f(P) = P$ donc $f^2(P) = f(P) = P$. $P = f^2(P) \subset f^2(E) = \mathrm{Im} f^2$.

Alors $\mathrm{rg} f^2 = \dim \mathrm{Im} f^2 \geq \dim P = 2$. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Vect}(f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1, 2e_1) = \mathrm{Vect}(e_1)$ donc $\dim \mathrm{Im} f^2 = 1$. $\mathrm{rg} f^2 = 1$.

$1 = \mathrm{rg} f^2 \geq 2$!!

Finalement $\dim f(P) = 1$. Posons $D = f(P)$. $f(D) = f(f(P)) \overset{f(P) \subset P}{\subset} f(P) = D$.

De plus $\dim D = \dim f(P) = 1$. Alors $D = f(P)$ est une droite vectorielle stable par f.

Ainsi $D = D_1$ ou D_2.

1er cas.. $D = D_1$. $f^2(P) = f(D_1) = \{0_E\}$. $P \subset \mathrm{Ker} f^2$. ($f(P) = D = D_1$. $D_1 = \mathrm{Ker} f$)

Comme $\mathrm{rg} f^2 = 1$ $\dim \mathrm{Ker} f^2 = 3 - \mathrm{rg} f^2 = 2 = \dim P$. Alors $P = \mathrm{Ker} f^2$.

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$. $u \in \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow f^2(u) = 0_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y + 2z = 0$.

Donc P est le plan vectoriel d'équation $x + y + 2z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

2ième cas.. $D = D_2$. $e_1 \in D_2$ et $D_2 = D = f(P) \subset P$; $e_1 \in P$.

Montrons que $\mathrm{Ker} f \subset P$. Soit (u, v) une base de P.

$\dim f(P) = 1$ et $f(P) = f(\mathrm{Vect}(u, v)) = \mathrm{Vect}(f(u), f(v))$ donc $(f(u), f(v))$ est liée.

Alors $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $(\alpha,\beta)\neq 0_{\mathbb{R}^2}$ et $\alpha f(u)+\beta f(v)=0_E$.

Ainsi $w=\alpha u+\beta v\neq 0_E$ et $f(w)=\alpha f(u)+\beta f(v)=0_E$.

w est donc un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$ qui est une droite vectorielle.

Alors $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(w)$ or $w=\alpha u+\beta v\in P$ donc $\operatorname{Ker} f\subset P$.

Le vecteur e_1-e_2 appartient à P.

(e_1, e_1-e_2) est une famille, libre évidemment, d'éléments de P et de cardinal 2.

Comme $\dim P=2$. (e_1, e_1-e_2) est une base de P. $P=\operatorname{Vect}(e_1, e_1-e_2)=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$.

Observons que $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))=\operatorname{Vect}(e_1,e_1,e_1+e_2)=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$.

Ainsi $P=\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$.

Si P est stable par f : $P=P_1$ ou P_2 avec $P_1=\operatorname{Ker} f^2$ et $P_2=\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$.

Envisageons la réciproque.

$f(P_2)=f(\operatorname{Im} f)\subset f(E)=\operatorname{Im} f=P_2$. P_2 est stable par f. Montrons que P_1 est stable par f.

P_1 est le plan vectoriel de E d'équation $x+y+2z=0$ dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.

e_1-e_2 et $2e_1-e_3$ sont deux éléments de P_1 et la famille $(e_1-e_2,\ 2e_1-e_3)$ est "libre évidemment". Comme $\dim P=2$: $(e_1-e_2,\ 2e_1-e_3)$ est une base de P_1.

$f(P_1)=f(\operatorname{Vect}(e_1-e_2,2e_1-e_3))=\operatorname{Vect}(f(e_1-e_2),f(2e_1-e_3))=\operatorname{Vect}(f(e_1)-f(e_2),2f(e_1)-f(e_3))$.

$f(P_1)=\operatorname{Vect}(e_1-e_1,2e_1-(e_1+e_2))=\operatorname{Vect}(0_E,e_1-e_2)=\operatorname{Vect}(e_1-e_2)\subset P_1$. $f(P_1)\subset P_1$.

P_1 est donc stable.

<u>Ainsi les plans vectoriels de E stables par f sont $P_1=\operatorname{Ker} f^2=\operatorname{Vect}(e_1-e_2,2e_1-e_3)$</u>

<u>et $P_2=\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$.</u>

<u>Remarque</u>.. Les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont $\{0_E\}$, D_1, D_2, P_1, P_2 et E.

Question 5 HEC 2009-5

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q1. On pose $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,1,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

Q2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.

Q3. Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1.. $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3$.

Q2.. M est symétrique à coefficients réels donc M est diagonalisable.

D'après Q1 $2 \in \operatorname{Sp} M$ et $\dim SEP(M,2) \geqslant 3$ (v_1, v_2, v_3 est clairement libre).

Alors il existe un réel α tel que M soit semblable à $\operatorname{Diag}(2,2,2,\alpha)$.

$4 = \operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(\operatorname{Diag}(2,2,2,\alpha)) = 6+\alpha$; $\alpha = -2$.

Donc $\dim SEP(M,2) \geqslant 3$, $\dim SEP(M,-2) \geqslant 1$.

Nécessairement M ne peut avoir d'autres valeurs propres que -2 et 2.

De plus $\dim SEP(M,-2) = 1$ et $\dim SEP(M,2)$.

$M_{4,1}(\mathbb{R}) = SEP(M,-2) \oplus SEP(M,2)$ et $SEP(M,-2)$ et $SEP(M,2)$ sont orthogonaux. Alors $SEP(M,-2) = (SEP(M,2))^{\perp}$.

$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille d'éléments de $SEP(M,2)$ visiblement libre.

B_1 est une base de $SEP(M,2)$ car $\dim SEP(M,2) = 3$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$. $X \in SEP(M,-2) \Leftrightarrow X$ orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$X \in SEP(M,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z+t=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-x \\ 0=x+x-x+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-x \\ t=-x \end{cases}$$

$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $SEP(M,-2)$.

Alors $B = "B_1 \cup B_2"$ est une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $2, 2, 2$ et -2.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base B.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$, P est inversible et $P^{-1} M P = \mathrm{Diag}(2, 2, 2, -2)$.

Q3 * $M^2 = 4 I_4$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{2n} = 4^n I_4$ et $M^{2n+1} = 4^n M$.

Q4 Posons $v_4 = (1, -1, -1, -1)$. Notons $\hat{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\hat{B}$ la base (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbb{R}^4$ (base, ok ?). P est la matrice de passage de $\hat{B}_0$ à $\hat{B}$.

Soit p_1 (resp. p_2) la projection orthogonale sur $SEP(f, 2)$ (resp. $SEP(f, -2)$).

$$M_{\hat{B}}(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_{\hat{B}}(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

** Alors $M_B(p_1) = P\,\mathrm{Diag}(1, 1, 1, 0)\,P^{-1}$ et $M_B(p_2) = P\,\mathrm{Diag}(0, 0, 0, 1)\,P^{-1}$.

* Peut s'obtenir directement ou avec $M^2 = P(\mathrm{Diag}(2, 2, 2, -2))^2 P^{-1}$.

** $$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad M_{\hat{B}}(p_1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad M_{\hat{B}}(p_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 17 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *vu par JF*

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Notons que si f est diagonalisable alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

Supposons f diagonalisable.

1) $\underline{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = E}$.

2) Notons que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

$f(x) = 0_E$ et $\exists t \in E$, $x = f(t)$.

f est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Alors : $\exists (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$, $t = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i$.

$x = f(t) = \sum_{i=1}^{n} t_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda_i e_i$. $\quad 0_E = f(x) = f^2(t) = \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda_i^2 e_i$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i \lambda_i^2 = 0$ car $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i = 0$ ou $\lambda_i^2 = 0$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i = 0$ ou $\lambda_i = 0$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i \lambda_i = 0$.

Alors $x = \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda_i e_i = 0_E$. $\quad \underline{\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}}$.

Si f est diagonalisable : $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

<u>Si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.</u>