R.

Question 9 HEC 2011 S 109

Soit f une endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres. Démontrer que f est diagonalisable.

Cours *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Estimateur sans biais, convergent*

1er cas.. f n'est pas injectif. Alors 0 est valeur propre de f.

Donc f possède trois valeurs propres distinctes et f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3. Alors f est diagonalisable.

2ème cas.. f est injectif. Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et que $\dim \mathbb{R}^3 < +\infty$: f est bijectif.

$f^4 = f^2$ donc en composant deux fois par f^{-1} : $f^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$, ou : $f^2 - Id_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

$X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont -1 et 1. Alors $Sp\, f \subset \{-1, 1\}$.

Comme -1 et 1 sont deux valeurs propres de f : $Sp\, f = \{-1, 1\}$. (1)

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $f^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$ donc f est une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Alors $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \operatorname{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^3}) = SEP(f, 1) \oplus SEP(f, -1)$ (2)

(1) et (2) montrent que f est diagonalisable.

R.

Question 10 HEC 2011 S 112

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

Q1. Montrer que A admet une seule valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer le sous-espace propre associé à λ.

Q3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cours *Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2-2 & 6-2 & -6+2 \\ -3+1 & -2+1 & 2 \\ 3-1 & 2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A. \quad \underline{A^2 + I_3 = 2A} \ !$$

Q1 $A^2 - 2A + I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de A dont le seul zéro est 1 dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}} A \subset \{1\}$

V1 Or A admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

Ainsi 1 est la seule valeur propre de A.

V2 $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$. Supposons que 1 n'est pas valeur propre de A. Alors $A - I_3$ est inversible. Donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = (A - I_3)^2$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles !

Cette contradiction montre que $A \in Sp_{\mathbb{R}} A$.

Ainsi <u>1 est la seule valeur propre de A</u>

Supposons que A soit diagonalisable. Alors $SEP(A,1) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc $3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A,1) = 3 - rg(A - I_3)$; $rg(A - I_3) = 0$.

Alors $A - I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $A = I_3$!!

Donc <u>A n'est pas diagonalisable</u>.

Q2 Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 2z = x \\ -x + z = y \\ x + y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y-z) = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y - z = 0.$$

SEP$(A,1)$ est le plan vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x+y-z=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$SEP(A,1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} ; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de cardinal 2 de SEP$(A,1)$ qui est de dimension 2

Alors $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de SEP$(A,1)$.

Q3 Posons $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. Posons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$
Pour montrer que B est semblable à A il suffit de montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

→ Analyse.. Supposons que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

Alors $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = e'_2$ et $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$.

Donc $e'_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $e'_2 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $e'_2 = (f - \mathrm{Id}_E)(e'_3) \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Ainsi $e'_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $e'_2 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $e'_2 = (f - \mathrm{Id}_E)(e'_3)$.

→ Synthèse, $\mathrm{Sp} f = \mathrm{Sp} A = \{1\}$. Comme $SEP(A,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

$SEP(f,1) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$.

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f - \mathrm{Id}_E) = A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(2e_1 - e_2 + e_3, 2e_1 - e_2 + e_3, -2e_1 + e_2 - e_3)$

$\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(2e_1 - e_2 + e_3)$. Remarquons que $2e_1 - e_2 + e_3 = 2(e_1 + e_3) - (e_2 + e_3) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Posons alors $e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$. Notons que $e'_2 = (f - \mathrm{Id}_E)(e_1)$. Posons alors $e'_3 = e_1$

Posons enfin $e'_1 = e_1 + e_3$.

$e'_1 \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$ donc $\underline{f(e'_1) = e'_1}$.

$e'_2 \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$ donc $\underline{f(e'_2) = e'_2}$.

$e'_2 = (f - Id_E)(e_1) = (f - Id_E)(e'_3)$; $\underline{f(e'_3) = e'_2 + e'_3}$.

Montrons alors que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E. Comme le cardinal de $\mathcal{B}'$ coïncide avec la dimension de E il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \sigma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \sigma e'_3 = 0_E$.

$\alpha(e_1 + e_3) + \beta(2e_1 - e_2 + e_3) + \sigma e_1 = 0_E$

$(\alpha + 2\beta + \sigma) e_1 - \beta e_2 + (\alpha + \beta) e_3 = 0_E$. Comme (e_1, e_2, e_3) est libre :

$\alpha + 2\beta + \sigma = -\beta = \alpha + \beta = 0$. Alors $\beta = 0$, $\alpha = 0$ et $\sigma = 0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. De plus $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

$M_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$ donc <u>A et B sont semblables</u>.

<u>Remarque</u>.. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$B = M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P = P^{-1} A P$. $\underline{B = P^{-1} A P}$

<u>Exercice 1</u>.. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

<u>Exercice 2</u>.. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Question 3 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE $n \in [\![2,+\infty[\![$

Soient x et y deux réels et F l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ F(M) = x\,M + y\,{}^tM$.

Q1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un projecteur.

Q2. Donner les valeurs propres de F.

Q3. F est-il diagonalisable ?

Q1 $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$: $F^2(M) = F(F(M)) = x\,F(M) + y\,{}^tF(M) = x(xM + y\,{}^tM) + y\,{}^t(xM + y\,{}^tM)$.

$\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $F^2(M) = x^2M + xy\,{}^tM + yx\,{}^tM + y^2M = (x^2+y^2)M + 2xy\,{}^tM$

$\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $F^2(M) = (x^2+y^2)M + 2x(F(M) - xM) = (y^2-x^2)M + 2x\,F(M)$. (A)

* Supposons que F soit un projecteur. Alors $F \circ F = F$.

$\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $(y^2-x^2)M + 2x\,F(M) = F(M)$. ou $(y^2-x^2)M = (1-2x)\,F(M)$.

En particulier $(y^2-x^2)I_n = (1-2x)(xI_n + y\,{}^tI_n) = (1-2x)(x+y)I_n$.

Comme $I_n \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$: $y^2-x^2 = (1-2x)(x+y) = x - 2x^2 + y - 2xy$. $x^2+y^2+2xy-x-y=0$

$n \geqslant 2$. Il existe une matrice antisymétrique J non nulle de $M_n(\mathbb{R})$ (ex : $J = \begin{pmatrix} (0) & & -1 \\ & 0 & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}$)
$({}^tJ = -J)$

Alors $(y^2-x^2)J = (1-2x)(xJ + y\,{}^tJ) \overset{\downarrow}{=} (1-2x)(x-y)J$ et $J \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $y^2-x^2 = (1-2x)(x-y) = x - 2x^2 - y + 2xy$; $x^2+y^2-2xy-x+y=0$.

$\begin{cases} x^2+y^2+2xy-x-y=0 \\ x^2+y^2-2xy-x+y=0 \end{cases}$. Par différence on obtient $4xy - 2y = 0$.

donc $y=0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

1er cas.. $y=0$. Alors $x^2-x=0$. $x=0$ ou $x=1$.

2e cas.. $y \neq 0$. Alors $x = \frac{1}{2}$. $0 = \frac{1}{4} + y^2 + y - \frac{1}{2} - y$; $y^2 = \frac{1}{4}$. $y = \frac{1}{2}$ ou $y = -\frac{1}{2}$

Si F est un projecteur : $(x,y) \in \mathcal{S} = \left\{(0,0), (1,0), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$.

* Réciproquement supposons que $(x,y) \in \mathcal{S} = \left\{(0,0), (1,0), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$.

1) F est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$

2) 1er cas.. $x=y=0$. Alors $F = 0_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))}$ donc $F^2 = 0_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))} = F$.

2ème cas.. $(x,y)=(1,0)$. Alors $F=\mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}$. $F\circ F=\mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}=F$.

3ème cas.. $(x,y)\in\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$. Alors $y^2-x^2=0$ et $2x=1$.

(▲) donc alors $\forall M\in M_n(\mathbb{R}),\ F^2(M)=F(M)$. $F^2=F$.

Si $(x,y)\in S=\{(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$ F est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ tel que $F^2=F$ donc F est un projecteur.

Finalement F est un projecteur si et seulement si $(x,y)\in\{(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$.

Q2 (▲) donc $\forall M\in M_n(\mathbb{R}),\ F^2(M)-2xF(M)+(x^2-y^2)M=0_{M_n(\mathbb{R})}$

donc $\forall M\in M_n(\mathbb{R}),\ (F^2-2xF+(x^2-y^2)\mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})})(M)=0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Alors $F^2-2xF+(x^2-y^2)\mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}=0_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))}$. $P=X^2-2xX+x^2-y^2$ est un polynôme annulateur de F. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\alpha^2-2x\alpha+x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (\alpha-x)^2=y^2 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-x=y\\ \text{ou}\\ \alpha-x=-y\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=x+y$ ou $\alpha=x-y$.

Les zéros de P sont $x+y$ et $x-y$. $\mathrm{Sp}F\subset\{x+y,x-y\}$.

$F(I_n)=(x+y)I_n$ et $I_n\neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$; $x+y\in\mathrm{Sp}F$.

Reprenons la matrice antisymétrique J non nulle.

$F(J)=(x-y)J$ et $J\neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$; $x-y\in\mathrm{Sp}F$.

Finalement $\mathrm{Sp}F=\{x+y,x-y\}$.

Q3 1er cas.. $y=0$. Alors $F=x\,\mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}$. F est une homothétie vectorielle.

F est diagonalisable.

2e cas.. $y\neq 0$. $\mathrm{Sp}F=\{x+y,x-y\}$ et $x+y\neq x-y$.

Soit $M\in M_n(\mathbb{R})$. $F(M)=(x+y)M \Leftrightarrow xM+y\,{}^tM=xM+yM \Leftrightarrow y({}^tM-M)=0_{M_n(\mathbb{R})}$

$$F(M)=(x+y)M \underset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} {}^tM-M=0_{M_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow {}^tM=M.$$

$F(M) = (x-y)M \Leftrightarrow xM + y\,{}^tM = xM - yM \Leftrightarrow y\,{}^tM = -yM \underset{\text{car } y\neq 0}{\Leftrightarrow} {}^tM = -M$.

Ainsi $SEP(F, x+y)$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n$ de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$

$SEP(F, x-y)$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n$ de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

→ $SEP(F, x+y)$ et $SEP(F, x-y)$ sont en somme directe car $x+y \neq x-y$. Ainsi $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont en somme directe.

→ . $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n \subset M_n(\mathbb{R})$

. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Posons $M_1 = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $M_2 = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

- $M = M_1 + M_2$
- ${}^tM_1 = \frac{1}{2}({}^tM + M) = M_1$ donc $M_1 \in \mathcal{S}_n$
- ${}^tM_2 = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -M_2$ donc $M_2 \in \mathcal{A}_n$

Alors $M \in \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

On peut ainsi dire que $M_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

Finalement $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = SEP(F, x+y) \oplus SEP(F, x-y)$.

<u>F est diagonalisable.</u>

Question 7 **HEC 2011** V. MESKHI

Image, noyau, valeur propre de $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Plus deux autres questions non lues.

Question de cours : Théorème de la limite centrée. Définition d'un intervalle de confiance.

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AX=0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\iff\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}y=0\\x+z=0\\x+y+z=0\end{cases}\iff\begin{cases}z=-x\\y=0\end{cases}$.

Ainsi $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$. 0 est valeur propre de A et $SEP(A,0)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$\operatorname{Im}A=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

$\dim\operatorname{Im}A=3-\dim\operatorname{Ker}A=3-1=2$. De plus $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}A$ ayant pour cardinal 2. Alors $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Im}A$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A-\lambda I_3$. $A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}$

$L_1\leftrightarrow L_3$ donne $\begin{pmatrix}1&1&1-\lambda\\1&-\lambda&1\\-\lambda&1&0\end{pmatrix}$

$L_2\leftarrow L_2-L_1$ et $L_3\leftarrow L_3+\lambda L_1$ donne : $\begin{pmatrix}1&1&1-\lambda\\0&-\lambda-1&\lambda\\0&\lambda+1&\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}$. $L_3\leftarrow L_3+L_2$ donne :

$\begin{pmatrix}1&1&1-\lambda\\0&-\lambda-1&\lambda\\0&0&2\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}1&1&1-\lambda\\0&-\lambda-1&\lambda\\0&0&2\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}$ est une réduite de Gauss de $A-\lambda I_3$.

$\lambda\in Sp\,A\iff A-\lambda I_3$ non inversible $\iff\begin{pmatrix}1&1&1-\lambda\\0&-\lambda-1&\lambda\\0&0&2\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}$ non inversible $\iff\begin{cases}-\lambda-1=0\\\text{ou}\\\lambda(2-\lambda)=0\end{cases}$

$\lambda\in Sp\,A\iff\lambda=-1$ ou $\lambda=0$ ou $\lambda=2$. $Sp\,A=\{-1,0,2\}$.

__Remarque..__ A est diagonalisable car $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A admet trois valeurs propres distinctes.

__Exercice..__ Diagonaliser A.

R

Question 2 **HEC 2012-2-S9** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $U = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On suppose $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Q1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A

Q2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Question de cours. Sommes de Riemann.

Q1 Supposons que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est symétrique donc <u>A est diagonalisable</u>.

Qui peut le plus peut le moins. Pour donner plus d'épaisseur à Q2 nous allons chercher les valeurs propres de A dans le cas général c'est à dire avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ notons $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \dim \operatorname{Vect}\left(a_1 E_n, a_2 E_n, \dots, a_{n-1}E_{n}, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)$.

Comme $a_1 \neq 0$: $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\left(E_n, a_2 E_n, \dots, a_{n-1}E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right) = \dim \operatorname{Vect}\left(E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)$.

Finalement $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_n, V)$ avec $V = \sum_{k=1}^{n-1} a_k E_k$. Notons que (E_n, V) est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha E_n + \beta V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

$\alpha E_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta a_k E_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. La liberté de $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ donne : $\alpha = \beta a_1 = \beta a_2 = \dots = \beta a_{n-1} = 0$

Comme $a_1 \neq 0$: $\alpha = \beta = 0$. Ceci achève de montrer que (E_n, V) est libre.

Alors $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_n, V) = 2 < n$. A n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de A.

De plus $\dim SEP(A, 0) = n - \operatorname{rg} A = n - 2$.

<u>0 est valeur propre de A et $\dim SEP(A,0) = n-2$.</u> Cherchons les valeurs propres non nulles de A. Soit $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ a_2 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i \times \frac{a_i}{\lambda} x_n + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ x_i = \dfrac{a_i}{\lambda} x_n \\ \text{et} \\ \left(\lambda^2 - a_n \lambda - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2\right) x_n = 0 \end{cases}$$

1er cas. $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$.

Alors $AX=\lambda X \iff \begin{cases} \forall k\in [\![1,n-1]\!],\ x_k = \frac{a_k}{\lambda} x_n \\ \text{et} \\ x_n = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \iff X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Donc λ n'est pas valeur propre de A.

2ème cas. $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$.

$AX=\lambda X \iff \forall k\in [\![1,n-1]\!],\ x_k = \frac{a_k}{\lambda} x_n$.

$X_0 = \begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ a_2/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX_0 = \lambda X_0$. De plus $AX=\lambda X \iff X = x_n X_0$.

Ainsi λ est valeur propre de A et $SEP(A,\lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ a_2/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi 1) les sous-espaces propres associés à des valeurs propres non nulles de A, s'il en existe, sont des droites vectorielles

2) Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A \iff \lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$ (1)

Envisageons deux cas.

1° * **$\mathbb{K}=\mathbb{R}$.** Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. (1) $\iff \left(\lambda - \frac{a_n}{2}\right)^2 = \frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$.

(1) $\iff \lambda = \frac{a_n}{2} + \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ ou $\lambda = \frac{a_n}{2} - \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$.

$0^2 - 0\times\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 > 0$ car $a_1 \neq 0$ donc 0 n'est pas solution de (1)

Alors $\frac{a_n}{2} + \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ et $\frac{a_n}{2} - \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ sont deux réels non nuls.

De plus ces réels sont distincts car $\sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2} > 0$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, A admet exactement trois valeurs propres distinctes qui sont :

0, $\frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$ et $\frac{a_n}{2}-\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$. Ceci achève Q1.

(Q2) Supposons $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

0 solution de (1) $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$.

Si $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$ la seule solution non nulle de (1) est a_n.

Alors $Sp\,A=\{0,a_n\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,a_n)=n-2+1=n-1<n$.

Ainsi A n'est pas diagonalisable.

Supposons $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$. 0 n'est pas solution de (1).

Le discriminant de (1) est $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2$.

1er cas.. $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$. (1) admet une solution et une seule : $\frac{a_n}{2}$

Alors $Sp\,A=\{0,\frac{a_n}{2}\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\frac{a_n}{2})=n-2+1=n-1<1$.

A n'est pas diagonalisable.

2e cas.. $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$ (1) admet deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 et ces solutions ne sont pas nulles.

Alors $Sp\,A=\{0,\lambda_1,\lambda_2\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\lambda_1)+\dim SEP(A,\lambda_2)=n-2+1+1=n$.

A est diagonalisable.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$ et $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$

Par exemple

pour $a_1=i$, $a_2=a_3=\dots=a_{n-1}=0$ et $a_n=2$: A n'est pas diagonalisable.

Ainsi si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, A n'est pas nécessairement diagonalisable.

R.

Question 5 **HEC 2012-5-S20** $\boxed{\text{F 2}}$

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Question de cours. *Théorème de la limite centrée.*

Q1 • Soit $f \in E$. Posons $F = T(f)$ et montrons que $F \in E$.

Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $P_f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. P_f est la primitive de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0 (f est continue sur $[0,+\infty[$).

P_f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Alors par produit $F = T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Donc F est largement continue sur $]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{P_f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{P_f(x)-P_f(0)}{x-0} = P_f'(0) = f(0)$. Ainsi F est continue en 0.

F est donc continue sur $[0,+\infty[$. $F \in E$.

$\forall f \in E$, $T(f) \in E$. <u>T est une application de E dans E.</u>

• Montrons que T est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f,g) \in E^2$.

→ $T(\lambda f+g)(0) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0) = (\lambda T(f) + T(g))(0)$.

→ Soit $x \in]0,+\infty[$. $T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f+g)(u)\,du = \lambda\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt$.

$T(\lambda f+g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x)$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(\lambda f+g)(x) = (\lambda T(f)+T(g))(x)$. $T(\lambda f+g) = \lambda T(f) + T(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in E^2$, $T(\lambda f+g) = \lambda T(f) + T(g)$. <u>$T$ est linéaire.</u>

Finalement <u>T est un endomorphisme de E</u>

• Soit $f \in \operatorname{Ker} T$. $T(f) = 0_E$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = 0$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)dt=0$. En dérivant on obtient : $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x)=0$. $f=0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} T = \{0_E\}$. T est injectif.

Remarque.. Nous avons vu que si $f \in E$, $T(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
les éléments de Im T sont donc de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $h(x)=|x-1|$.
h est continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1. Ainsi $h \in E$ mais $h \notin \operatorname{Im} T$
Alors T n'est pas surjectif.

Exercice.. Montrer que Im T est l'ensemble des éléments g de E tels que :

1) g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$;

2) $\lim_{x \to 0^+} (x g'(x)) = 0$.

Q2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $E_\lambda = \{f \in E \mid T(f) = \lambda f\}$. Notons que $E_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

Si $\lambda = 0$: $E_\lambda = E_0 = \operatorname{Ker} T = \{0_E\}$. Donc nous supposerons dans ce qui suit : $\lambda \neq 0$.

Analysons un peu. Partons d'un élément f appartenant à E_λ.

Notons de nouveau P_f la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

$T(f)(0) = \lambda f(0)$ donc $f(0) = \lambda f(0)$. $(\lambda-1) f(0) = 0$. Notons que si $\lambda \neq 1$: $f(0)=0$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f'(x) = f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{\lambda x} P_f(x)$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f'(x) - \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = 0$.

Notons que $x \mapsto \frac{1}{\lambda} \ln x$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction continue sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{\lambda x}$.

Le cours permet de dire que : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f(x) = C\, e^{\frac{1}{\lambda}\ln x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = P_f'(x) = \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = C \frac{1}{\lambda x} e^{\frac{1}{\lambda}\ln x} = C \frac{1}{\lambda x} x^{1/\lambda} = \frac{C}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Donc $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = d\, x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ et $f(0)=0$ si $\lambda \neq 1$. Poursuivons l'analyse.

f est continue en 0 donc $f(0) = \lim_{x \to 0^+} \left(\alpha x^{\frac{1}{\lambda}-1} \right)$. Notons que cette limite est finie !

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ $\quad \lim_{x \to 0^+} \left(x^{\frac{1}{\lambda}-1} \right) = +\infty$ donc nécessairement $\alpha = 0$.

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ $\quad f(0) = \lim_{x \to 0^+} (\alpha x^0) = \alpha$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \alpha x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \alpha x^0 = \alpha$.

donc $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \alpha$. Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = 1$. $\underline{f = \alpha f_1}$

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$ $\quad$ Alors $f(0) = 0$ car $\lambda \neq 1$ et ainsi $f(0) = \alpha \times 0$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \alpha \times x^{\frac{1}{\lambda}-1}$

Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. $\underline{f = \alpha f_\lambda}$.

Résumons cette analyse.

Si $\lambda = 0$: $S_\lambda = \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$: $S_\lambda \subset \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ donc si $\lambda = 1$:

$S_1 \subset \text{Vect}(f_1)$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$, $S_\lambda \subset \text{Vect}(f_\lambda)$.

Notons que $0_E \in S_\lambda$, que $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0 \iff \frac{1-\lambda}{\lambda} < 0 \iff \lambda \in]-\infty, 0[\cup]1,+\infty[$ et

$\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0 \iff \lambda \in]0,1[$.

Alors 1°/ $\forall \lambda \in]-\infty, 0] \cup]1,+\infty[$, $S_\lambda = \{0_E\}$.

2°/ $S_1 \subset \text{Vect}(f_1)$ où $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = 1$.

3°/ $\forall \lambda \in]0,1[$, $S_\lambda \subset \text{Vect}(f_\lambda)$ où $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Reste à envisager deux réciproques.

Notons que $S_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \, \text{Id}_E)$ donc S_λ est un sous-espace vectoriel de E ceci pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

f_1 est continue sur $[0,\infty[$, $f_1 \in E$. $\quad T(f_1)(0) = f_1(0)$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $T(f_1)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 1 \, dt = \frac{1}{x} \times x = 1 = f_1(x)$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(f_1)(x) = 1 \times f_1(x)$. $T(f_1) = 1 \times f_1$. $\quad f_1 \in S_1$.

Donc $\mathrm{Vect}(f_1) \subset \mathcal{E}_1$. Alors $\mathcal{E}_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$.

Soit $\lambda \in]0,1[$. $\mathcal{E}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$. Pour montrer que $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{E}_\lambda$ il suffit de montrer que $f_\lambda \in \mathcal{E}_\lambda$ car $\mathcal{E}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E.

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}.$$

f_λ est continue sur $]0,+\infty[$. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} x^{\frac{1}{\lambda}-1} \underset{\frac{1}{\lambda}-1>0}{=} 0 = f_\lambda(0)$ donc f_λ est continue en 0.

Ainsi f_λ est continue sur $[0,+\infty[$. $f_\lambda \in E$.

$T(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0) = 0 = \lambda f_\lambda(0)$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

Soit $\varepsilon \in]0,+\infty[$. $\displaystyle\int_\varepsilon^x f_\lambda(t)\,dt = \int_\varepsilon^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \left[\frac{t^{1/\lambda}}{1/\lambda}\right]_\varepsilon^x = \lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]$.

Alors $\displaystyle\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\mapsto 0^+}\left(\lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]\right) = \lambda x^{1/\lambda}$ car $\frac{1}{\lambda} > 0$.

Alors $\displaystyle T(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{x}\lambda x^{1/\lambda} = \lambda\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f_\lambda(x)$.

Finalement $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(f_\lambda)(x) = \lambda f_\lambda(x)$. $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$; $f_\lambda \in \mathcal{E}_\lambda$.

Alors $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{E}_\lambda$ et finalement $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

Conclusion :
- $\forall \lambda \in]-\infty,0] \cup]1,+\infty[$, $\mathcal{E}_\lambda = \{0_E\}$
- $\mathcal{E}_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$ où f_1 est l'élément de E défini par $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = 1$
- Si $\lambda \in]0,1[$, $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où f_λ est l'élément de E défini par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Ainsi
- $\rightarrow$ $\mathrm{Sp}\,T =]0,1]$
- $\rightarrow$ $\mathrm{SEP}(T,\lambda) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

Remarque.- On aurait sans doute pu poser $\forall \lambda \in]0,1]$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ ...