Question 4 **ESCP 2004** On confond polynôme et fonction polynôme. Soit f défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$f(P) : x \mapsto \int_0^1 P(x+t)\,dt$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

• f est linéaire

• $P = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell$. $\quad f(P)(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \left[\frac{(x+t)^{\ell+1}}{\ell+1}\right]_0^1 = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_\ell}{\ell+1} \underbrace{\left[(x+1)^{\ell+1} - x^\ell\right]}_{\deg \ell-1}$

$f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

• $f(X^i) = \frac{1}{i+1}\left[(X+1)^{i+1} - X^{i+1}\right] = \frac{1}{i+1} \sum_{k=0}^{i} \binom{i+1}{k} X^k$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure et tous les éléments de sa diagonale valent 1.

$\mathrm{Sp}\, f = \{1\}$

Alors f est diagonalisable ssi $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Si $n = 0$ c'est vrai

Si $n \geqslant 1$ $\quad f(X) = \frac{1}{2}\left[(X+1)^2 - X^2\right] = \frac{1}{2}(2X+1) = X + \frac{1}{2} \neq X$!

f est diagonalisable ssi $n = 0$.

R

Question 1 **ESCP 2005** Soit f continue sur $[0, +\infty[$ telle que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,dt$.

On définit la fonction H par : $\forall x \in [0, +\infty[,\ H(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)\,dt$.

Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, calculer H'. En déduire H puis f.

H est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $H'(x) = -e^{-x}\int_0^x f(t)\,dt + e^{-x} f(x) = e^{-x}\left[f(x) - \int_0^x f(t)\,dt\right] \leqslant 0$

H est décroissante.

H est positive

$H(0) = 0$

Alors H est nulle. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$.

En dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = 0$. f est nulle.

R

Question 4 ESCP 2007

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1} n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, e^{t/2} dt$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n\, n!}$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant (1-t)^n e^{t/2} \leqslant e^{t/2} \leqslant e^{1/2}$ et $\dfrac{1}{2^{n+1} n!} \geqslant 0$.

Alors $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1} n!} (1-t)^n e^{t/2} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1} n!} e^{1/2}$.

En intégrant il vient $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1} n!} e^{1/2}$ car $0 \leqslant 1$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1} n!} e^{1/2} \right) = 0$. Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Pour $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = e^{t/2}$. φ est de classe C^∞ sur $[0,1]$. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1]$, $\varphi^{(k)}(t) = \dfrac{1}{2^k} e^{t/2}$.

La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\, dt$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{1/2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \frac{1}{2^{n+1}} e^{t/2} dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} + I_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = e^{1/2} - I_n$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = e^{1/2}$

La série de terme général $\dfrac{1}{2^n n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} = e^{1/2}$, un vrai scoop !

R

R

Question 5 **ESCP 2010** $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$.

On définit la fonction F sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en posant : $F(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{x f(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notons que pour tout x dans $]0,+\infty[$, $t\mapsto \dfrac{x f(t)}{x+t}$ est continue sur $[0,1]$.

Donc F est définie sur $]0,+\infty[$. Soit $(x,y)\in(]0,+\infty[)^2$.

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_0^1 \left(\frac{x}{x+t}-\frac{y}{y+t}\right) f(t)\,dt\right| \underset{0\leq 1}{\leq} \int_0^1 \left|\frac{x(y+t)-y(x+t)}{(x+t)(y+t)}\right| |f(t)|\,dt = \int_0^1 \frac{|x-y|\,t}{(x+t)(y+t)}|f(t)|\,dt$$

$\forall t\in[0,1]$, $\dfrac{t}{y+t}\leq 1$ et $\dfrac{|x-y|}{(x+t)}|f(t)|\geq 0$.

Donc, comme $0\leq 1$, $\displaystyle |F(x)-F(y)| \leq \int_0^1 \frac{|x-y|}{x+t}|f(t)|\,dt = |x-y|\int_0^1 \frac{|f(t)|}{x+t}\,dt$.

Or $\displaystyle\lim_{y\mapsto x}\left(|x-y|\int_0^1 \frac{|f(t)|}{x+t}\,dt\right)=0$.

Donc par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{y\mapsto x}(F(y)-F(x))=0$ donc $\displaystyle\lim_{y\mapsto x} F(y)=F(x)$.

Ainsi <u>F est continue en x et ceci pour tout x dans $]0,+\infty[$.</u>

Soit $x\in\,]0,+\infty[$. Posons $I=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

$$|I-F(x)| = \left|\int_0^1 \left(1-\frac{x}{x+t}\right) f(t)\,dt\right| \underset{0\leq 1}{\leq} \int_0^1 \left|\frac{x+t-x}{x+t}\right| |f(t)|\,dt = \int_0^1 \frac{t}{x+t}|f(t)|\,dt$$

$\forall t\in[0,1]$, $\dfrac{1}{x+t}\leq\dfrac{1}{x}$ et $t|f(t)|\geq 0$.

Comme $0\leq 1$: $\displaystyle |I-F(x)| \leq \int_0^1 \frac{1}{x}\,t|f(t)|\,dt = \frac{1}{x}\int_0^1 t|f(t)|\,dt$.

$\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^1 t|f(t)|\,dt\right)=0$ donc par encadrement :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} F(x) = I = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Question 18 **ESCP 2010** T. VERGER $\boxed{\textbf{F1}}$

f est une application continue de $[a,b]$ $(a<b)$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ si et seulement si f garde un signe constant sur $[a,b]$.

---

* Supposons que f garde un signe constant sur $[a,b]$. Alors $\exists\, \varepsilon \in \{-1,1\}$, $|f| = \varepsilon f$.

$\varepsilon |f| = \varepsilon^2 f = f$. Ainsi $f = \varepsilon |f|$.

$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b \varepsilon |f(t)|\,dt\right| = |\varepsilon|\left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right| = \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$

↑ $|f|$ est positive et $a<b$.

Donc $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

* Supposons que $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$. Alors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$ ou $-\int_a^b |f(t)|\,dt$

Donc $\int_a^b f(t)\,dt = \varepsilon \int_a^b |f(t)|\,dt$ avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$ ou $\int_a^b |f(t)|\,dt = \varepsilon \int_a^b f(t)\,dt$.

Alors $\int_a^b (|f| - \varepsilon f)(t)\,dt = 0$.

1) $\int_a^b (|f| - \varepsilon f)(t)\,dt = 0$

2) $a \neq b$

3) $|f| - \varepsilon f$ est continue sur $[a,b]$

4) $|f| - \varepsilon f \geqslant 0$ car $f \leqslant |f|$ et $-f \leqslant |f|$.

Dans ces conditions $|f| - \varepsilon f$ est nulle sur $[a,b]$. $\varepsilon f = |f|$. Donc $f = \varepsilon |f|$.

Alors $f \geqslant 0$ ou $f \leqslant 0$. f garde un signe constant sur $[a,b]$.

R.

Question 9 ESCP 2011

f est une application continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,dt$.

On pose : $\forall x \in [0, +\infty[,\ h(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)\,dt$.

Q1. Montrer que la fonction h est décroissante.

Q2. En déduire que la fonction f est identiquement nulle.

Q1 $g : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0 (f est continue sur $[0,+\infty[$). Ainsi g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $g' = f$.

Par produit h est dérivable sur $[0,+\infty[$ car $x \mapsto e^{-x}$ et g sont dérivables sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ h'(x) = -e^{-x}\int_0^x f(t)\,dt + e^{-x} f(x) = -e^{-x}\left[\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\right]$

De plus $\forall x \in [0,+\infty[,\ -e^{-x} \leqslant 0$ et $\int_0^x f(t)\,dt - f(x) \geqslant 0$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ h'(x) \leqslant 0$. <u>$h$ est décroissante sur $[0,+\infty[$</u>

Q2 . h est décroissante sur $[0,+\infty[$ et $h(0) = 0$. Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ h(x) \leqslant 0$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ e^{-x}\int_0^x f(t)\,dt \leqslant 0$ et $e^{-x} > 0$.

Donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ \int_0^x f(t)\,dt \leqslant 0$. Or $\forall x \in [0,+\infty[,\ \int_0^x f(t)\,dt \geqslant f(x) \geqslant 0$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[,\ \int_0^x f(t)\,dt = 0$. Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 0$.

<u>$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = 0$. f est identiquement nulle.</u>

Question 10 ESCP 2011

a est un réel et f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\underset{t\in\mathbb{R}}{\text{Sup}}\,|f''(t)|$ existe. On pose $M = \underset{t\in\mathbb{R}}{\text{Sup}}\,|f''(t)|$.

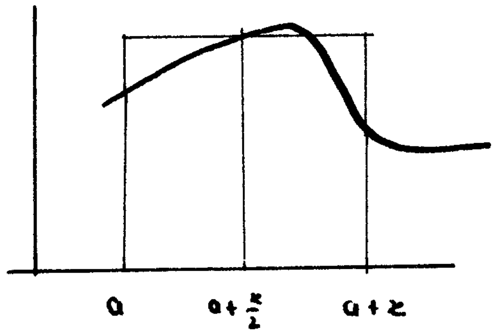
On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \displaystyle\int_a^{a+x} f(u)\,\mathrm{d}u - x\, f\left(a + \frac{x}{2}\right)$.

Q1. Interpréter géométriquement le nombre $G(x)$, pour f positive et $x > 0$.

Q2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ |G'(x)| \leqslant M\,\dfrac{x^2}{4}$. ... ou $|G'(x)| \leqslant M\,\dfrac{x^2}{8}$.

Q3. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|G(x)| \leqslant M\,\dfrac{|x|^3}{12}$.

Q1 $G(x)$ est la différence entre l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=a$, $x=a+x$ et $y=0$, et l'aire du rectangle limité par les droites d'équation $x=a$, $x=a+x$, $y=0$ et $y=f(a+\frac{x}{2})$.



$G(x)$ est l'erreur que l'on commet en remplaçant $\int_a^{a+x} f(t)\,dt$ par $\int_a^{a+x} g(t)\,dt$ où g est la fonction constante qui coïncide avec f au milieu du segment $[a, a+x]$. Ce qui est en relation avec "la méthode des points moyens" qui donne une valeur approchée d'une intégrale.

Q2 Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. F est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in\mathbb{R},\ G(x) = F(a+x) - F(a) - x\, f(a+\frac{x}{2})$. Alors G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in\mathbb{R},\ G'(x) = f(a+x) - f(a+\frac{x}{2}) - \frac{x}{2} f'(a+\frac{x}{2})$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ G''(x) = f'(a+x) - \frac{1}{2} f'(a+\frac{x}{2}) - \frac{1}{2} f'(a+\frac{x}{2}) - \frac{x}{4} f''(a+\frac{x}{2})$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ G''(x) = f'(a+x) - f'(a+\frac{x}{2}) - \frac{x}{4} f''(a+\frac{x}{2})$.

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $M = \underset{t\in\mathbb{R}}{\text{Sup}}\,|f''(t)|$ existe. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne : $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ |f(v) - f(u) - (v-u) f'(u)| \leqslant \dfrac{|v-u|^2}{2} \underset{z\in[u,v]}{\max} |f''(z)| \leqslant M\,\dfrac{(v-u)^2}{2}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f(a+x) - f(a+\frac{x}{2}) - (a+x-(a+\frac{x}{2}))f'(a+\frac{x}{2})\right| \leq M \dfrac{(a+x-(a+\frac{x}{2}))^2}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f(a+x) - f(a+\frac{x}{2}) - \frac{x}{2} f'(a+\frac{x}{2})\right| \leq M \dfrac{x^2}{8} \leq M \dfrac{x^2}{4}$!!

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $|G'(x)| \leq M \dfrac{x^2}{8}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $|G'(x)| \leq M \dfrac{x^2}{4}$. !!

Q3 Notons que $G(0) = 0$.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|G(x)| = |G(x) - G(0)| = \left|\int_0^x G'(t)\,dt\right| \overset{x\geq 0}{\leq} \int_0^x |G'(t)|\,dt \overset{x\geq 0}{\leq} \int_0^x \dfrac{t^2}{8}\,dt = \dfrac{x^3}{24} = \dfrac{|x|^3}{24}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $|G(x)| = |G(x) - G(0)| = \left|\int_0^x G'(t)\,dt\right| = \left|\int_x^0 G'(t)\,dt\right| \underset{x\leq 0}{\leq} \int_x^0 |G'(t)|\,dt \underset{x\leq 0}{\leq} \int_x^0 \dfrac{t^2}{8}\,dt = -\dfrac{x^3}{24} = \dfrac{|x|^3}{24}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $|G(x)| \leq \dfrac{|x|^3}{24}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $|G(x)| \leq \dfrac{|x|^3}{12}$!!

Question 16 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ **S. TEIAR**

f est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(1)=0$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

Q1. Nature de la suite de terme général u_n.

Q2. Nature de la série de terme général u_n.

Q1. $|f|$ est continue sur le segment donc $|f|$ possède un maximum sur $[0,1]$ que nous noterons M.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$0 \leqslant |u_n| = \left|\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right| \underset{\substack{\uparrow \\ 0\leqslant 1}}{\leqslant} \int_0^1 |t^n f(t)|\,dt = \int_0^1 |t^n|\,|f(t)|\,dt = \int_0^1 t^n |f(t)|\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ 0\leqslant 1 \\ \forall t\in[0,1],\ |f(t)|\leqslant M \text{ et } t^n \geqslant 0}}{\leqslant} \int_0^1 M\, t^n\,dt$$

$0 \leqslant |u_n| \leqslant M \displaystyle\int_0^1 t^n\,dt = \frac{M}{n+1}$ ... et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$ donc $\underline{\underline{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}}$ ... par encadrement. $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 0.}}$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto t^{n+1}$ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ceci justifie l'intégration par parties suivante.

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} f'(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ f(1)=0}}{=} -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt.$$

$$\underline{\underline{|(n+1)\,u_n|}} = \left|-\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt\right| \underset{\substack{\uparrow \\ 0\leqslant 1}}{\leqslant} \int_0^1 |t^{n+1} f'(t)|\,dt = \int_0^1 |t^{n+1}|\,|f'(t)|\,dt = \int_0^1 t^{n+1} |f'(t)|\,dt.$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ainsi f' est continue sur le segment $[0,1]$. $|f'|$ également. Alors $|f'|$ possède un maximum sur $[0,1]$ que nous noterons M'.

$$(n+1)|u_n| = |(n+1)u_n| \leqslant \int_0^1 t^{n+1}|f'(t)|\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ 0\leqslant 1 \\ \forall t\in[0,1],\ |f'(t)|\leqslant M' \text{ et } t^{n+1}\geqslant 0}}{\leqslant} M'\int_0^1 t^{n+1}\,dt = M' \times \frac{1}{n+2}. \text{ Donc } |u_n| \leqslant \frac{M'}{(n+1)(n+2)}.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n| \leqslant \dfrac{M'}{(n+1)(n+2)} \leqslant \dfrac{M'}{n^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{M'}{n^2}$ et la série de terme général $\dfrac{M'}{n^2}$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|u_n|$ converge.

$\underline{\underline{\text{La série de terme général } u_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}}}$

Question 25 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F}}$ Obtenue par un élève.

On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{u_n} (1 - e^{-t})\, dt$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Montrer que la série de terme général u_n converge.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = [t + e^{-t}]_0^{u_n} = u_n + e^{-u_n} - 1$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geqslant -x + 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-u_n} \geqslant -u_n + 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} - 1 \geqslant 0$.

Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} - 1 \leqslant 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $-u_n \leqslant 0$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante}}}$.

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge}}}$.

Notons ℓ sa limite. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} - 1$.

En passant à la limite il vient $0 \leqslant \ell$ et $\ell = \ell + e^{-\ell} - 1$.

Alors $e^{-\ell} - 1 = 0$; $e^{-\ell} = 1$; $-\ell = \ln 1 = 0$; $\ell = 0$. $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 0}}$.

$\underline{\underline{\text{V1}}}$ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$. Montrons la pour $n+1$.

  Nous savons déjà que $u_{n+1} \geqslant 0$. Supposons que $u_{n+1} = 0$.

  Alors $\displaystyle\int_0^{u_n} (1 - e^{-t})\, dt = 0$. De plus $u_n > 0$ et $t \mapsto 1 - e^{-t}$ est continue

  et positive sur $[0, u_n]$. Alors $\forall t \in [0, u_n]$, $1 - e^{-t} = 0$.

  $\forall t \in [0, u_n]$, $e^{-t} = 1$. $\forall t \in [0, u_n]$, $t = 0$!! Ceci est impossible car $u_n > 0$.

  Ceci achève la récurrence. $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - e^{-u_n}$. Alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - e^{-0} = 0$.

R

Alors $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.

donc $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} u_p$.

donc $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $0 \leq u_n \leq (2^p u_p)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général u_n.

V2 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ et $\lim_{n \to +\infty} (u_n - u_0) = -u_0$.

Alors la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. Il en est de même pour la série de terme général $u_n - u_{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $u_n - u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = -(e^{(-u_n)} - 1) \underset{n \to +\infty}{\sim} -(-u_n) = u_n$.

donc
- $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n - u_{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$
- La série de terme général $u_n - u_{n+1}$ converge.

Alors les règles de comparaison des séries à termes positifs montre la convergence de la série de terme général u_n.

<u>La série de terme général u_n converge.</u>

Question 1 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F2}}$

a) Soit $u \geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u-1$.

b) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0, f(x) > 1$.

On suppose que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) \geqslant \dfrac{1}{\ln(f(x))}$. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}$.

Déjà vu à l'ESCP en 2010.

---

a) ln est concave sur $]0,+\infty[$. Alors sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes. En particulier de celle au point d'abscisse 1.

Ainsi $\forall u \in]0,+\infty[$, $\ln u \leq (u-1)\times \ln' 1 + \ln 1 = (u-1)\times \frac{1}{1} + 0 = u-1$.

Donc $\forall u \in]0,+\infty[$, $\ln u \leq u-1$. Alors $\forall u \in [1,+\infty[$, $\ln u \leq u-1$.

b) $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) > 1$ donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $0 < \ln(f(x)) \leq f(x)-1$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) \geq \dfrac{1}{\ln(f(x))} > 0$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $1 \leq f'(x)\ln(f(x))$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[$, $1 \leq f'(x)\ln(f(x)) \leq f'(x)(f(x)-1)$ ... car $f'(x) > 0$ pour $x \in]0,+\infty[$.

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[$, $1 \leq f'(x)(f(x)-1) = f'(x)f(x) - f'(x)$.

Notons que $x \mapsto f'(x)f(x) - f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Fixons x dans $]0,+\infty[$. Soit ε un élément de $]0,x[$.

$$\int_\varepsilon^x 1\,dt \underset{\varepsilon<x}{\leq} \int_\varepsilon^x (f'(t)f(t) - f'(t))\,dt = \left[\tfrac{1}{2}(f(t))^2 - f(t)\right]_\varepsilon^x = \tfrac{1}{2}(f(x))^2 - \tfrac{1}{2}(f(\varepsilon))^2 - f(x) + f(\varepsilon).$$

donc $x - \varepsilon \leq \frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{1}{2}(f(\varepsilon))^2 - f(x) + f(\varepsilon)$ et ceci pour tout ε dans $]0,x[$.

f est continue en 0 et $f(0) = 1$. Alors en faisant tendre ε vers 0 par valeurs supérieures il vient :

$x - 0 \leq \frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{1}{2}(1)^2 - f(x) + 1$; $x \leq \frac{1}{2}(f(x))^2 - f(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[(f(x))^2 - 2f(x) + 1\right]$.

donc $2x \leq (f(x)-1)^2$. Or $2x \geq 0$ et $f(x) - 1 \geq 0$ donc $\sqrt{2x} \leq f(x) - 1$. $f(x) \geq 1 + \sqrt{2x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) \geq 1 + \sqrt{2x}$. Rappelons que $f(0) = 1$ et $1 + \sqrt{2\times 0} = 1$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) \geq 1 + \sqrt{2x}$.

19-11-2013

Question 2 **ESCP 2013** **F2**

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^n \,\mathrm{d}t$, et on suppose que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant 1$.
2. En considérant la suite $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \in \{-1, 0, 1\}$.
3. En déduire f.

Q1 Supposons qu'il existe t_0 dans $[0,1]$ tel que $|f(t_0)| > 1$.
Pour faciliter les écritures posons $g = |f|$. $g(t_0) > 1$.
Posons $\lambda_0 = \dfrac{g(t_0)+1}{2}$ et montrons que l'on peut trouver deux éléments α et β de $[0,1]$ tel que : $\alpha < \beta$ et $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $g(t) > \lambda_0$.

g est continue en t_0. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,1]$, $|t-t_0| < \eta \Rightarrow |g(t)-g(t_0)| < \varepsilon$.

Posons $\varepsilon = \dfrac{g(t_0)-1}{2}$. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ car $g(t_0) > 1$.

Alors $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,1]$, $|t-t_0| < \eta \Rightarrow |g(t)-g(t_0)| < \varepsilon = \dfrac{g(t_0)-1}{2}$.

Donc $\forall t \in [0,1] \cap]t_0-\eta, t_0+\eta[$, $-\dfrac{g(t_0)-1}{2} < g(t)-g(t_0) < \dfrac{g(t_0)-1}{2}$. En particulier :

$\forall t \in [0,1] \cap]t_0-\eta, t_0+\eta[$, $-\dfrac{g(t_0)-1}{2} < g(t)-g(t_0)$.

$\forall t \in [0,1] \cap]t_0-\eta, t_0+\eta[$, $g(t) > -\dfrac{g(t_0)-1}{2} + g(t_0) = \dfrac{g(t_0)+1}{2} = \lambda_0$.

Alors $\forall t \in [0,1] \cap \left[t_0-\frac{\eta}{2}, t_0+\frac{\eta}{2}\right]$, $g(t) > \lambda_0$.

Posons $\alpha = \max\left(0, t_0-\frac{\eta}{2}\right)$ et $\beta = \min\left(1, t_0+\frac{\eta}{2}\right)$. Alors $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.

De plus $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $g(t) > \lambda_0$. Nous avons encore $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $g(t) \geqslant \lambda_0$.

Rappelons que $g(t_0) > 1$ donc $\lambda_0 = \dfrac{g(t_0)+1}{2} > 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{2n} = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^{2n}\,dt = \int_0^1 |f(t)|^{2n}\,dt = \int_0^1 (g(t))^{2n}\,dt \underset{g \text{ est positive sur } [0,1]}{\geqslant} \int_\alpha^\beta (g(t))^{2n}\,dt$.

$I_{2n} \geqslant \displaystyle\int_\alpha^\beta (g(t))^{2n}\,dt \underset{g(t) \geqslant \lambda_0 > 1 \text{ si } t \in [\alpha,\beta]}{\geqslant} \int_\alpha^\beta (\lambda_0)^{2n}\,dt = (\beta-\alpha)\,\lambda_0^{2n}$.

Or $\lambda_0 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_0^{2n} = +\infty$. Comme $\beta-\alpha$ est strictement positif : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((\beta-\alpha)\lambda_0^{2n}\right) = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n} = +\infty$. Dans ces conditions $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas prendre qu'un nombre fini de valeurs. Ainsi il n'existe pas d'élément t_0 de $[0,1]$ tel que $|f(t_0)|>1$.

Finalement : $\forall t \in [0,1], |f(t)| \leq 1$.

(Q2) Supposons qu'il existe t_1 dans $[0,1]$ tel que $f(t_1) \notin \{-1, 0, 1\}$.

Alors $\forall t \in [0,1], |f(t)| \leq 1$ et $f(t_1) \notin \{-1,0,1\}$

donc $\forall t \in [0,1], |f(t)| \leq 1$ et $0 < |f(t_1)| < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi 1/ $\forall t \in [0,1], (f(t))^{2n} (1 - f^2(t)) \geq 0$.

2/ $\exists t_1 \in [0,1], (f(t_1))^{2n} (1 - f^2(t_1)) > 0$.

Alors $I_{2n} - I_{2n+2} = \int_0^1 (f(t))^{2n} [1 - f^2(t)] dt > 0$ car $t \mapsto (f(t))^{2n} (1 - f^2(t))$ est continue et positive sur $[0,1]$ et $t \mapsto (f(t))^{2n} (1 - f^2(t))$ n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} - I_{2n+2} > 0$. Alors $(I_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante donc cette suite prend une infinité de valeurs. Il en est alors de même pour la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ceci est contraire à l'hypothèse.

Ainsi il n'existe pas d'élément t_1 de $[0,1]$ tel que $f(t_1) \notin \{-1, 0, 1\}$.

Finalement : $\forall t \in [0,1], f(t) \in \{-1, 0, 1\}$.

(Q3) f est continue sur le segment $[0,1]$. Ainsi f possède un maximum M sur $[0,1]$ et un minimum m sur $[0,1]$. De plus $f([0,1]) = [m, M]$. Or $f([0,1])$ contient un nombre fini de valeurs car $\forall t \in [0,1], f(t) \in \{-1, 0, 1\}$. Nécessairement $m = M$.

Alors $f([0,1])$ est réduit à un point et $\forall t \in [0,1], f(t) \in \{-1, 0, 1\}$.

Ainsi f est constante sur $[0,1]$ et vaut -1, 0 ou 1.

Ainsi $\forall t \in [0,1], f(t) = -1$ ou $\forall t \in [0,1], f(t) = 0$ ou $\forall t \in [0,1], f(t) = 1$.

Remarque. - Notons que si $\forall t \in [0,1], f(t) = -1$ ou si $\forall t \in [0,1], f(t) = 0$ ou si $\forall t \in [0,1], f(t) = 1$ la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ prend un nombre fini de valeurs ... ce qui assure la réciproque.

Question 5 **HEC 2005** $\boxed{\text{F 2}}$

Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} [k \ln(n^2+k^2)] - n^2 \ln n$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k \ln n^2 + \sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) - n^2 \ln n.$$

$$= 2\ln n \times \frac{n(n+1)}{2} - n^2 \ln n + n^2\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= n^2\left[\underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\to\, 0} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}_{\to\, \int_0^1 t\ln(1+t^2)\,dt}\right]$$

$\Big\}$ $t \mapsto t\ln(1+t^2)$ est continue sur $[0,1]$

$$u_n \sim n^2 \int_0^1 t\ln(1+t^2)\,dt \qquad \left(\text{car } \int_0^1 t\ln(1+t^2)\,dt \neq 0\right)$$

$$\int_0^1 t\ln(1+t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+u)\,du \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2}\Big[(1+u)\ln(1+u)\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+u)}{1+u}\,du$$

$u = t^2$

$du = 2t\,dt$

$$= \frac{1}{2}\, 2\ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

R

Question 10 HEC 2005 $\boxed{\textbf{F 2}}$

f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\,g(x) \geqslant 4$.

Montrer que $36 \leqslant \left(\int_{-2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-2}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ 4 \leq f(x)g(x) = |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)|.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 2 \leq \sqrt{|f(x)|}\sqrt{|g(x)|}$

$$\int_{-2}^{1} 2\,dt \leq \int_{-2}^{1} \sqrt{|f(x)|}\sqrt{|g(x)|}\,dx = \left|\int_{-2}^{1} \sqrt{|f(x)|}\sqrt{|g(x)|}\,dx\right| \overset{CS}{\leq} \sqrt{\int_{-2}^{1} |f(x)|\,dx}\sqrt{\int_{-2}^{1} |g(x)|\,dx}$$

Alors $6 \leq \sqrt{\int_{-2}^{1} |f(x)|\,dx}\sqrt{\int_{-2}^{1} |g(x)|\,dx}$

Ainsi $36 \leq \int_{-2}^{1} |f(x)|\,dx \int_{-2}^{1} |g(x)|\,dx$

Supposons que : $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$.

Alors f prend la valeur 0 en un point de $\mathbb{R}$; ceci est impossible car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) \geq 4$.

Ainsi ou $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 0$.

Mieux $\begin{cases} \text{ou } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \text{ et alors } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0 & (1) \\ \text{ou } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0 \text{ et alors } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) < 0 & (2) \end{cases}$

(1) donc $\int_{-2}^{1} |f(x)|\,dx \int_{-2}^{1} |g(x)|\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx \int_{-2}^{1} g(x)\,dx$

(2) donc $\int_{-2}^{1} |f(x)|\,dx \int_{-2}^{1} |g(x)|\,dx = \int_{-2}^{1} (-f(x))\,dx \int_{-2}^{1} (-g(x))\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx \int_{-2}^{1} g(x)\,dx$.

Ainsi dans tous les cas $36 \leq \left(\int_{-2}^{1} f(t)\,dt\right)\left(\int_{-2}^{1} g(t)\,dt\right)$.

R

Question 12 **D'après HEC 2005** $\boxed{\text{F 2}}$

Etudier la fonction $x \to \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+(\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$.

$g : t \mapsto \dfrac{t^2}{t^2+\sin^2 t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

$f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+(\sin t)^2}\,dt$. $D_f = \{x\in\mathbb{R} \mid g$ est continue sur $[x,2x]$ ou $[2x,x]\} = \mathbb{R}^*$.

Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(x) = G(2x) - G(x)$. Alors :

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2\,g(2x) - g(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2\times\frac{4x^2}{4x^2+(\sin 2x)^2} - \frac{x^2}{x^2+(\sin x)^2} = \frac{x^2}{(4x^2+\sin^2 2x)(x^2+\sin^2 x)}\underbrace{\left[8x^2+8(\sin x)^2-4x^2-(\sin 2x)^2\right]}_{N(x)}$$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $N(x) = 4x^2 + 8\sin^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x = 4x^2 + 4\sin^2 x\,(2-\cos^2 x) \geqslant 0$.

f est croissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\,dt \underset{u=-t}{=} \int_x^{2x} g(-u)(-du) = -\int_x^{2x} g(u)\,du = -f(x).$$

f est impaire sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $f(x) - x = \displaystyle\int_x^{2x}\left(\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}-1\right)dt = -\int_x^{2x}\frac{\sin^2 t}{t^2+\sin^2 t}\,dt$.

$$0 \leq x - f(x) = \int_x^{2x}\frac{\sin^2 t}{t^2+\sin^2 t}\,dt \leq \int_x^{2x}\frac{dt}{t^2+\sin^2 t} \leq \int_x^{2x}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}-\frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x - f(x)) = 0$. La droite d'équation $y = x$ est asymptote à C_f en $+\infty$

... et en $-\infty$ car f est impaire. Sur $]0,+\infty[$, C_f est en dessous de la droite d'équation $y=x$ et sur $]-\infty,0[$ c'est le contraire.

$\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 1/2$. g se prolonge en une fonction $\hat{g}$ continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\hat{G}$ une primitive de $\hat{g}$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(x) = \hat{G}(2x) - \hat{G}(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \hat{G}(0) - \hat{G}(0) = 0$.

f se prolonge en une fonction continue $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \hat{G}(2x) - \hat{G}(x)$.

$\hat{f}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}'(0) = 2\hat{g}(0) - \hat{g}(0) = \hat{g}(0) = \dfrac{1}{2}$.

R

Question 1 **D'apès HEC 2006**

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t = 1 + x$.

• Supposons que f est solution.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt + 1 + x$; $f(0) = 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(0) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\int_0^x f(t)dt - x f(x) + x f(x) + 1$; f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$!!

$f(0) = 1$. $\lambda = 1$

$f'(0) = 1 = \lambda(-\sin 0) + \mu \cos 0$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos x + \sin x$.

• Réciproque. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos x + \sin x$.

$\int_0^x (\cos t + \sin t)dt = [\sin t - \cos t]_0^x = \sin x - \cos x + 1$.

$\int_0^x t(\cos t + \sin t)dt = [t(\sin t - \cos t)]_0^x - \int_0^x (\sin t - \cos t)dt$

$= x(\sin x - \cos x) - [-\cos t - \sin t]_0^x$

$= x\sin x - x\cos x + \cos x + \sin x - 1$

$f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = \cos x + \sin x + x[\sin x - \cos x + 1] - x\sin x + x\cos x - \cos x - \sin x + 1$

$= \cos x + \sin x + x\sin x - x\cos x + x - x\sin x + x\cos x - \cos x - \sin x + 1$

$= x + 1$.

R

R.

Question 9 **HEC 07-9**

$\boxed{\text{F 2}}$ Donner un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de $F(x)=\displaystyle\int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt \underset{u=t-k\pi}{=} \int_0^\pi |\sin(u+k\pi)|\,du \underset{\sin(u+k\pi)=(-1)^k\sin u}{=} \int_0^\pi |\sin u|\,du = \int_0^\pi \sin u\,du = [-\cos u]_0^\pi = 2.$

$\forall k\in\mathbb{N},\ \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt = 2.$

vaut encore pour $n=0$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ F(n\pi)=\displaystyle\int_0^{n\pi}|\sin t|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2n.$ $\forall n\in\mathbb{N},\ F(n\pi)=2n.$

$t\mapsto|\sin t|$ est positive sur $[0,+\infty[$ donc F est croissante sur $[0,+\infty[$.

Soit $x\in]0,+\infty[$. Posons $n=\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)$. $n\leqslant\frac{x}{\pi}<n+1$; $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$.

Alors $F(n\pi)\leqslant F(x)\leqslant F((n+1)\pi)$; $2n\leqslant F(x)\leqslant 2(n+1)$; $2\,\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)\leqslant F(x)\ 2\left[\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)+1\right]$

Ainsi $\dfrac{\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)}{\frac{x}{\pi}}\leqslant\dfrac{F(x)}{2\times\frac{x}{\pi}}\leqslant\dfrac{\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)}{\frac{x}{\pi}}+\dfrac{\pi}{x}$ car $x>0$.

Donc $\dfrac{\frac{x}{\pi}-1}{\frac{x}{\pi}}\leqslant\dfrac{F(x)}{2\times\frac{x}{\pi}}\leqslant\dfrac{\frac{x}{\pi}}{\frac{x}{\pi}}+\dfrac{\pi}{x}$ car $\frac{x}{\pi}-1<\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)\leqslant\frac{x}{\pi}$.

Alors $1-\dfrac{\pi}{x}\leqslant\dfrac{F(x)}{2\times\frac{x}{\pi}}\leqslant 1+\dfrac{\pi}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\pi}{x}\right)=1$. Par encadrement on obtient alors : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\frac{2x}{\pi}}=1$

Ainsi $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{2x}{\pi}$.

P..

Question 5 **HEC 2012-5-S20** $\boxed{\text{F 2}}$

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Question de cours. *Théorème de la limite centrée.*

Q1 • Soit $f\in E$. Posons $F=T(f)$ et montrons que $F\in E$.

Posons $\forall x\in[0,+\infty[$, $P_f(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. P_f est la primitive de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0 (f est continue sur $[0,+\infty[$).

P_f est donc de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. De plus $x\mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Alors par produit $F=T(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Donc F est largement continue sur $]0,+\infty[$.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)=\lim_{x\to 0}\frac{P_f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{P_f(x)-P_f(0)}{x-0}=P_f'(0)=f(0)$. Ainsi F est continue en 0.

F est donc continue sur $[0,+\infty[$. $F\in E$.

$\forall f\in E$, $T(f)\in E$. <u>T est une application de E dans E.</u>

• Montrons que T est linéaire. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et soit $(f,g)\in E^2$.

→ $T(\lambda f+g)(0)=(\lambda f+g)(0)=\lambda f(0)+g(0)=\lambda T(f)(0)+T(g)(0)=(\lambda T(f)+T(g))(0)$.

→ Soit $x\in]0,+\infty[$. $T(\lambda f+g)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x(\lambda f+g)(u)\,du=\lambda\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt$.

$T(\lambda f+g)(x)=\lambda T(f)(x)+T(g)(x)=(\lambda T(f)+T(g))(x)$.

Ainsi $\forall x\in[0,+\infty[$, $T(\lambda f+g)(x)=(\lambda T(f)+T(g))(x)$. $T(\lambda f+g)=\lambda T(f)+T(g)$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(f,g)\in E^2$, $T(\lambda f+g)=\lambda T(f)+T(g)$. <u>$T$ est linéaire</u>.

Finalement <u>T est un endomorphisme de E</u>

• Soit $f\in\operatorname{Ker}T$. $T(f)=0_E$. $\forall x\in]0,+\infty[$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=0$. $\forall x\in]0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)\,dt=0$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)dt=0$. En dérivant on obtient : $\forall x\in[0,+\infty[$, $f(x)=0$. $f=0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} T = \{0_E\}$. T est injectif.

Remarque.. Nous avons vu que si $f\in E$, $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
les éléments de $\operatorname{Im} T$ sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Posons $\forall x\in[0,+\infty[$, $h(x)=|x-1|$.
h est continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1. Ainsi $h\in E$ mais $h\notin \operatorname{Im} T$.
Alors T n'est pas surjectif.

Exercice.. Montrer que $\operatorname{Im} T$ est l'ensemble des éléments g de E tels que :

1) g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;

2) $\lim_{x\to 0^+}(x g'(x))=0$.

(Q2) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Posons $\mathcal{S}_\lambda=\{f\in E \mid T(f)=\lambda f\}$. Notons que $\mathcal{S}_\lambda=\operatorname{Ker}(T-\lambda \operatorname{Id}_E)$.

Si $\lambda=0$: $\mathcal{S}_\lambda=\mathcal{S}_0=\operatorname{Ker}T=\{0_E\}$. Donc nous supposerons dans ce qui suit : $\lambda\neq 0$.

Analysons un peu ! Partons d'un élément f appartenant à $\mathcal{S}_\lambda$.

Notons de nouveau P_f la primitive de $f_{\text{sur }[0,+\infty[}$ qui prend la valeur 0 en 0.

$T(f)(0)=\lambda f(0)$ donc $f(0)=\lambda f(0)$; $(\lambda-1)f(0)=0$. Notons que si $\lambda\neq 1$: $f(0)=0$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $P_f'(x)=f(x)=\frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{\lambda x}P_f(x)$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $P_f'(x)-\frac{1}{\lambda x}P_f(x)=0$.

Notons que $x\mapsto \frac{1}{\lambda}\ln x$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction continue sur $]0,+\infty[$, $x\mapsto \frac{1}{\lambda x}$.

Le cours permet de dire que : $\exists C\in\mathbb{R}$, $\forall x\in]0,+\infty[$, $P_f(x)=C\, e^{\frac{1}{\lambda}\ln x}$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $f(x)=P_f'(x)=\frac{1}{\lambda x}P_f(x)=C\frac{1}{\lambda x}e^{\frac{1}{\lambda}\ln x}=C\frac{1}{\lambda x}x^{1/\lambda}=\frac{C}{\lambda}x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Donc $\exists d\in\mathbb{R}$, $\forall x\in]0,+\infty[$, $f(x)=d\,x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ et $f(0)=0$ si $\lambda\neq 1$. Poursuivons l'analyse.

f est continue en 0 donc $f(0)=\lim_{x\mapsto 0^+}\left(\alpha\, x^{\frac{1}{\lambda}-1}\right)$. Notons que cette limite est finie !

Si $\frac{1}{\lambda}-1<0$ $\lim_{x\mapsto 0^+}\left(x^{\frac{1}{\lambda}-1}\right)=+\infty$ donc nécessairement $\alpha=0$.

Si $\frac{1}{\lambda}-1=0$ $f(0)=\lim_{x\mapsto 0^+}(\alpha x^0)=\alpha$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $f(x)=\alpha x^{\frac{1}{\lambda}-1}=\alpha x^0=\alpha$.

donc $\forall x\in[0,+\infty[$, $f(x)=\alpha$. Posons $\forall x\in[0,+\infty[$, $f_1(x)=1$. $\underline{f=\alpha f_1}$

Si $\frac{1}{\lambda}-1>0$ Alors $f(0)=0$ car $\lambda\neq 1$ et ainsi $f(0)=\alpha\times 0$.

De plus $\forall x\in]0,+\infty[$, $f(x)=\alpha\times x^{\frac{1}{\lambda}-1}$

Posons $\forall x\in[0,+\infty[$, $f_\lambda(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$. $\underline{f=\alpha f_\lambda}$.

Résumons cette analyse.

Si $\lambda=0$: $\mathcal{S}_\lambda=\{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda}-1<0$: $\mathcal{S}_\lambda\subset\{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda}-1=0$ donc si $\lambda=1$:

$\mathcal{S}_1\subset \mathrm{Vect}(f_1)$. Si $\frac{1}{\lambda}-1>0$, $\mathcal{S}_\lambda\subset\mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

Notons que $0_E\in\mathcal{S}_\lambda$, que $\frac{1}{\lambda}-1<0 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda}<0\Leftrightarrow \lambda\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ et

$\frac{1-\lambda}{\lambda}>0\Leftrightarrow \lambda\in]0,1[$.

Alors 1°/ $\forall\lambda\in]-\infty,0\,\underline{\underline{]}}\cup]1,+\infty[$, $\mathcal{S}_\lambda=\{0_E\}$.

2°/ $\mathcal{S}_1\subset\mathrm{Vect}(f_1)$ où $\forall x\in[0,+\infty[$, $f_1(x)=1$.

3°/ $\forall\lambda\in]0,1[$, $\mathcal{S}_\lambda\subset\mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $\forall x\in[0,+\infty[$, $f_\lambda(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

Reste à envisager deux réciproques.

Notons que $\mathcal{S}_\lambda=\mathrm{Ker}(T-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$ donc $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E ceci pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

f_1 est continue sur $[0,+\infty[$. $f_1\in E$. $T(f_1)(0)=f_1(0)$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $T(f_1)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x 1\,dt=\frac{1}{x}\times x=1=f_1(x)$.

Alors $\forall x\in[0,+\infty[$, $T(f_1)(x)=1\times f_1(x)$. $T(f_1)=1\times f_1$. $f_1\in\mathcal{S}_1$.

Donc $\text{Vect}(f_1) \subset \mathcal{S}_1$. Alors $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}(f_1)$.

Soit $\lambda \in]0,1[$. $\mathcal{S}_\lambda \subset \text{Vect}(f_\lambda)$. Pour montrer que $\text{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{S}_\lambda$ il suffit de montrer que $f_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ car $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

f_λ est continue sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\lambda}-1} \underset{\frac{1}{\lambda}-1>0}{=} 0 = f_\lambda(0)$ donc f_λ est continue en 0.

Ainsi f_λ est continue sur $[0,+\infty[$. $f_\lambda \in E$.

$T(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0) = 0 = \lambda f_\lambda(0)$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

Soit $\varepsilon \in]0,+\infty[$. $\int_\varepsilon^x f_\lambda(t)\,dt = \int_\varepsilon^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \left[\frac{t^{1/\lambda}}{1/\lambda}\right]_\varepsilon^x = \lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]$.

Alors $\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(\lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]\right) = \lambda x^{1/\lambda}$ car $\frac{1}{\lambda} > 0$.

Alors $T(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{x}\lambda x^{1/\lambda} = \lambda\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f_\lambda(x)$.

Finalement $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(f_\lambda)(x) = \lambda f_\lambda(x)$. $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$; $f_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$.

Alors $\text{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{S}_\lambda$ et finalement $\mathcal{S}_\lambda = \text{Vect}(f_\lambda)$.

Conclusion :

- $\forall \lambda \in]-\infty,0] \cup]1,+\infty[$, $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$
- $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}(f_1)$ où f_1 est l'élément de E défini par $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = 1$
- Si $\lambda \in]0,1[$, $\mathcal{S}_\lambda = \text{Vect}(f_\lambda)$ où f_λ est l'élément de E défini par :

  $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Ainsi
→ $\text{Sp}\, T =]0,1]$
→ $\text{SEP}(T,\lambda) = \text{Vect}(f_\lambda)$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

Remarque.. On aurait sans doute pu poser $\forall \lambda \in]0,1]$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$...

R..

Question 14 **HEC 2012-14-S42** $\boxed{\text{F1}}$

α est un réel positif ou nul. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

Q1. Montrer que si $\alpha = 2$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Q2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Question de cours. *Définition de la covariance et du coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1*

Q1 Ici $\alpha = 2$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln u_n = n \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)$. Posons $\forall t\in[0,1]$, $f(t) = \ln(1+t^2)$.

f est continue sur $[0,1]$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = I$ où $I = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Notons que f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi $I>0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right) = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)\right) = +\infty$.

$\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n) = +\infty$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\ln u_n}\right) = +\infty$. $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}}$.

Q2 Ici $0 \leqslant \alpha < 1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right) \geqslant 1$.

Alors $0 \leqslant \ln u_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right) \underset{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leqslant x-1}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^2} \underset{\alpha\geqslant 0}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n}\frac{n^\alpha}{n^2} = n\times\frac{n^\alpha}{n^2} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$.

De plus $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}} = 0$ car $1-\alpha>0$. Donc par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n) = 0$

Par continuité de la fonction exponentielle en 0 il vient $\lim_{n\to+\infty} e^{\ln u_n} = e^0$.

Ainsi $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}}$.

<u>Exercice</u>.. Etudier $\lim_{n\to+\infty} u_n$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.