Question 9 **ESCP 2004** Montrer que pour $x > -1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$.

Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ lorsque n tend vers l'infini.

$\forall x \in]-1, +\infty[, \ \varphi(x) = (1+x)^k$

$\forall x \in]-1, +\infty[, \ \varphi''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \geq 0.$ φ est convexe sur $]-1, +\infty[$.

$\forall x \in]-1, +\infty[, \ \varphi(x) \geq (x-0)\varphi'(0) + \varphi(0)$

$\forall x \in]-1, +\infty[, \ (1+x)^k \geq kx + 1.$

$n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \sim \ln n$.

Question 5 ESCP 2006 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $v_n = \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^3}$.

Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

- $0 \leqslant v_n \leqslant \int_0^{u_n} 1\,dt = u_n$. $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$. Si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général v_n converge.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

φ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, L[$ où $L = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$. (*)

$v_n = \varphi(u_n)$; $u_n = \varphi^{-1}(v_n)$.

Supposons que la série de terme général v_n converge.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{-1}(v_n) = \varphi^{-1}(0) = 0$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. $0 \leqslant \frac{u_n}{1+u_n^3} \overset{(\Delta)}{\leqslant} \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^3} = v_n$.

Alors la série de terme général $\frac{u_n}{1+u_n^3}$ converge.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $u_n \sim \frac{u_n}{1+u_n^3}$.

Ainsi la série de terme général u_n converge (règle de comparaison des séries à termes positifs.

(*) φ est clairement continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

(Δ) $\forall t \in [0, u_n]$, $\frac{1}{1+t^3} \geqslant \frac{1}{1+u_n^3}$.

Question 4 ESCP 2007

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1} n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^{t/2} dt$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq (1-t)^n e^{t/2} \leq e^{t/2} \leq e^{1/2}$ et $\dfrac{1}{2^{n+1} n!} \geq 0$.

Alors $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \dfrac{1}{2^{n+1} n!} (1-t)^n e^{t/2} \leq \dfrac{1}{2^{n+1} n!} e^{1/2}$.

En intégrant il vient $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1} n!} e^{1/2}$ car $0 \leq 1$.

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1} n!} e^{1/2} \right) = 0$. Par encadrement $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Pour $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = e^{t/2}$. φ est de classe C^∞ sur $[0,1]$. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1]$, $\varphi^{(k)}(t) = \dfrac{1}{2^k} e^{t/2}$.

La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\, dt$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{1/2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \frac{1}{2^{n+1}} e^{t/2} dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} + I_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = e^{1/2} - I_n$. Alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = e^{1/2}$

La série de terme général $\dfrac{1}{2^n n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} = e^{1/2}$, un vrai scoop !

R

Question 20 **ESCP 2007** F. TAN et N. RIFFI

λ est un réel non nul. $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & -1 \end{pmatrix}$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p!} \left(A_\lambda + A_{2\lambda}\right)^{2p} \right)$.

$$(A_\lambda + A_{2\lambda})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3\lambda \\ \frac{3}{2\lambda} & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3\lambda \\ \frac{3}{2\lambda} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3\lambda \\ \frac{3}{2\lambda} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 4+\frac{9}{2} \end{pmatrix} = \frac{17}{2} I_2 .$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} (A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p} = \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} \left(\frac{17}{2}\right)^p \right) I_2 .$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} (A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p} = e^{17/2} I_2 .$$

R

Question 22 **ESCP 2007** J. VANNIMENUS

Montrer que la série de terme général $\frac{n^p}{2^n}$ converge.

Par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\,\frac{n^p}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^{2+p}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=0$ car $\left|\frac{1}{2}\right|<1$

Alors $\frac{n^p}{2^n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{n^p}{2^n}\geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2}\geqslant 0$, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\frac{n^p}{2^n}$ converge.

Exercice.. $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Etudier la convergence de la série de terme général $n^\alpha x^n$.

R

Question 10 **ESCP 2008** $\boxed{\textbf{F1}}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Ceci n'est pas une correction.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} - 1 \right]$.

$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}$. $n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim n \times \frac{2}{n} = 2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) = 2$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$.

$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} - 1 = e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} - 1$.

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 2 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 2 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Alors $2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) = 0$.

$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} - 1 = e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Alors $\underline{\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^2}{n}}}$. <u>Alors la série de terme général u_n diverge.</u>

Question 8 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F1}}$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\, e^{\frac{k}{2n}}$.

Ceci n'est pas une correction.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{\frac{k}{2n}} = \sum_{k=1}^{2n}\left(-e^{1/2n}\right)^k = \left(-e^{1/2n}\right)\frac{1-\left(-e^{\frac{1}{2n}}\right)^{2n}}{1-\left(-e^{1/2n}\right)}$.

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{\frac{k}{2n}} = -\frac{e^{1/2n}}{1+e^{1/2n}}\left(1-e^1\right)$$

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{\frac{k}{2n}}\right) = \lim_{n\mapsto+\infty}\left(-\frac{e^{1/2n}}{1+e^{1/2n}}(1-e)\right) = \frac{e-1}{2}.$$

Alors $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{\frac{k}{2n}}\right) = 0$.

$\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$.

R

Question 2 **ESCP 2011**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que pour tout réel u tel que $|u| \leqslant 1$, $E(u^X)$ existe.

Q2. Montrer que pour tout réel u tel que $|u| < 1$: $\dfrac{1-E(u^X)}{1-u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)\, u^k$.

Q1 Soit u un réel tel que $|u| \leqslant 1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |u^n P(X=n)| = |u|^n P(X=n) \leqslant P(X=n)$.
- la série de terme général $P(X=n)$ converge

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|u^n P(X=n)|$ converge.

Alors la série de terme général $u^n P(X=n)$ est absolument convergente.

Le théorème de transfert permet alors de dire que $\underline{\underline{E(u^X) \text{ existe}}}$.

Q2 Soit u un réel tel que $|u| < 1$.

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |P(X>k)\, u^k| = P(X>k)\, |u|^k \leqslant |u|^k$.
- La série de terme général $|u|^k$ converge car $|u|<1$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $P(X>k)\, u^k$ est absolument convergente donc convergente.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{r} P(X=k)\, u^k = \sum_{k=0}^{r} [P(X>k-1) - P(X>k)]\, u^k = \sum_{k=0}^{r} P(X>k-1)\, u^k - \sum_{k=0}^{r} P(X>k)\, u^k$$

$$\sum_{k=0}^{r} P(X=k)\, u^k = \sum_{k=-1}^{r-1} P(X>k)\, u^{k+1} - \sum_{k=0}^{r} P(X>k)\, u^k = \underbrace{P(X>-1)}_{=1} + u \sum_{k=0}^{r-1} P(X>k)\, u^k - \sum_{k=0}^{r} P(X>k)\, u^k$$

En faisant tendre r vers $+\infty$ il vient :

$$E(u^X) = 1 + u \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)\, u^k - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)\, u^k = 1 - (1-u) \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)\, u^k.$$

Alors
$$\underline{\underline{\frac{1-E(u^X)}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)\, u^k.}}$$

Question 25 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F}}$ Obtenue par un élève.

On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{u_n} (1 - e^{-t})\,dt$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Montrer que la série de terme général u_n converge.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = [t + e^{-t}]_0^{u_n} = u_n + e^{-u_n} - 1$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geqslant -x + 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-u_n} \geqslant -u_n + 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} - 1 \geqslant 0$.

Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} - 1 \leqslant 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $-u_n \leqslant 0$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Notons ℓ sa limite. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} - 1$.

En passant à la limite il vient $0 \leqslant \ell$ et $\ell = \ell + e^{-\ell} - 1$.

Alors $e^{-\ell} - 1 = 0$; $e^{-\ell} = 1$; $-\ell = \ln 1 = 0$; $\ell = 0$. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

V1 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$. Montrons la pour $n+1$.

  Nous savons déjà que $u_{n+1} \geqslant 0$. Supposons que $u_{n+1} = 0$.

  Alors $\displaystyle\int_0^{u_n} (1 - e^{-t})\,dt = 0$. De plus $u_n > 0$ et $t \mapsto 1 - e^{-t}$ est continue et positive sur $[0, u_n]$. Alors $\forall t \in [0, u_n]$, $1 - e^{-t} = 0$.

  $\forall t \in [0, u_n]$, $e^{-t} = 1$. $\forall t \in [0, u_n]$, $t = 0$!! Ceci est impossible car $u_n > 0$.

  Ceci achève la récurrence. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - e^{-u_n}$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - e^{-0} = 0$.

R

Alors $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.

donc $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} u_p$.

donc $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $0 \leq u_n \leq (2^p u_p) \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général u_n.

V2 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ et $\lim_{n \to +\infty} (u_n - u_0) = -u_0$.

Alors la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. Il en est de même pour la série de terme général $u_n - u_{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $u_n - u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = -(e^{(-u_n)} - 1) \underset{n \to +\infty}{\sim} -(-u_n) = u_n$.

donc
- $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n - u_{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$
- La série de terme général $u_n - u_{n+1}$ converge.

Alors les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général u_n.

<u>La série de terme général u_n converge.</u>

Question 6 **HEC 2005** $\boxed{\text{F 2}}$

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels positifs ou nuls. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{1+n^2\,u_n}$.

Y a-t-il un lien entre la nature de la série de terme général u_n et celle des autres ?

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq u_n$ et $0 \leq w_n \leq u_n$.

  Si la série de terme général u_n converge il en est de même des séries de termes généraux v_n et w_n.

- Supposons que la série de terme général v_n converge.

  $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = 0$; $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $v_n \leq \frac{1}{2}$.

  $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $v_n(1+u_n) = u_n$.

  $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-v_n) = 1$.

  Ainsi $u_n \sim v_n$

  Alors la série de terme général u_n converge.

- Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

  La série de terme général u_n diverge

  $w_n = \dfrac{1}{1+n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$; la série de terme général w_n converge.

R

Question 10 **HEC 2008 S10** $\boxed{\textbf{F1}}$

Représenter dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des point de coordonnées (a, b) telles que $a > 0$, $b > 0$ et la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{1 + b^n}$ converge.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

1^e^ Cas.. $b < 1$. $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$. $u_n \sim a^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n \geqslant 0$.

La série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général a^n. La série de terme général u_n converge ssi $a < 1$ ($a > 0$!)

2^ième^ Cas.. $b = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n/2$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $a < 1$

3^ième^ Cas.. $b > 1$ $1 \underset{n \to +\infty}{=} o(b^n)$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = +\infty$; $1 + b^n \underset{n \to +\infty}{\sim} b^n$.

$u_n \sim \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n \geqslant 0$. Les séries de termes généraux u_n et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ sont de même nature. La série de terme général u_n converge ssi $\dfrac{a}{b} < 1$.

Finalement la série de terme général u_n converge si et seulement si $\begin{cases} b \leqslant 1 \text{ et } a < 1 \\ \text{ou} \\ b > 1 \text{ et } a < b \end{cases}$.