Question 6. Inégalités classiques tu as dit ?

A - Pistes pour obtenir des inégalités !

1°.- Etude de fonction

2°.- convexité et concavité (tangentes et cordes)

3°.- Croissance de l'intégrale

4°.- Inégalité des accroissements finis (+ variantes)

5°.- Inégalité de Taylor-Lagrange (ou même formule de Taylor-Lagrange, avec reste intégral)

6°.- Inégalité triangulaire (dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$, dans un préhilbertien, dans un espace vectoriel normé).

7°.- Cauchy-Schwarz.

8°.- Croissance de la probabilité.

9°.- Théorème de meilleure approximation

10°.- Théorème des moindres carrés.

11°.- Bienaymé-Tchebychev

12°.- Markov (les différentes versions).

13°.- Signe du trinôme.

14°.- Théorème du rang !

15°.- Partie entière

16°.- Limite d'une fonction (resp. suite) croissante ... ou décroissante.

ou $\left|\int_c^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_c^b (f(t))^2dt}\sqrt{\int_c^b (g(t))^2dt}$.

Peut s'adapter à des intégrales généralisées

Ex $-\infty < a < b \leq +\infty$. f et g continues sur $[a,b[$. $\int_c^b f^2(t)dt$ et $\int_c^b g^2(t)dt$ convergent

1° $\int_c^b f(t)g(t)dt$ converge (et même absolument). (grâce à 12°).

2° $\left|\int_c^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_c^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_c^b g^2(t)dt}$.

14° F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E et dim E = n.

$\dim(F\cap G) \geq \dim F + \dim G - n$.

15° $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

- $\in [\![n_0, +\infty[\![$, $P(A_{n_0}\cup A_{n_0+1}\cup \dots \cup A_n) \leq P(A_{n_0}) + P(A_{n_0+1}) + \dots + P(A_n)$
- Si la série de terme général $P(A_n)$ converge :

$$P\left(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n).$$

16° $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. $u\in E$, $v\in E$.

$\big|\|u\|-\|v\|\big| \leq \|u-v\| \leq \|u\|+\|v\|$

$\big|\|u\|-\|v\|\big| \leq \|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$.

A suivre

B Quelques inégalités classiques.

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x-1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$

4) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$

5) $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

6) $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

7) f convexe sur I. $n \in \mathbb{N}^*$. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$. $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ donc $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

8) f convexe sur I. $n \in \mathbb{N}^*$. $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$. $f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

9) et 10) le cas des fonctions concaves !

11) Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2$ ou

$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$.

12) $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

↑ Résultat de C.S. !

13) Cauchy-Schwarz en intégration. f et g sont continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$\left(\int_a^b f(t) g(t)\, dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\, dt \int_a^b g^2(t)\, dt$.