RÉDUCTION

VII COMPLÉMENTS

1. Le cas des matrices d'ordre 2

2. Réduction et transposée

3. Réduction et inverse

4. Spectre d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'augmente pas le degré

5. Valeurs propres et vecteurs propres d'une projection.

6. Valeurs propres et vecteurs propres d'une symétrie.

7. Dimension des sous-espaces propres et rang.

8. Endomorphisme ou matrice n'ayant qu'une valeur propre.

9. Une localisation des vecteurs propres...

10. Droites vectorielles et hyperplans stables

VIII POUR NE PAS MOURIR IDIOT

1. Encore une CNS de diagonalisation

2. La trigonalisation

IX SAVOIR FAIRE

X DES ERREURS À NE PAS FAIRE

XI DES RHÉTORIQUES TOUTES FAITES

XII QUELQUES THÈMES CLASSIQUES DU CHAPITRE RÉDUCTION

XIII UNE RÉSUMÉ DES BONS COUPS DU PÈRE JIVAROS POUR AMÉLIORER TA RÉDUCTION ATTITUDE

XIV QUELQUES CONSIDÉRATIONS PRATIQUES

RÉDUCTION

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique de la réduction, souvent oubliés...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. n appartient à $\mathbb{N}^*$.

I ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

▶ 1. Définitions usuelles

Th. 1 et **déf. 1** Soient f un endomorphisme de E et λ un élément de $\mathbb{K}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe un vecteur $\boxed{\text{non nul}}$ u de E tel que : $f(u) = \lambda u$.

ii) $\text{Ker}(f - \lambda Id_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

iii) $f - \lambda Id_E$ n'est pas injective.

Si l'une des assertions suivantes est vérifiée on dit que λ est une **valeur propre** de f.

Déf. 2 L'ensemble des valeurs propres de f est le **spectre** de f ; on le note souvent $\text{Sp}(f)$.

Déf. 3 Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

On appelle **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ, tout vecteur $\boxed{\text{non nul}}$ u de E vérifiant : $f(u) = \lambda u$.

Déf. 4 Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

Le **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ est le sous-espace :

$$\{u \in E \mid f(u) = \lambda u\} = \text{Ker}(f - \lambda Id_E)$$

Nous le noterons souvent SEP (f, λ).

Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est la réunion de l'ensemble des vecteurs propres de f associés à λ et de $\{0_E\}$. Qu'on se le dise et redise.

▶ 2. Premières propriétés

Th. 2 f est un endomorphisme de E. λ_1, λ_2,..., λ_p sont p valeurs propres $\boxed{\text{distinctes}}$ de f.

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, u_i est un vecteur propre de f associé à la valeur λ_i et $\mathcal{B}_i$ est une base du sous-espace propre F_{λ_i} associé à λ_i.

1. $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille libre de E.
2. "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$" est une famille libre de E.
3. F_{λ_1}, F_{λ_2},..., F_{λ_p} sont en somme directe.

Th. 3 On suppose que E est de dimension n non nulle. f est un endomorphisme de E.

1. f possède au plus n valeurs propres distinctes.

2. La somme des dimensions des sous-espaces propres de f ne dépasse pas n.

II ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE

▶ 1. Définition

Déf. 5 Un endomorphisme f de E est **diagonalisable** s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Diagonaliser f c'est trouver une base de E constituée de vecteurs propres de f.

▶ 2. Conditions pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable

Prop. 1 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E .

f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Th. 4 *Une condition* **suffisante** *de diagonalisation.*

E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.
Si f possède n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Th. 5 *Des conditions* **nécessaires et suffisantes** *de diagonalisation.*

E est de dimension finie non nulle et f est un endomorphisme de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est diagonalisable.

ii) E est la somme (directe) des sous-espaces propres de f ; c'est à dire : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, f} \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)$.

iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de E.

▶ 3. L'aspect pratique

Th. 6 **PPP** E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nulle.

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E.

1. On obtient une base de E constituée de vecteurs propres de f en concatenant une base de chacun des sous-espaces propres de f.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

III ÉLÉMENTS PROPRES D'UNE MATRICE

▶ 1. Définitions usuelles

Th. 7 et **déf. 6** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe une matrice colonne X $\boxed{\text{non nulle}}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que : $AX = \lambda X$.

ii) $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Si l'une des assertions est vérifiée on dit que λ est une **valeur propre** de A.

Déf. 7 Le **spectre** de A est l'ensemble des valeurs propres de A.

On le note : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou $\mathrm{Sp}(A)$ (si aucune confusion n'est à craindre).

Si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ne confondra pas $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Déf. 8 Soient A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

On appelle **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ, toute $\boxed{\text{matrice colonne } \textbf{non nulle}}$ X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant : $AX = \lambda X$.

Déf. 9 Soient A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est le sous-espace $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}$.

On le note souvent SEP (A, λ)

▶ 2. Le lien avec les endomorphismes

Th. 8 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B}$ est une base de E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

1. f et A ont même spectre.

2. Soit u est un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

X est un vecteur propre de A associé à λ si et seulement si u est un vecteur propre de f associé à λ.

3. Soit λ une valeur propre de f et A. Le sous-espace propre de f associé à λ a même dimension que le sous-espace propre de A associé à λ. Autrement dit :

$$\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda)$$

▶ 3. Propriétés

Th. 9 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

λ_1, λ_2,..., λ_p sont p valeurs propres $\boxed{\text{distinctes}}$ de A.

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, X_i est un vecteur propre de A associé à la valeur λ_i et $\widehat{\mathcal{B}}_i$ est une base du sous-espace propre $\widehat{F}_{\lambda_i}$ associé à λ_i.

1. $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. "$\widehat{\mathcal{B}}_1 \cup \widehat{\mathcal{B}}_2 \cup \cdots \cup \widehat{\mathcal{B}}_p$" est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
3. $\widehat{F}_{\lambda_1}$, $\widehat{F}_{\lambda_2}$,..., $\widehat{F}_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Th. 10 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A a au plus n valeurs propres distinctes.
2. La somme des dimensions des sous-espaces propres de A ne dépasse pas n.

Th. 11 **P** Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure ou inférieure son spectre est l'ensemble des éléments de sa diagonale.

Th. 12 Deux matrices semblables ont même spectre.

Th. 13 **P** Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

IV MATRICE DIAGONALISABLE

▶ 1. Définition

Déf. 10 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Diagonaliser A c'est trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$

▶ 2. Conditions pour qu'une matrice soit diagonalisable

Th. 14 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B}$ est une base de E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$. A est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable.

Th. 15 **Une condition suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A possède n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Th. 16 **Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice soit diagonalisable.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est diagonalisable.

i') A est semblable à une matrice diagonale.

ii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la somme (directe) des sous-espaces propres de A.

iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n.

iv) Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

v) A est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable.

▸ 3. L'aspect pratique

Th. 17 **PPP** Soit A une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

$$P^{-1}AP \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Th. 18 **P** Soit A une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telles que $P^{-1}AP = D$.

On note, pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.

Alors $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

V POLYNÔME D'ENDOMORPHISME OU DE MATRICE ET RÉDUCTION

▸ 1. Quelques généralités

Prop. 2 **P** f est un endomorphisme de E, u est un élément de E et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ f^k(u) = \lambda^k u}$

2. Soit Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

• $\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } Q(f)(u) = Q(\lambda)\, u}$.

• Si u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors u est un vecteur propre de $Q(f)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

Prop. 3 **P** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X}$

2. Soit Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

• $\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } Q(A)X = Q(\lambda)\, X}$.

• Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors X est un vecteur propre de $Q(A)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

▸ 2. Polynôme annulateur et spectre

Th. 19 **P** f est un endomorphisme de E et Q un polynôme annulateur de f.

L'ensemble des valeurs propres de f est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de Q.

Th. 20 **P** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q un polynôme annulateur de A.

L'ensemble des valeurs propres de A est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de Q.

▶ 3. Polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice diagonalisable

Th. 21 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q un élément de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associées aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n alors $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $Q(A)$ respectivement associées aux valeurs propres $Q(\lambda_1)$, $Q(\lambda_2)$, ..., $Q(\lambda_n)$.

2. Si A est diagonalisable, $Q(A)$ est diagonalisable.

3. Si D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ alors $Q(D)$ est diagonale et $Q(D) = P^{-1}Q(A)P$.

Th. 22 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension non nulle n. Soit f un endomorphisme de E et Q un élément de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associées aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n alors $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de $Q(f)$ respectivement associées aux valeurs propres $Q(\lambda_1)$, $Q(\lambda_2)$, ..., $Q(\lambda_n)$.

2. Si f est diagonalisable, $Q(f)$ est diagonalisable.

VI MATRICES SYMÉTRIQUES

Th. 23 Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(R)$.

1. Toutes les valeurs propres de A sont réelles. Autrement dit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A$.

2. A est diagonalisable.

Nous y reviendrons au niveau des espaces vectoriels euclidiens

VII COMPLÉMENTS

▶ 1. Le cas des matrices d'ordre 2

Th. 24 **P** Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

λ est une valeur propre de A si et seulement si $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$.

▶ 2. Réduction et transposée

Prop. 4 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A et ${}^tA$ ont même spectre (mais n'ont pas nécessairement les mêmes vecteurs propres).
2. A et ${}^tA$ sont simultanément diagonalisables.

▸ 3. Réduction et inverse

Prop. 5 Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. 0 n'est pas valeur propre de A.

2. Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A.

3. A et A^{-1} ont même vecteurs propres. Plus précisément si F est le sous espace propre de A associé à la valeur propre λ, F est le sous espace propre de A^{-1} associé à la valeur propre $1/\lambda$. En clair :

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp} A,\ \text{SEP}\ \left(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}\right) = \text{SEP}\ (A, \lambda)$$

4. A et A^{-1} sont simultanément diagonalisables.

5. "Même" chose pour les endomorphismes.

▸ 4. Spectre d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'augmente pas le degré

Prop. 6 **P** f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \deg f(P) \leqslant \deg P$.

Alors la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire supérieure sa diagonale fournit les valeurs propres de f.

▸ 5. Valeurs propres et vecteurs propres d'une projection.

Prop. 7 F est G sont deux sous-espaces de E supplémentaires. Soit p la projection sur F parallèlement à G.

$F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - Id_E)$ et $G = \operatorname{Ker} p$.

1. Si $F = \{0_E\}$, $G = E$ et p est l'application linéaire nulle ; son spectre est $\{0\}$ et elle est diagonalisable !

2. Si $G = \{0_E\}$, $F = E$ et p est l'identité ; son spectre est $\{1\}$ et elle est diagonalisable !

3. On suppose que F et G ne sont pas réduits au vecteur nul.
   - ▹ Le spectre de p est $\{0, 1\}$.
   - ▹ F (resp. G) est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. 0).
   - ▹ p est diagonalisable.

▸ 6. Valeurs propres et vecteurs propres d'une symétrie.

Prop. 8 F est G sont deux sous-espaces de E supplémentaires. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. $F = \operatorname{Ker}(s - Id_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(s + Id_E)$.

1. Si $F = \{0_E\}$, $G = E$ et s est $-\operatorname{Id}_E$; son spectre est $\{-1\}$ et elle est diagonalisable !

2. Si $G = \{0_E\}$, $F = E$ et s est Id_E ; son spectre est $\{1\}$ et elle est diagonalisable !

3. On suppose que F et G ne sont pas réduits au vecteur nul.
   - ▹ Le spectre de s est $\{-1, 1\}$.
   - ▹ F (resp. G) est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. -1).
   - ▹ s est diagonalisable.

▸ 7. Dimension des sous-espaces propres et rang.

Prop. 9 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et λ une valeur propre de f.

$$\dim \text{SEP}\ (f, \lambda) = \dim E - \operatorname{rg}(f - \lambda Id_E).$$

Prop. 10 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

$$\dim \mathrm{SEP}\ (A,\lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n).$$

▶ 8. Endomorphisme ou matrice n'ayant qu'une valeur propre.

Prop. 11 1. Un endomorphisme f de E n'ayant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si il est égal à λId_E.

2. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si elle est égale à λI_n.

▶ 9. Une localisation des vecteurs propres...

Prop. 12 Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f de E.

Si $\lambda = 0 : \mathrm{SEP}\ (f,\lambda) = \mathrm{Ker}\, f$.

Si $\lambda \neq 0 : \mathrm{SEP}\ (f,\lambda) \subset \mathrm{Im}\, f$.

$\boxed{\mathrm{P}}$ Ainsi les valeurs propres non nulles de f sont les valeurs propres de la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$ (que l'on peut considérer comme un endomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$).

▶ 10. Droites vectorielles et hyperplans stables

Prop. 13 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

1. Une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

2 A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

VIII POUR NE PAS MOURIR IDIOT hein, c'est déjà fait ?

▶ Encore une CNS de diagonalisation

Prop. 14 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

$\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } f \text{ possède un polynome annulateur scindé à racine simple}}$.

Autrement dit si et seulement si il existe des scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_p deux à deux distincts tels que $(f - \lambda_1 Id_E) \circ (f - \lambda_2 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Même chose pour une matrice.

▶ La trigonalisation

Déf. 11 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

f est **trigonalisable** s'il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit triangulaire (supérieure).

Déf. 12 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire (supérieure).

Déf. 13 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

f est trigonalisable si et seulement si f possède un polynôme annulateur scindé ; autrement dit si et seulement si il existe des scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_p tels que $(f-\lambda_1 Id_E)\circ(f-\lambda_2 Id_E)\circ\cdots\circ(f-\lambda_p Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Même chose pour une matrice.

Prop. 15
1. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension non nulle <u>sur $\mathbb{C}$</u> est trigonalisable.
2. Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

IX SAVOIR FAIRE

- Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomophisme et d'une matrice.
- Construire une base de vecteurs propes.
- Diagonaliser un endomophisme ou une matrice.
- Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice dans la recherche des valeurs propres.
- Calculer la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.
- Trouver les racines $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

X DES ERREURS À NE PAS FAIRE

★ Soit X $\boxed{\text{le}}$ vecteur propre associé à la valeur propre λ.

★ Ecrire λ est valeur propre de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement $\exists X \neq 0, AX = \lambda X$ (à la place de $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0$ et $AX = \lambda X$).

★ La matrice A est inversible car elle n'a pas de zéro sur sa diagonale.

★ • La matrice A se diagonalise (ou est diagonale) dans la base...

• La matrice A s'écrit dans la base $\mathcal{B}$: ...

• $\boxed{\text{La}}$ base de vecteurs propres de f (ou A).

• La base $\boxed{\text{DES}}$ vecteurs propres de f (ou A).

★ A et P sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est inversible et $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

• P est la matrice des vecteurs propres de A.

• D est LA matrice diagonale semblable à A.

★ A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est un polynôme annulateur de A donc le spectre de A **<u>est l'ensemble</u>** des zéros de P.

★ Toute famille de vecteurs propres d'un endomorphisme f est libre.

★ Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, confondre $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\, A$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, A$.

★ A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une ou 2 valeurs propres donc A n'est pas diagonalisable.

XI DES RHÉTORIQUES TOUTES FAITES

Les phrases toutes faites sont encadrées dans les cadres.

▶ **Semblablité**

Soit à montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Cherchons une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est B. On fait une analyse du problème en commençant par supposer que $\mathcal{B}'$ existe et on termine par une synthèse.

R. 1 **Recherche simultanée des valeurs propres et des sous-espaces propres d'un endomorphisme**

Soit f un endomorphisme de E ($\dim E \in \mathbb{N}^*$).

Moyen : on se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$. Si cet ensemble n'est pas réduit à $\{0_E\}$, λ est valeur propre de f ; dans le cas contraire λ n'est pas valeur propre de f.

Pratiquement : soit λ un élément de $\mathbb{K}$ et et soit u un élément de E.

$$f(u) = \lambda u \Longleftrightarrow \cdots$$

Il ne reste plus qu'à résoudre (le plus souvent) un système avec beaucoup de lucidité. Les valeurs propres de f sont les λ qui donnent à ce système une solution non nulle. Il faut dans cette phase étudier le cas de $\boxed{\text{tous}}$ les éléments λ de $\mathbb{K}$.

▶ **Recherche des valeurs propres d'une matrice.**

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$.

Suit cette recherche en utilisant des opérations élémentaires licites.

A'_λ est une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ est non inversible donc si et seulement si A'_λ est non inversible. Ainsi λ est valeur propre de A si et seulement si l'un des éléments de la diagonale de A'_λ est nul donc si et seulement si ...

▶ **Recherche simultanée des valeurs propres et des sous-espaces propres d'une matrice**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Moyen : on se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda\, X\}$. Si cet ensemble n'est pas réduit à $\{0_E\}$, λ est valeur propre de A ; dans le cas contraire λ n'est pas valeur propre de A.

Pratiquement : soit λ un élément de $\mathbb{K}$ et et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \Longleftrightarrow \cdots$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système... avec beaucoup de lucidité. Les valeurs propres de A sont les λ qui donnent à ce système une solution non nulle. Il faut dans cette phase étudier le cas de $\boxed{\text{tous}}$ les éléments λ de $\mathbb{K}$.

Même chose pour un endomorphisme.

► **Diagonalisation d'un endomorphisme diagonalisable**

f est un endomorphisme diagonalisable de E. $\mathcal{B}$ est une base de E. $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\mathcal{B}_i$ de SEP (f, λ_i).

Comme $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}$ SEP (f, λ_i), $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2,..., α_n (ok pour alpha ?).

$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

► **Diagonalisation d'une matrice diagonalisable**

A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\mathcal{B}_i$ de SEP (A, λ_i).

Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}$ SEP (A, λ_i) $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2,..., α_n (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base $\mathcal{B}'$.

$\boxed{\text{Alors}}$ $P^{-1} A P = D$ avec $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

XII QUELQUES THÈMES CLASSIQUES DU CHAPITRE RÉDUCTION

T. 1 • Calcul de la puissance $p^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme ou d'une matrice.

T. 2 • Recherche des racines $p^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme ou d'une matrice.

T. 3 • Trigonalisation d'un endomorphisme ou d'une matrice.

T. 4 • $\mathrm{Sp}\, A^{-1} = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\}$, SEP (A, λ) = SEP $\left(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}\right)$ et A^{-1} diagonalisable si et seulement si A diagonalisable.

T. 5 • $\mathrm{Sp}\, {}^tA = \mathrm{Sp}\, A$, $\dim(\text{SEP } ({}^tA, \lambda)) = \dim(\text{SEP } (A, \lambda))$ et ${}^tA$ diagonalisable si et seulement si A diagonalisable.

T. 6 • Matrices semblables.

T. 7 • Valeurs propres d'une matrice triangulaire.

T. 8 • CNS de diagonalisation d'une matrice n'ayant qu'une seule valeur propre.

T. 9 • f et g sont deux endomorphismes de E et f est diagonalisable. CNS pour que $f \circ g = g \circ f$

T. 10 • Polynôme de matrice. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Sp}\, P(A) \subset P(\mathrm{Sp}\, A)$ avec égalité si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

T. 11 • Polynôme annulateur. $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P(A) = 0$, alors $\mathrm{Sp}\, A \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'une des racines de P est valeur propre de A.

T. 12 • Etude de l'ensemble des polynômes annulateurs de A. Polynôme minimal.

T. 13 • Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Sp}\, AB = \mathrm{Sp}\, BA$.

T. 14 • Réduction d'une matrice circulante.

T. 15 • Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

T. 16 • Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'augmente pas le degré.

T. 17 • Réduction d'un endomorphisme d'un espace vetoriel de fonctions.

T. 18 • Réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $f(M) = AM$ ou $f(M) = AM - MA$ par exemple.

T. 19 • Localisation des valeurs propres. Disques de Gerschgorin et ovales de Cassini.

T. 20 • Valeurs propres d'une matrice stochastique.

T. 21 • Eléments propres d'une projection.

T. 22 • Réduction de "la matrice J".

T. 23 • Réduction des "matrices CL".

T. 24 • Projecteurs spectraux.

T. 25 • Commutant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes. Commutant d'une matrice ou d'un endomorphisme diagonalisable .

T. 26 • Sous-espaces stables par un endomorphisme.

T. 27 • Diagonalisation et polynôme annulateur scindé à racines simples.

T. 28 • Trigonalisation et polynôme annulateur scindé.

XIII UN RÉSUMÉ DES BONS COUPS DU PÈRE JIVAROS POUR AMÉLIORER TA RÉDUCTION ATTITUDE

C.1 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda\, I_n$ n'est pas inversible.

C.2 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

C.3 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et λ une valeur propre de f.

$$\dim \text{SEP }(f, \lambda) = \dim E - \text{rg}(f - \lambda Id_E).$$

C.4 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

$$\dim \text{SEP }(A, \lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n).$$

C.5 Deux matrices semblables ont même spectre (la réciproque est fausse).

C.6 Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n ayant n valeurs propres deux à deux distinctes alors les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles... et f est diagonalisable.

C.7 f est un endomorphisme de E et λ est une valeur propre **non nulle** de f. Alors SEP $(f, \lambda) \subset \text{Im}\, f$.

Ainsi les valeurs propres non nulles de f sont les valeurs propres de la restriction de f à $\text{Im}\, f$ qui est (presque...) un endomorphisme de $\text{Im}\, f$.

$\boxed{\textbf{C.8}}$ A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$.

• Si λ est une valeur propre de A : $\dim\Big(\text{SEP }({}^tA, \lambda)\Big) = \dim\Big(\text{SEP }(A, \lambda)\Big)$.

• ${}^tA$ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

$\boxed{\textbf{C.9}}$ A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

• Si λ est une valeur propre de A : SEP $\left(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}\right) =$ SEP (A, λ).

• A^{-1} est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

• Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont des vecteurs propres de A et de A^{-1}.

$\boxed{\textbf{C.10}}$ Soit p une projection. p est diagonalisable et si p n'est ni $o_{\mathcal{L}(E)}$ ni Id_E alors $\mathrm{Sp}\, p = \{0, 1\}$.

$\boxed{\textbf{C.11}}$ E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

1. Une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

2 A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

$\boxed{\textbf{C.12}}$ E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). f et g sont deux endomorphismes de E.

Si $f \circ g = g \circ f$ les sous espaces propres de f (resp. g) sont stables par g (resp. f).

$\boxed{\textbf{C.13}}$ E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). f et g sont deux endomorphismes **diagonalisables** de E.

f et g se diagonalisent dans la même base si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.

$\boxed{\textbf{C.14}}$ A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

$\boxed{\textbf{C.15}}$ E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). f est un endomorphisme diagonalisable de E.

λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f. Pour tout élément k de $[\![1, p]\!]$ on pose $F_k =$ SEP (f, λ_k).

Un sous-espace vectoriel E de F est stable par f si et seulement si il existe p sous-espaces vectoriels G_1, G_2, ..., G_p de F_1, F_2, ..., F_p tels que $F = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

$\boxed{\textbf{C.16}}$ A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

• Si $B = P^{-1}AP$ alors $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$.

• Si A est diagonalisable $Q(A)$ l'est aussi et $\mathrm{Sp}(Q(A) = Q(\mathrm{Sp}\, A)$.

$\boxed{\textbf{C.17}}$ Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une seule valeur propre λ.

A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda\, I_n$.

C.18 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

C.19 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur non nul de A.

Le spectre de A est contenu dans l'ensemble des zéros de P.

C.20 Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Tout multiple d'un polynôme annulateur de A est un polynôme annulateur de A.

• Si P_0 est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimum, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P_0.

• Il existe un unique polynôme normalisé P_1 de $\mathbb{K}[X]$ tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P_1. P_1 est le polynôme minimal de A.

C.21 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est diagonalisable si et seulement si A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

C.22 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est semblable à une matrice triangulaire supérieure (resp inférieure) si et seulement si A possède un polynôme annulateur scindé.

C.23 Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$ et P un polynôme annulateur non nul de A.

L'une au moins des racines de P est une valeur propre de A.

C.24 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$ possède au moins une valeur propre.

C.25 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

C.26 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{R}})$. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$.

Si λ est une valeur propre de A, $\overline{\lambda}$ est encore une valeur propre de A, SEP $\left(A, \overline{\lambda}\right) = \{\overline{X}; X \in \text{SEP } (A, \lambda)\}$

et $\dim \text{SEP } \left(A, \overline{\lambda}\right) = \text{SEP } (A, \lambda)$.

C.27 On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\operatorname{Sp} J = \{0, n\}$, J est diagonalisable, SEP $(J, 0)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ et SEP (J, n) est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

C.28 α et β sont deux éléments de $\mathbb{K}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\operatorname{Sp} A = \{\alpha-\beta, \alpha-\beta+n\beta\}$, A est diagonalisable, SEP $(A, \alpha-\beta)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ et SEP $(A, \alpha-\beta+n\beta)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

C.29 Soit A une matrice de rang 1. A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas nulle.

C.30 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Si f n'augmente pas le degré autrement dit si $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \deg f(P) \leqslant \deg P$ alors la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure et les valeurs propres de f sont les éléments de sa diagonale.

C.31 $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

• 1 est valeur propre de A.

• Si λ est un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A : $|\lambda| \leqslant 1$.

• Si de plus $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} > 0$, 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ de module 1 et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

XIV QUELQUES CONSIDERATIONS PRATIQUES

---

1. Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour trouver les valeurs propres de A on utilise usuellement l'une des deux méthodes suivantes.

→ On se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$. λ est valeur propre de A si et seulement si cette réduite n'est pas inversible ; autrement dit si et seulement si elle a au moins un zéro sur sa diagonale.

On est prié de faire attention aux opérations $L_i \longleftarrow aL_i + bL_j$ (ou $C_i \longleftarrow aC_i + bC_j$) avec a "quelconque".

Pour chaque valeur propre λ de A on détermine ensuite le sous-espace propre associé en recherchant les X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que : $AX = \lambda X$.

→ On se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on résoud l'équation : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $AX = \lambda X$. λ est valeur propre de A si et seulement si cette équation admet une solution non nulle.

Cette méthode fournit au passage les sous-espaces propres de A.

2. Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme

f est un endomorphisme de E.

→ Si E est de dimension quelconque, pour trouver les valeurs propres de f, on cherche pour λ dans $\mathbb{K}$, le noyau de $f - \lambda Id_E$. λ est valeur propre de f si et seulement si ce noyau n'est pas réduit au vecteur nul. On obtient alors simultanément les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

→ Si E est de dimension finie n non nulle, on peut encore déterminer la matrice A de f dans une base de E et rechercher vecteurs propres et valeurs propres de A.

3. Savoir si un endomorphisme est diagonalisable et le diagonaliser.

On suppose que f est endomorphisme de E et que E est de dimension n non nulle.

Diagonaliser f c'est trouver une base de E constituée de vecteurs propres de f. parindent=1cm

→ 1^{er} cas. f possède n valeurs propres distinctes.

f est alors diagonalisable et on obtient une base de E constituée de vecteurs propres de f en prenant un vecteur propre associé à chacunes des n valeurs propres de f.

→ $2^{\text{ème}}$ cas. f a moins de n valeurs propres.

Si la somme des dimensions des sous-espaces propres est n, f est diagonalisable et on obtient une base de vecteurs propres de f en concatenant une base de chacun des sous-espaces propres de f.

4. Savoir si une matrice est diagonalisable et la diagonaliser.

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diagonaliser A c'est trouver une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

On commence donc par montrer que la matrice A est diagonalisable en utilisant un des critères proposés ci-dessus.

On construit ensuite P. A ce niveau, si la pratique est convenable, la dialectique est souvent calamiteuse. Il est fréquent d'entendre "parler" de la matrice de A dans la base...

Essayons de mettre les choses au point et distinguons deux méthodes.

▷ Méthode 1. On se cale sur un endomorphisme.

On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ est A. f est diagonalisable puique A est sensée l'être.

On construit alors une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de f.

La matrice D de f dans $\mathcal{B}'$ est diagonale et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, P est inversible et $D = P^{-1}AP$.

▷ Méthode 2. On raisonne de manière purement matricielle.

On construit une base $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base de chacun des sous-espace propres de A.

On note alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ (qui n'est autre que la matrice dont les colonnes sont : X_1, X_2, $\cdots$, X_n). On peut alors dire que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

Plus précisémént, si X_1, X_2, $\cdots$, X_n sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n alors :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

5. Une condition d'arrêt.

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il arrive que l'on puisse trouver rapidement p valeurs propres λ_1, λ_2,$\cdots$, λ_p pour A avec des sous-espaces propres de dimensions respectivement supérieures ou égales à n_1, n_2,$\cdots$, n_p (c'est par exemple le cas si l'on connait DES vecteurs propres sans nécessairement connaitre LES vecteurs propres).

Si : $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$ on peut alors dire que :

1. Le spectre de A est exactement $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$.
2. Les sous espaces propres respectivement associés à λ_1, λ_2,$\cdots$, λ_p sont de dimensions exactement n_1, n_2,$\cdots$, n_p.

Même chose pour un endomorphisme.