RÉDUCTION

RÉDUCTION

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique de la réduction, souvent oubliés...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. n appartient à $\mathbb{N}^*$.

I ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

▸ 1. Définitions usuelles

Th. 1 et **déf. 1** Soient f un endomorphisme de E et λ un élément de $\mathbb{K}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe un vecteur $\boxed{\text{non nul}}$ u de E tel que : $f(u) = \lambda u$.

ii) $\text{Ker}(f - \lambda Id_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

iii) $f - \lambda Id_E$ n'est pas injective.

Si l'une des assertions suivantes est vérifiée on dit que λ est une **valeur propre** de f.

Déf. 2 L'ensemble des valeurs propres de f est le **spectre** de f ; on le note souvent $\text{Sp}(f)$.

Déf. 3 Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

On appelle **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ, tout vecteur $\boxed{\text{non nul}}$ u de E vérifiant : $f(u) = \lambda u$.

Déf. 4 Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

Le **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ est le sous-espace :

$$\{u \in E \mid f(u) = \lambda u\} = \text{Ker}(f - \lambda Id_E)$$

Nous le noterons souvent SEP (f, λ).

Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est la réunion de l'ensemble des vecteurs propres de f associés à λ et de $\{0_E\}$. Qu'on se le dise et redise.

▸ 2. Premières propriétés

Th. 2 f est un endomorphisme de E. λ_1, λ_2,..., λ_p sont p valeurs propres $\boxed{\text{distinctes}}$ de f.

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, u_i est un vecteur propre de f associé à la valeur λ_i et $\mathcal{B}_i$ est une base du sous-espace propre F_{λ_i} associé à λ_i.

1. $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille libre de E.
2. "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$" est une famille libre de E.
3. F_{λ_1}, F_{λ_2},..., F_{λ_p} sont en somme directe.

Th. 3 On suppose que E est de dimension n non nulle. f est un endomorphisme de E.

1. f possède au plus n valeurs propres distinctes.

2. La somme des dimensions des sous-espaces propres de f ne dépasse pas n.

II ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE

▶ 1. Définition

Déf. 5 Un endomorphisme f de E est **diagonalisable** s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Diagonaliser f c'est trouver une base de E constituée de vecteurs propres de f.

▶ 2. Conditions pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable

Prop. 1 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E .

f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Th. 4 *Une condition* **suffisante** *de diagonalisation.*

E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.
Si f possède n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Th. 5 *Des conditions* **nécessaires et suffisantes** *de diagonalisation.*

E est de dimension finie non nulle et f est un endomorphisme de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est diagonalisable.

ii) E est la somme (directe) des sous-espaces propres de f ; c'est à dire : $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, f} \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)$.

iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de E.

▶ 3. L'aspect pratique

Th. 6 **PPP** E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nulle.

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E.

1. On obtient une base de E constituée de vecteurs propres de f en concatenant une base de chacun des sous-espaces propres de f.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

III ÉLÉMENTS PROPRES D'UNE MATRICE

▶ 1. Définitions usuelles

Th. 7 et **déf. 6** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe une matrice colonne X non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que : $AX = \lambda X$.

ii) $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Si l'une des assertions est vérifiée on dit que λ est une **valeur propre** de A.

Déf. 7 Le **spectre** de A est l'ensemble des valeurs propres de A.

On le note : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou $\mathrm{Sp}(A)$ (si aucune confusion n'est à craindre).

Si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ne confondra pas $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Déf. 8 Soient A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

On appelle **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ, toute matrice colonne **non nulle** X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant : $AX = \lambda X$.

Déf. 9 Soient A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est le sous-espace $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}$.

On le note souvent SEP (A, λ)

▶ 2. Le lien avec les endomorphismes

Th. 8 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B}$ est une base de E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

1. f et A ont même spectre.

2. Soit u est un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

X est un vecteur propre de A associé à λ si et seulement si u est un vecteur propre de f associé à λ.

3. Soit λ une valeur propre de f et A. Le sous-espace propre de f associé à λ a même dimension que le sous-espace propre de A associé à λ. Autrement dit :

$$\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda)$$

▶ 3. Propriétés

Th. 9 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

λ_1, λ_2,..., λ_p sont p valeurs propres distinctes de A.

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, X_i est un vecteur propre de A associé à la valeur λ_i et $\widehat{\mathcal{B}}_i$ est une base du sous-espace propre $\widehat{F}_{\lambda_i}$ associé à λ_i.

1. $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. "$\widehat{\mathcal{B}}_1 \cup \widehat{\mathcal{B}}_2 \cup \cdots \cup \widehat{\mathcal{B}}_p$" est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
3. $\widehat{F}_{\lambda_1}$, $\widehat{F}_{\lambda_2}$,..., $\widehat{F}_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Th. 10 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A a au plus n valeurs propres distinctes.
2. La somme des dimensions des sous-espaces propres de A ne dépasse pas n.

Th. 11 $\boxed{\textbf{P}}$ Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure ou inférieure son spectre est l'ensemble des éléments de sa diagonale.

Th. 12 Deux matrices semblables ont même spectre.

Th. 13 $\boxed{\textbf{P}}$ Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

IV MATRICE DIAGONALISABLE

▸ 1. Définition

Déf. 10 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Diagonaliser A c'est trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$

▸ 2. Conditions pour qu'une matrice soit diagonalisable

Th. 14 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B}$ est une base de E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$. A est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable.

Th. 15 **Une condition suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A possède n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Th. 16 **Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice soit diagonalisable.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est diagonalisable.

i') A est semblable à une matrice diagonale.

ii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la somme (directe) des sous-espaces propres de A.

iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n.

iv) Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

v) A est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable.

▶ 3. L'aspect pratique

Th. 17 **PPP** Soit A une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

$$P^{-1}AP \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Th. 18 **P** Soit A une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ telles que $P^{-1}AP = D$.

On note, pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.

Alors $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

V POLYNÔME D'ENDOMORPHISME OU DE MATRICE ET RÉDUCTION

▶ 1. Quelques généralités

Prop. 2 **P** f est un endomorphisme de E, u est un élément de E et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ f^k(u) = \lambda^k u}$

2. Soit Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

• $\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } Q(f)(u) = Q(\lambda)\, u}$.

• Si u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors u est un vecteur propre de $Q(f)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

Prop. 3 **P** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X}$

2. Soit Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

• $\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } Q(A)X = Q(\lambda)\, X}$.

• Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors X est un vecteur propre de $Q(A)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

▶ 2. Polynôme annulateur et spectre

Th. 19 **P** f est un endomorphisme de E et Q un polynôme annulateur de f.

L'ensemble des valeurs propres de f est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de Q.

Th. 20 **P** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q un polynôme annulateur de A.

L'ensemble des valeurs propres de A est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de Q.

▸ 3. Polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice diagonalisable

Th. 21 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q un élément de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associées aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n alors $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $Q(A)$ respectivement associées aux valeurs propres $Q(\lambda_1)$, $Q(\lambda_2)$, ..., $Q(\lambda_n)$.

2. Si A est diagonalisable, $Q(A)$ est diagonalisable.

3. Si D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ alors $Q(D)$ est diagonale et $Q(D) = P^{-1}Q(A)P$.

Th. 22 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension non nulle n. Soit f un endomorphisme de E et Q un élément de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associées aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n alors $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de $Q(f)$ respectivement associées aux valeurs propres $Q(\lambda_1)$, $Q(\lambda_2)$, ..., $Q(\lambda_n)$.

2. Si f est diagonalisable, $Q(f)$ est diagonalisable.

VI MATRICES SYMÉTRIQUES

Th. 23 Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(R)$.

1. Toutes les valeurs propres de A sont réelles. Autrement dit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, A = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\, A$.

2. A est diagonalisable.

Nous y reviendrons au niveau des espaces vectoriels euclidiens

VII COMPLÉMENTS

▸ 1. Le cas des matrices d'ordre 2

Th. 24 **P** Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

λ est une valeur propre de A si et seulement si $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$.

▸ 2. Réduction et transposée

Prop. 4 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A et ${}^tA$ ont même spectre (mais n'ont pas nécessairement les mêmes vecteurs propres).
2. A et ${}^tA$ sont simultanément diagonalisables.

▶ 3. Réduction et inverse

Prop. 5 Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. 0 n'est pas valeur propre de A.

2. Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A.

3. A et A^{-1} ont même vecteurs propres. Plus précisément si F est le sous espace propre de A associé à la valeur propre λ, F est le sous espace propre de A^{-1} associé à la valeur propre $1/\lambda$. En clair :

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp} A,\ \text{SEP}\ \left(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}\right) = \text{SEP}\ (A, \lambda)$$

4. A et A^{-1} sont simultanément diagonalisables.

5. "Même" chose pour les endomorphismes.

▶ 4. Spectre d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'augmente pas le degré

Prop. 6 $\boxed{\mathbf{P}}$ f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \deg f(P) \leqslant \deg P$.

Alors la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire supérieure sa diagonale fournit les valeurs propres de f.

▶ 5. Valeurs propres et vecteurs propres d'une projection.

Prop. 7 F est G sont deux sous-espaces de E supplémentaires. Soit p la projection sur F parallèlement à G.

$F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - Id_E)$ et $G = \operatorname{Ker} p$.

1. Si $F = \{0_E\}$, $G = E$ et p est l'application linéaire nulle ; son spectre est $\{0\}$ et elle est diagonalisable !

2. Si $G = \{0_E\}$, $F = E$ et p est l'identité ; son spectre est $\{1\}$ et elle est diagonalisable !

3. On suppose que F et G ne sont pas réduits au vecteur nul.
   - ▷ Le spectre de p est $\{0, 1\}$.
   - ▷ F (resp. G) est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. 0).
   - ▷ p est diagonalisable.

▶ 6. Valeurs propres et vecteurs propres d'une symétrie.

Prop. 8 F est G sont deux sous-espaces de E supplémentaires. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. $F = \operatorname{Ker}(s - Id_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(s + Id_E)$.

1. Si $F = \{0_E\}$, $G = E$ et s est $-\operatorname{Id}_E$; son spectre est $\{-1\}$ et elle est diagonalisable !

2. Si $G = \{0_E\}$, $F = E$ et s est Id_E ; son spectre est $\{1\}$ et elle est diagonalisable !

3. On suppose que F et G ne sont pas réduits au vecteur nul.
   - ▷ Le spectre de s est $\{-1, 1\}$.
   - ▷ F (resp. G) est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. -1).
   - ▷ s est diagonalisable.

▶ 7. Dimension des sous-espaces propres et rang.

Prop. 9 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et λ une valeur propre de f.

$$\dim \text{SEP}\ (f, \lambda) = \dim E - \operatorname{rg}(f - \lambda Id_E).$$

Prop. 10 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

$$\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n).$$

▶ 8. Endomorphisme ou matrice n'ayant qu'une valeur propre.

Prop. 11 1. Un endomorphisme f de E n'ayant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si il est égal à λId_E.

2. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si elle est égale à λI_n.

▶ 9. Une localisation des vecteurs propres...

Prop. 12 Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f de E.

Si $\lambda = 0 : \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \mathrm{Ker}\, f$.

Si $\lambda \neq 0 : \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) \subset \mathrm{Im}\, f$.

$\boxed{\boxed{\text{P}}}$ Ainsi les valeurs propres non nulles de f sont les valeurs propres de la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$ (que l'on peut considérer comme un endomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$).

▶ 10. Droites vectorielles et hyperplans stables

Prop. 13 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

1. Une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

2 A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

VIII POUR NE PAS MOURIR IDIOT hein, c'est déjà fait ?

▶ Encore une CNS de diagonalisation

Prop. 14 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

$\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } f \text{ possède un polynome annulateur scindé à racine simple}}$.

Autrement dit si et seulement si il existe des scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_p deux à deux distincts tels que $(f - \lambda_1 Id_E) \circ (f - \lambda_2 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Même chose pour une matrice.

▶ La trigonalisation

Déf. 11 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

f est **trigonalisable** s'il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit triangulaire (supérieure).

Déf. 12 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire (supérieure).

Déf. 13 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

f est trigonalisable si et seulement si f possède un polynôme annulateur scindé ; autrement dit si et seulement si il existe des scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_p tels que $(f-\lambda_1 Id_E)\circ(f-\lambda_2 Id_E)\circ\cdots\circ(f-\lambda_p Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Même chose pour une matrice.

Prop. 15
1. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension non nulle <u>sur $\mathbb{C}$</u> est trigonalisable.
2. Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

IX SAVOIR FAIRE

- Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomophisme et d'une matrice.
- Construire une base de vecteurs propes.
- Diagonaliser un endomophisme ou une matrice.
- Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice dans la recherche des valeurs propres.
- Calculer la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.
- Trouver les racines $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

X DES ERREURS À NE PAS FAIRE

★ Soit X $\boxed{\text{le}}$ vecteur propre associé à la valeur propre λ.

★ Ecrire λ est valeur propre de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement $\exists X \neq 0, AX = \lambda X$ (à la place de $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0$ et $AX = \lambda X$).

★ La matrice A est inversible car elle n'a pas de zéro sur sa diagonale.

★ • La matrice A se diagonalise (ou est diagonale) dans la base...

• La matrice A s'écrit dans la base $\mathcal{B}$: ...

• $\boxed{\text{La}}$ base de vecteurs propres de f (ou A).

• La base $\boxed{\text{DES}}$ vecteurs propres de f (ou A).

★ A et P sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est inversible et $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

• P est la matrice des vecteurs propres de A.

• D est LA matrice diagonale semblable à A.

★ A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est un polynôme annulateur de A donc le spectre de A <u>**est l'ensemble**</u> des zéros de P.

★ Toute famille de vecteurs propres d'un endomorphisme f est libre.

★ Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, confondre $\text{Sp}_{\mathbb{R}}\, A$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}\, A$.

★ A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une ou 2 valeurs propres donc A n'est pas diagonalisable.

XI DES RHÉTORIQUES TOUTES FAITES

Les phrases toutes faites sont encadrées dans les cadres.

► **Semblablité**

Soit à montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Cherchons une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est B. On fait une analyse du problème en commençant par supposer que $\mathcal{B}'$ existe et on termine par une synthèse.

R. 1 Recherche simultanée des valeurs propres et des sous-espaces propres d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme de E ($\dim E \in \mathbb{N}^*$).

Moyen : on se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$. Si cet ensemble n'est pas réduit à $\{0_E\}$, λ est valeur propre de f ; dans le cas contraire λ n'est pas valeur propre de f.

Pratiquement : soit λ un élément de $\mathbb{K}$ et et soit u un élément de E.

$$f(u) = \lambda u \iff \cdots$$

Il ne reste plus qu'à résoudre (le plus souvent) un système avec beaucoup de lucidité. Les valeurs propres de f sont les λ qui donnent à ce système une solution non nulle. Il faut dans cette phase étudier le cas de $\boxed{\text{tous}}$ les éléments λ de $\mathbb{K}$.

► **Recherche des valeurs propres d'une matrice.**

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$.

Suit cette recherche en utilisant des opérations élémentaires licites.

A'_λ est une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ est non inversible donc si et seulement si A'_λ est non inversible. Ainsi λ est valeur propre de A si et seulement si l'un des éléments de la diagonale de A'_λ est nul donc si et seulement si ...

► **Recherche simultanée des valeurs propres et des sous-espaces propres d'une matrice**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Moyen : on se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda\, X\}$. Si cet ensemble n'est pas réduit à $\{0_E\}$, λ est valeur propre de A ; dans le cas contraire λ n'est pas valeur propre de A.

Pratiquement : soit λ un élément de $\mathbb{K}$ et et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \iff \cdots$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système... avec beaucoup de lucidité. Les valeurs propres de A sont les λ qui donnent à ce système une solution non nulle. Il faut dans cette phase étudier le cas de $\boxed{\text{tous}}$ les éléments λ de $\mathbb{K}$.

Même chose pour un endomorphisme.

► **Diagonalisation d'un endomorphisme diagonalisable**

f est un endomorphisme diagonalisable de E. $\mathcal{B}$ est une base de E. $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\mathcal{B}_i$ de SEP (f, λ_i).

Comme $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } (f, \lambda_i)$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2,..., α_n (ok pour alpha ?).

$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

► **Diagonalisation d'une matrice diagonalisable**

A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\mathcal{B}_i$ de SEP (A, λ_i).

Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } (A, \lambda_i)$ $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2,..., α_n (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base $\mathcal{B}'$.

Alors $P^{-1} A P = D$ avec $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

XII QUELQUES THÈMES CLASSIQUES DU CHAPITRE RÉDUCTION

T. 1 • Calcul de la puissance $p^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme ou d'une matrice.

T. 2 • Recherche des racines $p^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme ou d'une matrice.

T. 3 • Trigonalisation d'un endomorphisme ou d'une matrice.

T. 4 • $\mathrm{Sp}\, A^{-1} = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\}$, SEP $(A, \lambda) =$ SEP $\left(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}\right)$ et A^{-1} diagonalisable si et seulement si A diagonalisable.

T. 5 • $\mathrm{Sp}\, {}^tA = \mathrm{Sp}\, A$, $\dim(\text{SEP } ({}^tA, \lambda)) = \dim(\text{SEP } (A, \lambda))$ et ${}^tA$ diagonalisable si et seulement si A diagonalisable.

T. 6 • Matrices semblables.

T. 7 • Valeurs propres d'une matrice triangulaire.

T. 8 • CNS de diagonalisation d'une matrice n'ayant qu'une seule valeur propre.

T. 9 • f et g sont deux endomorphismes de E et f est diagonalisable. CNS pour que $f \circ g = g \circ f$

T. 10 • Polynôme de matrice. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Sp}\, P(A) \subset P(\mathrm{Sp}\, A)$ avec égalité si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

T. 11 • Polynôme annulateur. $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P(A) = 0$, alors $\mathrm{Sp}\, A \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'une des racines de P est valeur propre de A.

T. 12 • Etude de l'ensemble des polynômes annulateurs de A. Polynôme minimal.

T. 13 • Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Sp}\, AB = \mathrm{Sp}\, BA$.

T. 14 • Réduction d'une matrice circulante.

T. 15 • Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

T. 16 • Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'augmente pas le degré.

T. 17 • Réduction d'un endomorphisme d'un espace vetoriel de fonctions.

T. 18 • Réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $f(M) = AM$ ou $f(M) = AM - MA$ par exemple.

T. 19 • Localisation des valeurs propres. Disques de Gerschgorin et ovales de Cassini.

T. 20 • Valeurs propres d'une matrice stochastique.

T. 21 • Eléments propres d'une projection.

T. 22 • Réduction de "la matrice J".

T. 23 • Réduction des "matrices CL".

T. 24 • Projecteurs spectraux.

T. 25 • Commutant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes. Commutant d'une matrice ou d'un endomorphisme diagonalisable .

T. 26 • Sous-espaces stables par un endomorphisme.

T. 27 • Diagonalisation et polynôme annulateur scindé à racines simples.

T. 28 • Trigonalisation et polynôme annulateur scindé.

XIII UN RÉSUMÉ DES BONS COUPS DU PÈRE JIVAROS POUR AMÉLIORER TA RÉDUCTION ATTITUDE

Niveau 1

C. 1 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda\, I_n$ n'est pas inversible.

λ est valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n) < n$.

C. 2 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

C. 3 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. 0 est valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{rg}\, A < n$.

C. 4 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n non nulle.

Si f n'est pas injectif, 0 est valeur propre de f et $\mathrm{SEP}\ (f, 0) = \mathrm{Ker}\, f$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (f, 0) = \dim E - \mathrm{rg}\, f$

C. 5 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A n'est pas inversible, 0 est valeur propre de A et $\dim \mathrm{SEP}\ (A, 0) = n - \mathrm{rg}\, A$.

C. 6 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et λ une valeur propre de f.

$$\dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \dim E - \mathrm{rg}(f - \lambda Id_E).$$

$\boxed{\textbf{C. 7}}$ A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

$$\dim \text{SEP } (A, \lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n).$$

$\boxed{\textbf{C. 8}}$ f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n non nulle.

Si λ_1, λ_2, ..., λ_p sont p valeur propres distinctes de f : $\boxed{p \leqslant \dim E}$ et $\boxed{\sum_{k=1}^{p} \dim \text{SEP } (f, \lambda_k) \leqslant \dim E}$.

f a au plus n valeurs propres et $\boxed{\sum_{\lambda \in \text{Sp}\, f} \text{SEP } (f, \lambda) \leqslant \dim E}$.

$\boxed{\textbf{C. 9}}$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si λ_1, λ_2, ..., λ_p sont p valeur propres distinctes de A : $\boxed{p \leqslant n}$ et $\boxed{\sum_{k=1}^{p} \dim \text{SEP } (A, \lambda_k) \leqslant n}$.

A a au plus n valeurs propres et $\boxed{\sum_{\lambda \in \text{Sp}\, A} \text{SEP } (A, \lambda) \leqslant n}$.

$\boxed{\textbf{C. 10}}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. λ est une valeur propre de A si et seulement si $(a-\lambda)(d-\lambda)-bc = 0$.

$\boxed{\textbf{C. 11}}$ A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaires les valeurs propres de A sont les éléments de sa diagonale.

$\boxed{\textbf{C. 12}}$ Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Si f n'augmente pas le degré autrement dit si $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \deg f(P) \leqslant \deg P$ alors la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure et les valeurs propres de f sont les éléments de sa diagonale.

$\boxed{\textbf{C. 13}}$ Deux matrices semblables ont même spectre (la réciproque est fausse) et sont simultanément diagonalisables..

$\boxed{\textbf{C. 14}}$ E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

Une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

$\boxed{\textbf{C. 15}}$ Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n ayant n valeurs propres deux à deux distinctes alors les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles et f est diagonalisable.

"Même chose" pour les matrices.

$\boxed{\textbf{C. 16}}$ f est un endomorphisme de E et λ est une valeur propre **non nulle** de f. Alors SEP $(f, \lambda) \subset \text{Im}\, f$.

Ainsi les valeurs propres non nulles de f sont les valeurs propres de la restriction de f à $\text{Im}\, f$ qui est (presque...) un endomorphisme de $\text{Im}\, f$.

$\boxed{\textbf{C. 17}}$ A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• $\text{Sp}({}^tA) = \text{Sp}(A)$.

• Si λ est une valeur propre de A : $\dim\Big(\text{SEP } ({}^tA, \lambda)\Big) = \dim\Big(\text{SEP } (A, \lambda)\Big)$.

• ${}^tA$ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

C. 18 A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

• Si λ est une valeur propre de A : $\mathrm{SEP}\ \left(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}\right) = \mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$.

• A^{-1} est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

• Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont des vecteurs propres de A et de A^{-1}.

C. 19 Soit p une projection de E. p est diagonalisable et si p n'est ni $0_{\mathcal{L}(E)}$ ni Id_E alors $\mathrm{Sp}\, p = \{0, 1\}$.

C. 20 Soit s une symétrie de E. s est diagonalisable et si s n'est ni Id_E ni $-Id_E$ alors $\mathrm{Sp}\, s = \{-1, 1\}$.

C. 21 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). f et g sont deux endomorphismes de E.

Si $f \circ g = g \circ f$ les sous espaces propres de f (resp. g) sont stables par g (resp. f).

"Même chose" pour les matrices.

C. 22 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). f et g sont deux endomorphismes de E.

On suppose que f admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

$f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g.

"Même chose" pour les matrices.

C. 23 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

On suppose que A est diagonalisable et que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeur propres α_1, α_2, ..., α_n. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à cette base $\mathcal{B}$. Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

• $Q(A)$ est diagonalisable.

• $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est encore une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $Q(A)$ respectivement associés aux valeur propres $Q(\alpha_1)$, $Q(\alpha_2)$, ..., $Q(\alpha_n)$.

• $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $P^{-1}Q(A)P = \mathrm{Diag}(Q(\alpha_1), Q(\alpha_2), \ldots, Q(\alpha_n))$.

• $\mathrm{Sp}\, Q(A) = \{Q(\alpha_1), Q(\alpha_2), \ldots, Q(\alpha_n)\}$ ou $\mathrm{Sp}\, Q(A) = Q(\mathrm{Sp}\, A)$.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 24 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une seule valeur propre λ.

A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda\, I_n$.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 25 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 26 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur non nul de A.

Le spectre de A est contenu dans l'ensemble des zéros de P.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 27 Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Tout multiple d'un polynôme annulateur de A est un polynôme annulateur de A.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 28 $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable et λ_1, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de f.

$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de f.

C. 29 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable et λ_1, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de A.

$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de A.

C. 30 Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$ et P un polynôme annulateur non nul de A.

L'une au moins des racines de P est une valeur propre de A.

C. 31 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$ possède au moins une valeur propre.

C. 32 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{R}})$. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$.

Si λ est une valeur propre de A, $\overline{\lambda}$ est encore une valeur propre de A, SEP $\left(A, \overline{\lambda}\right) = \{\overline{X}; X \in \text{SEP } (A, \lambda)\}$

et $\dim \text{SEP } \left(A, \overline{\lambda}\right) = \text{SEP } (A, \lambda)$.

C. 33 On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\text{Sp}\, J = \{0, n\}$, J est diagonalisable, SEP $(J, 0)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ et SEP (J, n) est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

C. 34 $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

• 1 est valeur propre de A.

• Si λ est un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A : $|\lambda| \leqslant 1$.

Niveau 2

C. 35 Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Tout multiple d'un polynôme annulateur de A est un polynôme annulateur de A.

• Si P_0 est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimum, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P_0.

• Il existe un unique polynôme normalisé P_1 de $\mathbb{K}[X]$ tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P_1. P_1 est le polynôme minimal de A.

• Si P_0 est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimum, LES valeurs propres de A sont LES racines de P_0.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 36 A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

C. 37 A est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \{0\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A \subset i\,\mathbb{R}$.

C. 38 Soit A une matrice de rang 1.

A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas nulle.

A est diagonalisable si et seulement si la trace de A n'est pas nulle.

C. 39 $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

- 1 est valeur propre de A.
- Si λ est un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A : $|\lambda| \leqslant 1$.
- Si de plus $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} > 0$, 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ de module 1 et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

C. 40 **Disques de Gerschgorin**. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leqslant r_i\}$. Alors $\mathrm{Sp}\, A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

C. 41 α et β sont deux éléments de $\mathbb{K}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathrm{Sp}\, A = \{\alpha - \beta, \alpha - \beta + n\beta\}$ et A est diagonalisable.

SEP $(A, \alpha - \beta)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ et SEP $(A, \alpha - \beta + n\beta)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Niveau 3

C. 42 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

F est un sous espace vectoriel de E, de dimension non nulle, stable par f.

Si f est diagonalisable, la restriction de f à F définit un endomorphisme de F qui est diagonalisable.

C. 43 E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. f est un endomorphisme diagonalisable de E.

λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f. Pour tout élément k de $[\![1,p]\!]$ on pose $F_k = $ SEP (f, λ_k).

Un sous-espace vectoriel E de F est stable par f si et seulement si il existe p sous-espaces vectoriels G_1, G_2, ..., G_p de F_1, F_2, ..., F_p tels que $F = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

$\boxed{\textbf{C. 44}}$ E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). f et g sont deux endomorphismes **diagonalisables** de E.

f et g se diagonalisent dans la même base si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.

$\boxed{\textbf{C. 45}}$ E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

$\boxed{\textbf{C. 46}}$ A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable si et seulement si elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

$\boxed{\textbf{C. 47}}$ Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est semblable à une matrice triangulaire supérieure (resp inférieure) si et seulement si A possède un polynôme annulateur scindé.

$\boxed{\textbf{C. 48}}$ Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

$\boxed{\textbf{C. 49}}$ $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

• 1 est valeur propre de A.

• Si λ est un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A : $|\lambda| \leqslant 1$.

• Si λ est une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ de module 1, il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ tel que λ soit une racine $r^{\text{ème}}$ de l'unité.

$\boxed{\textbf{C. 50}}$ **Ovales de Cassini**. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, on pose : $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ et pour tout (i,j) élément de $[\![1,n]\!]^2$ on pose : $C_{ij} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}|\, |z - a_{jj}| \leqslant r_i\, r_j\}$. Alors $\operatorname{Sp} A \subset \bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} C_{ij}$.

XIV QUELQUES CONSIDERATIONS PRATIQUES

---

1. Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour trouver les valeurs propres de A on utilise usuellement l'une des deux méthodes suivantes.

→ On se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche une réduite de Gauss de $A-\lambda I_n$. λ est valeur propre de A si et seulement si cette réduite n'est pas inversible ; autrement dit si et seulement si elle a au moins un zéro sur sa diagonale.

On est prié de faire attention aux opérations $L_i \longleftarrow aL_i + bL_j$ (ou $C_i \longleftarrow aC_i + bC_j$) avec a "quelconque".

Pour chaque valeur propre λ de A on détermine ensuite le sous-espace propre associé en recherchant les X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que : $AX = \lambda X$.

→ On se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on résoud l'équation : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $AX = \lambda X$. λ est valeur propre de A si et seulement si cette équation admet une solution non nulle.

Cette méthode fournit au passage les sous-espaces propres de A.

2. Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme

f est un endomorphisme de E.

→ Si E est de dimension quelconque, pour trouver les valeurs propres de f, on cherche pour λ dans $\mathbb{K}$, le noyau de $f - \lambda Id_E$. λ est valeur propre de f si et seulement si ce noyau n'est pas réduit au vecteur nul. On obtient alors simultanément les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

→ Si E est de dimension finie n non nulle, on peut encore déterminer la matrice A de f dans une base de E et rechercher vecteurs propres et valeurs propres de A.

3. Savoir si un endomorphisme est diagonalisable et le diagonaliser.

On suppose que f est endomorphisme de E et que E est de dimension n non nulle.

Diagonaliser f c'est trouver une base de E constituée de vecteurs propres de f. parindent=1cm

→ 1^{er} cas. f possède n valeurs propres distinctes.

f est alors diagonalisable et on obtient une base de E constituée de vecteurs propres de f en prenant un vecteur propre associé à chacunes des n valeurs propres de f.

→ $2^{\text{ème}}$ cas. f a moins de n valeurs propres.

Si la somme des dimensions des sous-espaces propres est n, f est diagonalisable et on obtient une base de vecteurs propres de f en concatenant une base de chacun des sous-espaces propres de f.

4. Savoir si une matrice est diagonalisable et la diagonaliser.

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diagonaliser A c'est trouver une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

On commence donc par montrer que la matrice A est diagonalisable en utilisant un des critères proposés ci-dessus.

On construit ensuite P. A ce niveau, si la pratique est convenable, la dialectique est souvent calamiteuse. Il est fréquent d'entendre "parler" de la matrice de A dans la base...

Essayons de mettre les choses au point et distinguons deux méthodes.

▷ Méthode 1. On se cale sur un endomorphisme.

On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ est A. f est diagonalisable puique A est sensée l'être.

On construit alors une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de f.

La matrice D de f dans $\mathcal{B}'$ est diagonale et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, P est inversible et $D = P^{-1}AP$.

▷ Méthode 2. On raisonne de manière purement matricielle.

On construit une base $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base de chacun des sous-espace propres de A.

On note alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ (qui n'est autre que la matrice dont les colonnes sont : X_1, X_2, $\cdots$, X_n). On peut alors dire que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

Plus précisémént, si X_1, X_2, $\cdots$, X_n sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n alors :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

5. Une condition d'arrêt.

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il arrive que l'on puisse trouver rapidement p valeurs propres λ_1, λ_2,$\cdots$, λ_p pour A avec des sous-espaces propres de dimensions respectivement supérieures ou égales à n_1, n_2,$\cdots$, n_p (c'est par exemple le cas si l'on connait DES vecteurs propres sans nécessairement connaitre LES vecteurs propres).

Si : $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$ on peut alors dire que :

1. Le spectre de A est exactement $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$.
2. Les sous espaces propres respectivement associés à λ_1, λ_2,$\cdots$, λ_p sont de dimensions exactement n_1, n_2,$\cdots$, n_p.

Même chose pour un endomorphisme.