

---

**GÉNÉRALITÉS**

---

**PHARE**

Opérations usuelles sur les parties d'un ensemble.

**Application injective, surjective, bijective.**

---

**EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...**

Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. Opérations sur les parties et sur leurs fonctions indicatrices.

---

**COMPLEXES ET POLYNÔMES**

---

**PHARE**

Formule d'Euler et de Moivre.

Racines  $n^{\text{ème}}$  de l'unité.

Opérations algébriques sur les polynômes.

**Division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$  (théorie et pratique).**

**Ordre de multiplicité d'une racine (définition et caractérisations).**

**Théorème de d'Alembert.**

---

**EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...**

**“L'étude de  $\mathbb{C}$  est l'occasion d'une brève révision de la trigonométrie”. Formules d'addition et de duplication.**

---

**ALGÈBRE LINÉAIRE**

---

**PHARE**

Théorème de la base incomplète.

Les “différentes” notions de rang.

Caractérisation des bases en dimension finie.

Caractérisations de la supplémentarité (+ pratique de l'analyse-synthèse).

Théorème du rang.

Noyau et image d'une application linéaire.

Caractérisation des isomorphismes.

Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

Projection.

Polynôme d'endomorphisme ou de matrice.

Le produit matriciel.

Caractérisation des matrices inversibles. Pratique de l'inversibilité.

Changement de base (théorique et pratique).

CNS pour qu'un endomorphisme (resp. une matrice) soit diagonalisable.

Pratique de la réduction.

La semblabilité et sa pratique.

**EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...**

Symétries vectorielles (faire EDHEC 2002).

Somme directe de  $p$  sous-espaces vectoriels.

Formes linéaires et hyperplans.

Inversibilité et inverse d'une matrice d'ordre 2.

Systèmes linéaires (écriture matricielle, système de Cramer, structure de l'ensemble des solutions).

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie possède un polynôme annulateur.

$f$  est un endomorphisme du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ ,  $x$  appartient à  $E$ ,  $\lambda$  appartient à  $\mathbb{K}$  et  $P$  appartient à  $\mathbb{K}[X]$ .

Si  $f(x) = \lambda x$  alors  $P(f)(x) = P(\lambda)x$ .

**ALGÈBRE BILINÉAIRE**

**PHARE**

Définition d'un produit scalaire.

Cauchy-Schwarz (+égalité)

Pythagore.

Coordonnées d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs ou de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée.

Expression matricielle du produit scalaire de deux vecteurs ou de la norme d'un vecteur en base orthonormée.

Changement de base orthonormée. Matrice orthogonale.

Orthonormalisation de Schmidt.

Projection orthogonale. Théorème de meilleure approximation.

Méthode des moindres carrés.

Réduction d'un endomorphisme symétrique et d'une matrice symétrique.

**EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...**

•  $A$  est une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  une base **orthonormée** de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  respectivement associés aux valeurs propres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Alors :

$$A = \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k {}^t X_k$$

- Étude du signe d'une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$  associée à un endomorphisme symétrique (resp. à une matrice symétrique). On ramènera cette étude à celle des valeurs propres de l'endomorphisme (resp. de la matrice).

## SUITES

### PHARE

Définitions et propriétés usuelles.

Théorème d'encadrement.

Suites adjacentes.

Théorème de la limite monotone.

Caractérisation séquentielle de la notion de limite de fonction.

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

### Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.

Suites définies par une relation de récurrence de type  $u_{n+1} = f(u_n)$

Suite négligeable devant une autre.

Suites équivalentes.

### EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...

Deux suites adjacentes convergent et ont même limite est un résultat admis et pris comme caractérisation de  $\mathbb{R}$  (1).

Il résulte de (1) que : tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Il résulte de (1) que : dans  $\mathbb{R}$  toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure.

Construction de suites adjacentes par dichotomie.

Une suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .

Partie entière d'un réel.

## SÉRIES

### PHARE

Définition et propriétés usuelles.

Les séries du programme.

Le théorème fondamental pour les séries à termes positifs.

Les trois critères de comparaison pour les séries à termes positifs.

L'absolue convergence.

Le théorème séries et intégrales généralisées.

### EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...

“On soulignera l'intérêt de la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  pour l'étude de la suite  $(u_n)$ ”.

Formules de sommation des séries géométriques et de leurs dérivées successives.

Formule du binôme négatif ; si  $r$  appartient à  $\mathbb{N}$  et si  $x$  est un réel tel que  $|x| < 1$  alors  $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$ .

## LIMITE ET CONTINUITÉ

### PHARE

Toutes les définitions.

Caractérisation séquentielle des limites.

Opérations.

Limite et ordre. **Théorème d'encadrement.**

Fonction négligeable devant une autre.

**Fonctions équivalentes.**

**Théorème de la limite monotone.**

**Théorème des valeurs intermédiaires.**

Image d'un segment par une fonction continue.

**Théorème de la bijection.**

## CALCUL DIFFERENTIEL

### PHARE

Les définitions.

Opérations.

**Dérivation des fonctions réciproques.**

**Théorème de Rolle.**

**Egalité et inégalité des accroissement finis.**

Dérivées successives. Formule de Leibniz.

Fonctions convexes et fonctions concaves (définition et caractérisations).

### EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...

Définition et dérivation de la fonction arctan

## DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

### PHARE

Définition.

Somme, produit **composition** de développements limités.

Application de la formule de Taylor-Young aux développements limités

**Les cinq dl du programme :**  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $x \rightarrow \ln(1+x)$  et  $x \rightarrow (1+x)^\alpha$

## CALCUL INTÉGRAL

PHARE

Définition de l'intégrale. Propriétés.

Notion de primitive.

Intégration par parties. Changement de variable.

**Formule de Taylor avec reste intégral. Formule de Taylor-Lagrange. Égalité et inégalité de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor-Young.**

**Sommes de Riemann.**

Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...

Prolongement des fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$ .

**L'équation différentielle  $y' = ay$ .**

## INTÉGRALES SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

PHARE

Définition de l'intégrale sur un intervalle quelconque. Propriétés. Reste d'une intégrale convergente.

Les intégrales de référence.

Le théorème fondamental pour les fonctions positives.

Les trois critères de comparaison pour les fonctions positives.

L'absolue convergence.

**Le théorème séries et intégrales généralisées.**

**La fonction gamma (sa définition et les deux propriétés du programme).**

EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...

Le théorème de changement de variable.

## FONCTIONS NUMÉRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

**PHARE**

Droites, segments, sous-espaces affines et hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n$ .

Boules, ouverts et fermés de  $\mathbb{R}^n$ .

Parties Bornées, parties convexes de  $\mathbb{R}^n$ .

Limite et continuité (définition, propriétés, opérations).

**Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue.**

**Fonction continue sur un fermé borné**

Dérivées partielles d'ordre 1 et 2 (définition, propriétés, opérations). Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  (resp.  $\mathcal{C}^2$ ).

**Théorème de Schwarz**

**Développement limité d'ordre 1 (resp. 2) pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  (resp.  $\mathcal{C}^2$ ).**

Composition. Dérivées partielles de  $X \rightarrow (\varphi \circ f)(X)$ . Dérivée et dérivée seconde de  $t \rightarrow f(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ .

Dérivée directionnelle première (resp. seconde).

**Théorème des accroissements finis. Égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.**

**Extremums : les définitions de base, la condition nécessaire, la condition suffisante (sans oublié le cas  $n = 2$ ), **pratique**.**

**Extremums sous contrainte d'égalités linéaires : position du problème, condition nécessaire, **pratique**.**

**EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...**

Graphe d'une fonction, ensembles de niveau.

Fonction affine tangente, hyperplan affine tangent.

**DÉNOMBREMENT****PHARE**

Dénombrement des parties d'un ensemble à  $n$  éléments, des parties à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments, des  $p$ -listes d'éléments d'un ensemble à  $n$  éléments, des  $p$ -listes d'éléments distincts d'un ensemble à  $n$  éléments, des permutations d'un ensemble à  $n$  éléments.

Formule du binôme.

**PROBABILITÉS****PHARE**

Ensemble fini ou dénombrable.

Tribu où  $\sigma$ -algèbre et espace probabilisable.

**Système complet d'événements.**

Probabilité et espace probabilisé.

**Formule de Poincaré. Propriété de la limite monotone.**

**Probabilités conditionnelles. Formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.**

**Indépendance mutuelle de tribus et d'événements.**

EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...

$\sigma$ -algèbre engendrée par un système complet d'événements.

Algèbre d'événements. Algèbre engendrée par une famille d'événements.

Ensemble négligeable, propriété vraie presque sûrement.

## VARIABLES ALÉATOIRES

PHARE

Définition et caractérisations.

Fonction de répartition (définition, propriétés, propriétés caractéristiques).

Opérations.

Variables aléatoires discrètes : définition, caractérisations, loi de probabilité, propriétés,  $g \circ X$ .

Variables aléatoires discrètes : espérance, **théorème de transfert**, variance, moments.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Lois discrètes usuelles.

EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...

Système complet et  $\sigma$  algèbre associés à une variable aléatoire.

## VECTEURS ALÉATOIRES

PHARE

Notion de vecteur aléatoire. Vecteur aléatoire discret.

Loi conjointe, lois marginales et lois conditionnelles.

**Indépendance d'une suite de variables aléatoires.**

**Espérances conditionnelles et système complet.**

Lois de  $Z = g(X, Y)$ , de  $X + Y$  et de  $XY$ .

**Espérance de  $Z = g(X, Y)$ . Théorème de transfert.**

Moments et opérations. Notion de covariance.

EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...

Système complet et  $\sigma$  algèbre  $\mathcal{A}_{(X,Y)}$  associés à un couple de variables aléatoires.

Matrice de covariance.

Coefficient de corrélation. Les cas  $|\rho_{XY}| = 1$ .

## VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

### PHARE

Définition et caractérisation des variables aléatoires à densité.

Fonction d'une variable aléatoire à densité ;  $g \circ X$ .

Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité.

**Théorème de transfert.**

**Somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.**

Les stabilités classiques.

Les lois classiques et leurs moments.

### EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...

Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire.

La nouvelle notation de la loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

Croissance de l'espérance.

Variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

## CONVERGENCE ET APPROXIMATIONS

### PHARE

Convergence en probabilité et en loi.

Loi faible des grands nombres.

**Théorème de la limite centrée.**

Approximations usuelles (hypergéométrique par binômiale, binômiale par Poisson ou normale et Poisson par normale)

### EN RELISANT BIEN LE PROGRAMME...

Toutes indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

## STATISTIQUES

### PHARE

Vocabulaire, représentation, paramètres associés à une série statistique simple (resp. double).

**Ajustement affine d'une série statistique à deux variables par la méthode des moindres carrés, droites de régression.**

## ESTIMATION

### PHARE

**L'objet de l'estimation.**

Estimateur, biais d'un estimateur, estimateur sans biais ou asymptotiquement sans biais, risque quadratique d'un estimateur, estimateur convergent.

Moyenne empirique.

**Estimation par intervalle de l'espérance d'une loi normale d'écart-type donné.**

**Estimation par intervalle du paramètre d'une loi de Bernoulli.**

## ALGORITHMIQUE.

### NOTIONS ESSENTIELLES

Variables et types (integer, real, boolean, array).

Opérations élémentaires ( :=, =, >, <, >=, <=, <>, +, -, \*, /, and, or, not).

Fonctions usuelles (div, mod, ln, exp, trunc, abs, sqrt, sin, cos).

Structures de bases (if...then, for...to...do, for...to...downto, while...do, repeat...until).

Procédures et fonctions. **Passage des paramètres par valeur ou par variable.**

**Récurtivité.**

**SAVOIR FAIRE** (ici c'est exactement le programme à l'orthographe près)

Calculs de sommes et de produits.

Calcul de termes d'une suite récurrente.

Calculs de valeurs approchées de la somme d'une série.

Calcul approché de la racine d'une équation du type  $f(x) = 0$ .

Mise en œuvre de l'algorithme de dichotomie.

Écriture et utilisation de fonctions servant pour des dénombrements classiques :  $n^p$ ,  $n!$ ,  $\binom{n}{p}$ .

Calcul de la valeur d'un polynôme de haut degré. Principe et mise en œuvre de l'algorithme d'Hörner

Utilisation du générateur aléatoire random, random (n) et de l'instruction randomize pour simuler des phénomènes aléatoires.

Écriture de fonctions PASCAL simulant des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur  $[[n_1, n_2]]$ , une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , une loi géométrique de paramètre  $p$  une loi uniforme sur  $[a, b]$ .

Calcul approché de la valeur d'une intégrale.

Calcul des termes d'une suite du "type  $u_{n+1} = f(u_n)$ ".

Recherche de la valeur et du rang des extremums d'une liste.

Recherche dichotomique d'un élément d'une liste ordonnée.

## NOUVEAUTÉS

- Nouvelle notation :  $\binom{n}{p}$ .
- Borne supérieure et inférieure.
- **Tout réel est limite d'une suite de rationnels.**
- **Relation entre la nature de la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  et de la suite de terme général  $u_n$ .**
- **Dérivées successives des séries géométriques.**
- Caractérisation séquentielle de la notion de limite.
- Introduction de  $\overline{\mathbb{R}}$ .
- Définition de l'intégrale.
- Reste d'une intégrale convergente.
- Nature de  $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$
- Théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées.
- **Prolongement des fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$ .**
- **Composition des développements limités.**
- **Egalité de Taylor-Lagrange.**
- **Fonction arctan.**
- Partie convexe de  $\mathbb{R}^n$ .
- Equation du graphe d'une fonction définie dans  $\mathbb{R}^n$ .
- Lignes et ensemble de niveaux.
- Fonction affine tangente. Hyperplan affine tangent au graphe.
- **Dérivées directionnelles.**
- **Théorème des accroissements finis pour les fonctions de plusieurs variables.**
- **Egalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.**
- **Recherche d'extremums sous contrainte d'égalités linéaires.**
- **Symétries vectorielles.**
- Inversibilité et inversion des matrices d'ordre 2.
- Transposition d'un produit, Transposition de l'inverse.
- $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $x \in E$ .  $f(x) = \lambda x$  donne  $P(f)(x) = P(\lambda)x$ .
- Tout endomorphisme d'un espace de dimension non nulle possède un polynôme annulateur non nul.
- Cas de l'égalité dans Cauchy-Schwarz.

- Matrice orthogonale.
  - Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.
  - Forme quadratique associée à un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}^n$  ou à une matrice symétrique.
  - Nouvelle notation :  $P_A(B)$ .
  - **Espérance conditionnelle.**
  - **Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale.**
-