R.

EXERCICE 1

Exercice **N1-** **Diagonalisation d'un endomorphisme.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. Diagonaliser f si cela est possible.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$.

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(u) = 0_E \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - (5+\lambda)y + 3z = 0 \\ 6x - 6y + (4-\lambda)z = 0 \end{cases} \underset{\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1-\lambda)x - 3y + 3z = 0 \\ (\lambda+2)(x - y) = 0 \\ (\lambda+2)(2y - z) = 0 \end{cases}$$

1er Cas.. $\lambda = -2$

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow 3x - 3y + 3z = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 0$.

Alors -2 est valeur propre de f et $SEP(f, -2)$ est le plan d'équation $x - y + z = 0$ dans $\mathcal{B}$.

2e Cas.. $\lambda \neq -2$

$$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - 3y + 3z = 0 \\ x - y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \\ 0 = (1-\lambda)y - 3y + 6y = (4-\lambda)y \end{cases}$$

a) $\lambda = 4$

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \end{cases}$. Ceci suffit pour dire que :

4 est valeur propre de f et $SEP(f, 4)$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1 + e_2 + 2e_3$

b) $\lambda \neq 4$

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{I}d_E) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = y = 0 \\ z = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

λ n'est pas valeur propre de f... normal avec ce qui précède !

Finalement $Sp\, f = \{2, 4\}$, $SEP(f, 2)$ est le plan vectoriel d'équation $x - y + z = 0$ dans $\mathcal{B}$ et $SEP(f, 4)$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1 + e_2 + 2e_3$.

$\dim SEP(f, 2) + \dim SEP(f, 4) = 2 + 1 = 3 = \dim E$. f est diagonalisable.

...

$1-1+0=0$ et $0-1+1=0$ donc $(e_1+e_2,\ e_2+e_3)$ est une famille d'éléments de $SEP(f,2)$.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(e_1+e_2)+\beta(e_2+e_3)=0_E$. $\alpha e_1+(\alpha+\beta)e_2+e_3=0_E$.

Alors $\alpha=\alpha+\beta=\beta=0$ car (e_1,e_2,e_3) est libre. Ainsi :

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\alpha(e_1+e_2)+\beta(e_2+e_3)=0_E \Rightarrow \alpha=\beta=0$. Alors $\mathcal{B}_1=(e_1+e_2,e_2+e_3)$ est une famille libre de cardinal 2 de $SEP(f,2)$ qui est de dimension 2 donc $\mathcal{B}_1$ est une base de $SEP(f,2)$.

$e_1+e_2+2e_3\neq 0_E$ donc $\mathcal{B}_2=(e_1+e_2+2e_3)$ est une base de $SEP(f,4)$.

Comme $E=SEP(f,2)\oplus SEP(f,4)$, $\mathcal{B}'=$ "$\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$" est une base de E. Mieux :

<u>$\mathcal{B}'=(e_1+e_2,\ e_2+e_3,\ e_1+e_2+2e_3)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 2, 2 et 4.</u>

<u>Remarque</u>.. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\mathrm{Diag}(2,2,4).$$

<u>Exercice</u>.. Notez que $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

R. **EXERCICE 2**

Exercice	N1	**Calcul des puissances d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$..**

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Calculer A^n pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$

<u>Version 1</u> On cherche les valeurs propres de A puis ses sous-espaces propres

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A_\lambda = A - \lambda I_3$

$A_\lambda = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$; $L_1 \leftrightarrow L_3$ donc $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1-\lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{\lambda+1}{2} L_1$ donc :

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}+2 \end{pmatrix}$; $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ donc $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 0 & 2 & -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}+4 \\ 0 & \lambda+1 & -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}+2 \end{pmatrix}$; $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{\lambda+1}{2} L_2$

donc : $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 0 & 2 & \frac{1}{2}(8-\lambda^2-\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$ avec $P(\lambda) = -\frac{\lambda+1}{2} \times \frac{1}{2} \times (8-\lambda^2-\lambda) - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} + 2$.

$P(\lambda) = \frac{\lambda+1}{4}(\lambda^2+\lambda-8) - \frac{1}{2}(\lambda^2+\lambda-4) = \frac{1}{4}(\lambda^3+\lambda^2-8\lambda+\lambda^2+\lambda-8-2\lambda^2-2\lambda+8) = \frac{1}{4}(\lambda^3-9\lambda) = \frac{1}{4}\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$

Ainsi $A'_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 0 & 2 & (8-\lambda^2-\lambda)/2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\lambda(\lambda-3)(\lambda+3) \end{pmatrix}$ est une réduite de Gauss de $A_\lambda = A - \lambda I_3$.

A'_λ est triangulaire supérieure

$\lambda \in \operatorname{Sp} A \iff A_\lambda$ non inversible $\iff A'_\lambda$ non inversible $\iff \frac{1}{4}\lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0 \iff \lambda \in \{-3, 0, 3\}$.

Ainsi $\underline{\operatorname{Sp} A = \{-3, 0, 3\}}$. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A admet trois valeurs propres distinctes donc

<u>A est diagonalisable.</u>

Cherchons les sous-espaces propres de A. On pourrait utiliser A'_λ mais je conseille de revenir à A_λ car A'_λ peut contenir des erreurs (souvent de recopie) n'ayant pas affecté la recherche des valeurs propres de A...

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $X \in SEP(A,-3) \iff (A+3I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X \in SEP(A,-3) \iff \begin{cases} 2x+2z=0 \\ 4y+2z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=-z/2 \\ 0=-2z-z+3z \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=-\frac{1}{2}z \end{cases}$ Alors $SEP(A,-3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

$X \in SEP(A,0) \Leftrightarrow AX = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2z = 0 \\ y+2z = 0 \\ 2x+2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \\ 4z-4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \end{cases}$.

Alors $SEP(A,0) = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$X \in SEP(A,3) \Leftrightarrow (A-3I_3)X = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+2z=0 \\ -2y+2z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = z \\ z+2z-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = z \end{cases}$

$SEP(A,3) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Version 2 On cherche simultanément les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. $(A-\lambda I_3)X = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(A-\lambda I_3)X = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} -(\lambda+1)x + 2z = 0 \\ (1-\lambda)y + 2z = 0 \\ 2x+2y-\lambda z = 0 \end{cases}$.

$(A-\lambda I_3)X = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{\lambda+1}{2}x \\ 0 = 2x+2y-\lambda z = 2x+2y-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}x = \frac{1}{2}(4y+(4-\lambda^2-\lambda)x) \\ 0 = (1-\lambda)y+2z = (1-\lambda)y+(\lambda+1)x \end{cases}$

$(A-\lambda I_3)X = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{\lambda+1}{2}x \\ y = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x \\ 0 = (1-\lambda)\frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x+(\lambda+1)x = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4-\lambda^3-\lambda^2+4\lambda+4\lambda+4)x = \frac{-\lambda^3+9\lambda}{4}x \end{cases}$

$(A-\lambda I_3)X = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{\lambda+1}{2}x \\ y = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x \\ \lambda(\lambda-3)(\lambda+3)x = 0 \end{cases}$

1er cas. – $\lambda(\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0$.

Alors $(A-\lambda I_3)X = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$. λ n'est pas valeur propre.

2e cas. – $\lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0$. $(A-\lambda I_3)X = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x \\ z = \frac{\lambda+1}{2}x \end{cases}$.

Alors $\lambda \in Sp\,A$ et $SEP(A,\lambda) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4) \\ \frac{\lambda+1}{2} \end{pmatrix}\right)$

On retrouve $Sp\,A = \{-3, 0, 3\}$, $SEP(A,-3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}(9-3-4) \\ \frac{-3+1}{2} \end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$,

$SEP(A,0) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et

$SEP(A,3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}(9+3-4) \\ \frac{3+1}{2} \end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Diagonalisons A. $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,-3)$;

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,0)$;

$\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,3)$;

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,-3) \oplus SEP(A,0) \oplus SEP(A,3)$.

Alors $\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$" est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $-3, 0, 3$.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $-3, 0, 3$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

1° $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2° P est inversible car P est une matrice de passage ;

3° $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$A = PDP^{-1}$. Une récurrence simple donne $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Cherchons P^{-1}.

Comme P est inversible nous raisonnerons donc par équivalences.

Soient $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux éléments de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $PX=Y$. $\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}2x+2y+z=x'\\x-2y+2z=y'\\-2x+y+2z=z'\end{cases}\qquad L_1+L_2 \text{ et } L_2+2L_3 \text{ donnent : } \begin{cases}3x+3z=x'+y' \\ -3x+6z=y'+2z'\end{cases}$$

$\underset{"(1)+(2)"}{\text{donc } 9z \overset{\downarrow}{=} x'+y'+y'+2z'}$ et $9x \underset{2(1)-(2)}{\overset{\uparrow}{=}} 2x'+2y'-y'-2z'$.

Ainsi $x=\frac{1}{9}(2x'+y'-2z')$ et $z=\frac{1}{9}(x'+2y'+2z')$.

L_1+L_3 donne : $3y+3z=x'+z'$ donc $y=\frac{1}{3}(x'+z'-3z)=\frac{1}{3}\left(x'+z'-\frac{1}{3}(x'+2y'+2z')\right)=\frac{1}{9}(3x'+3z'-x'-2y'-2z')$

Finalement
$$\begin{cases}x=\frac{1}{9}(2x'+y'-2z')\\y=\frac{1}{9}(2x'-2y'+z')\\z=\frac{1}{9}(x'+2y'+2z')\end{cases}$$
ce qui permet de dire que $P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons arbitrairement $\alpha=(-3)^n$ et $\beta=3^n$ pour faciliter les écritures.

$$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&0&0\\0&0&\beta\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2\alpha&0&\beta\\\alpha&0&2\beta\\-2\alpha&0&2\beta\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\alpha+\beta&2\alpha+2\beta&-4\alpha+2\beta\\2\alpha+2\beta&\alpha+4\beta&-2\alpha+4\beta\\-4\alpha+2\beta&-2\alpha+4\beta&4\alpha+4\beta\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4(-3)^n+3^n&2(-3)^n+2\times3^n&-4(-3)^n+2\times3^n\\2(-3)^n+2\times3^n&(-3)^n+4\times3^n&-2(-3)^n+4\times3^n\\-4(-3)^n+2\times3^n&-2(-3)^n+4\times3^n&4(-3)^n+4\times3^n\end{pmatrix}$.

On a encore $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=\frac{1}{9}\left[(-3)^n\begin{pmatrix}4&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&4\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}\right]$.

R.

EXERCICE 3

Exercice | N1$^-$ | **Diagonalisation d'une matrice de permutation et d'une matrice circulante.**

Oral ESCP 1997 2-4.

a b et c sont trois éléments de $\mathbb{C}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Thème abordé dans oral ESCP 1999 2-8, LYON 1991 MI Pb 1 (à l'ordre 4). On trouve dans HEC 2009 des matrices circulantes dans l'étude de suites définies par une réccurrence linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\lambda x + z = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \lambda x \\ y = \lambda z = \lambda^2 x \\ 0 = x - \lambda y = x - \lambda^3 x = (1-\lambda^3)x \end{cases}$

$(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} y = \lambda^2 x \\ z = \lambda x \\ (1-\lambda^3)x = 0 \end{cases}$.

<u>1er cas</u> $1-\lambda^3 \neq 0$. $(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. λ n'est pas valeur propre de A

<u>2e cas</u> $1-\lambda^3 = 0$. Donc $(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} y = \lambda^2 x \\ z = \lambda x \end{cases}$.

Alors λ est valeur propre de A et $SEP(A,\lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$.

Notons encore que $1-\lambda^3 = 0 \iff \lambda^3 = 1 \iff \lambda \in \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Ainsi $\underline{\underline{Sp\,A = \{1, j, j^2\},\ SEP(A,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ SEP(A,j) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right) \text{ et } SEP(A,j^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right)}}$

<u>Remarque</u>.. $j^2 = \bar{j}$!

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A possède trois valeurs propres distinctes donc <u>A est diagonalisable.</u>

Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_1 = (X_1)$ est une base de $SEP(A,1)$;

$\mathcal{B}_2 = (X_2)$ est une base de $SEP(A,j)$;

$\mathcal{B}_3 = (X_3)$ est une base de $SEP(A,j^2)$;

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) = SEP(A,1) \oplus SEP(A, \ ) \oplus SEP(B, j^2)$ car A est diagonalisable.

Alors $\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$" est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres associés aux valeurs propres 1, j et j^2.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1, j et j^2.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base $\mathcal{B}$.

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$.

2) P est inversible comme matrice de passage.

3) $P^{-1} A P = \mathrm{Diag}(1, j, j^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

<u>En plus</u>.. Inversons P. Il n'est pas utile dans ce qui suit de raisonner par équivalences car P est inversible. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ tels que $PX = Y$.

Alors $\begin{cases} x + y + z = x' & L_1 \\ x + j^2 y + j z = y' & L_2 \\ x + j y + j^2 z = z' & L_3 \end{cases}$. Rappelons que $1 + j + j^2 = 0$.

$L_1 + L_2 + L_3$, $L_1 + j L_2 + j^2 L_3$ et $L_1 + j^2 L_2 + j L_3$ donnent immédiatement :

$3x = x' + y' + z'$, $3y = x' + j y' + j^2 z'$ et $3z = x' + j^2 y' + j z'$.

Ainsi de suite $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

<u>Diagonalisons M.</u> $M = a I_3 + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c A$.

Or $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $M = a I_3 + b A^2 + A$.

VI) $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1, j et j^2. Alors $A X_1 = X_1$, $A X_2 = j X_2$, $A X_3 = j^2 X_3$, $A^2 X_1 = X_1$, $A^2 X_2 = j^2 X_2$ et $A^2 X_3 = (j^2)^2 X_3 = j X_3$.

Donc $M X_1 = a I_3 X_1 + b A^2 X_1 + c A X_1 = (a + b + c) X_1$.

$M X_2 = a I_3 X_2 + b A^2 X_2 + c A X_2 = (a + b j^2 + c j) X_2$.

$M X_3 = a I_3 X_3 + b A^2 X_3 + c A X_3 = (a + b j + c j^2) X_3$.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $a+b+c$, $a+bj^2+cj$ et $a+bj+cj^2$.

Comme P est la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base $\mathcal{B}$:

$P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(a+b+c,\ a+bj^2+cj,\ a+bj+cj^2)$.

(V2) $P^{-1}AP = D$ avec $D = \mathrm{Diag}(1, j, j^2)$.

Alors $P^{-1}MP = P^{-1}(aI_3 + bA^2 + cA)P = a\,P^{-1}I_3P + b\,P^{-1}A^2P + c\,P^{-1}AP = aI_3 + b(P^{-1}AP)^2 + cD$.

$P^{-1}MP = aI_3 + bD^2 + cD = a\,\mathrm{Diag}(1,1,1) + b\,\mathrm{Diag}(1, j^2, j^4) + c\,\mathrm{Diag}(1, j, j^2)$.

$P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(a+b+c,\ a+bj^2+cj,\ a+bj+cj^2)$.

M est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(a+b+c,\ a+bj^2+cj,\ a+bj+cj^2)$.

Alors 1°) M est diagonalisable

2°) $\mathrm{sp}\, M = \{a+b+c,\ a+bj^2+cj,\ a+bj+cj^2\}$

3°) comme $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $a+b+c$, $a+bj^2+cj$ et $a+bj+cj^2$.

Exercice Trouver les sous-espaces propres de M ! (M n'a pas nécessairement trois valeurs propres distinctes ...).

R.

EXERCICE 4

Exercice | N1⁻ | **QSP ESCP 2011.**

x, y et z sont trois réels. $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

A est triangulaire supérieure donc son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Ainsi $\mathrm{Sp}\, A = \{1, 2\}$. Soit $U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$U \in SEP(A, 2) \iff (A - 2I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\alpha + x\beta + y\gamma = 0 \\ \gamma z = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = x\beta \end{cases}$.

Alors $SEP(A, 2)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\dim SEP(A, 2) = 1$.

$U \in SEP(A, 1) \iff (A - I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x\beta + y\gamma = 0 \\ \beta + z\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -z\gamma \\ (y - xz)\gamma = 0 \end{cases}$

1er cas. $y - xz \neq 0$.

$U \in SEP(A, 1) \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$. $SEP(A, 1)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\dim SEP(A, 1) = 1$

2ème cas. $y - xz = 0$

$U \in SEP(A, 1) \iff \beta = -z\gamma \iff \beta + z\gamma = 0$. Alors $SEP(A, 1)$ est un plan vectoriel donc

$\dim SEP(A, 1) = 2$.

Finalement $\dim SEP(A, 1) + \dim SEP(A, 2) = \begin{cases} 2 & \text{si } y - xz \neq 0 \\ 3 & \text{si } y - xz = 0 \end{cases}$.

Plus de doute : <u>A est diagonalisable si et seulement si $y = xz$.</u>

R.

EXERCICE 5

Exercice **N1⁻** **La réduction au service d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.**

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = -4$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{1}{3}\left(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n\right).$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice A telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = AU_n$. Trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.

En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -\frac{1}{3}u_n + u_{n+1} + \frac{1}{3}u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} U_n$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ -\lambda y + z = 0 \\ -\frac{1}{3}x + y + \left(\frac{1}{3} - \lambda\right) z = 0 \end{cases}$.

$(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda y = \lambda^2 x \\ 0 = -\frac{1}{3}x + \lambda x + \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\lambda^2 x = x\left(-\lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{3}\right) = x\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \lambda^2\right) \end{cases}$.

$(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda^2 x \\ -\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)(\lambda - 1)(\lambda + 1)x = 0 \end{cases}$.

<u>1er cas..</u> $\lambda \notin \{-1, \frac{1}{3}, 1\}$. Alors $-\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)(\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0$.

donc $(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda^2 x \\ x = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0 \iff X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

donc λ n'est pas valeur propre de A.

<u>2ème cas..</u> $\lambda \in \{-1, \frac{1}{3}, 1\}$. Alors $-\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$. $(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda^2 x \end{cases}$

Donc λ est valeur propre de A et $SEP(A,\lambda) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi $\underline{Sp\, A = \{-1, \frac{1}{3}, 1\}}$.

$SEP(A,-1) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$. $SEP(A,\frac{1}{3}) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1/3\\1/9\end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

<u>A est diagonalisable</u> car $A \in M_3(\mathbb{R})$ et A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes

Posons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(X_1) est une base de $SEP(A,-1)$, (X_2) est une base de $SEP(A,\frac{1}{3})$ et (X_3) est une base de $SEP(A,1)$.

A étant diagonalisable, $M_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,-1) \oplus SEP(A,\frac{1}{3}) \oplus SEP(A,1)$.

<u>Alors $B = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $(-1, \frac{1}{3}, 1)$.</u> $B = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. Une récurrence simple donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

Evitons de calculer A^n en décomposant U_0 sur la base $B = (X_1, X_2, X_3)$.

Soit (α, β, δ) la famille des coordonnées de U_0 dans la base B.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0 = A^n(\alpha X_1 + \beta X_2 + \delta X_3) = \alpha A^n X_1 + \beta A^n X_2 + \delta A^n X_3$.

Or $AX_1 = -X_1$, $AX_2 = \frac{1}{3} X_2$ et $AX_3 = X_3$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n X_1 = (-1)^n X_1$, $A^n X_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^n X_2$ et $A^n X_3 = X_3$.

Ainsi <u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \alpha(-1)^n X_1 + \beta\left(\frac{1}{3}\right)^n X_2 + \delta X_3$</u>. Déterminons α, β et δ.

$\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix} = U_0 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \delta X_3 = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Alors $\begin{cases}\alpha + 9\beta + \delta = -4\\ -\alpha + 3\beta + \delta = -1\\ \alpha + \beta + \delta = 0\end{cases}$

Il n'est pas utile de raisonner par équivalence pour trouver α, β et δ !

$L_1 - L_3$ donne $8\beta = -4$ donc $\beta = -\frac{1}{2}$.

$L_2 + L_3$ donne $4\beta + 2\delta = -1$ et $L_3 - L_2$ donne $2\alpha - 2\beta = 1$. Alors $\begin{cases}\delta = -\frac{1}{2}(4\beta + 1) = \frac{1}{2}\\ \alpha = \frac{1}{2}(2\beta + 1) = 0\end{cases}$.

R.

La famille des coordonnées de U_0 dans la base (X_1, X_2, X_3) est $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \alpha(-1)^n X_1 + \beta\left(\frac{1}{3}\right)^n X_2 + \gamma X_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Remarques. 1. Trop souvent dans ce type de question les concepteurs font calculer A^n !
Voici quelques pistes pour s'y entraîner !

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$.

• $P = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ • P est inversible comme matrice de passage • $P^{-1}AP = D$ avec $D = \mathrm{Diag}\left(-1, \frac{1}{3}, 1\right)$

Alors $A = PDP^{-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1} = P\,\mathrm{Diag}\left((-1)^n, \left(\frac{1}{3}\right)^n, 1\right)P^{-1}$.

Un calcul assez simple donne $P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Ce qui donne après calculs :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} (-1)^n + 9\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 & -4(-1)^n + 4 & 3(-1)^n - 9(1/3)^n + 6 \\ -(-1)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 & 4(-1)^n + 4 & -3(-1)^n - 3(1/3)^n + 6 \\ (-1)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 & -4(-1)^n + 4 & 3(-1)^n - (1/3)^n + 6 \end{pmatrix}$. Le calcul de la première ligne de $A^n U_0$ redonne le résultat.

2. Tout cela est du pipo ! $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} - \frac{1}{3}u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$. Alors les suites $\left(u_{2p+2} - \frac{1}{3}u_{2p+1}\right)_{p \geq 0}$ et $\left(u_{2p+1} - \frac{1}{3}u_{2p}\right)_{p \geq 0}$ sont constantes. Or $u_2 - \frac{1}{3}u_1 = \frac{1}{3}$ et $u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{1}{3}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}$ et nous sommes ramené à une suite arithmético-géométrique qui se traite en deux lignes !

R.

EXERCICE 6

Exercice N1$^-$ **La réduction au service d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 3 again. ESSEC MIII Éco 2003 Partie I**

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous- ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3a\, u_{n+1} + (1-3a)\, u_n.$$

(L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble F.) .

I. Étude du cas particulier a = 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes $u_0,\ u_1, u_2$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3\, u_{n+1} - 2\, u_n.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit $M\, X_n$.

En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. a) Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé.

b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que les vecteurs $e'_1,\ e'_2,\ e'_3$ aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exprimer M en fonction de T , P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

5. a) Calculer P^{-1}(les calculs devront figurer sur la copie).

b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de $u_0,\ u_1,\ u_2$ et de l'entier naturel n.

I Etude du cas particulier $a=1$.

(Q1) Soit $n \in \mathbb{N}$. $MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n+3u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ MX_n = X_{n+1}$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0$

→ c'est clair pour $n=0$ car $M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

→ Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$M^{n+1}X_0 = M(M^n X_0) \underset{HR}{=} MX_n = X_{n+1}$. Ceci achève la récurrence.

(Q2) a) Soit λ un réel et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

$MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda y \\ -2x+3y = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda^2 x \\ 0 = \lambda z + 2x - 3y = \lambda^3 x + 2x - 3\lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda^2 x \\ (\lambda^3 - 3\lambda + 2)x \end{cases}$

1er cas.. $\lambda^3 - 3\lambda + 2 \neq 0$.

$MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$; λ n'est pas valeur propre.

2e cas.. $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$. $MX = \lambda X \Leftrightarrow y = \lambda x$ et $z = \lambda^2 x$.

$\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda X\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ \lambda x \\ \lambda^2 x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}\right) \neq \{0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}\}$

Alors λ est valeur propre de M et $SEP(M,\lambda) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}\right)$.

Notons que $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -2$

Alors M possède deux valeurs propres 1 et -2.

$SEP(M,1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $SEP(M,-2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

b) La somme des dimensions des sous-espaces propres est 2 et $2 \neq 3$.

Ainsi M n'est pas diagonalisable.

R.

Q3 a) Nous notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Une petite analyse s'impose.

* Supposons que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit solution du problème.

$f(e'_1) = -2e'_1$ donc $e'_1 \in SEP(f, -2) = \mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2 + 4e_3)$.

$f(e'_2) = e'_2$ donc $e'_2 \in SEP(f, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$

$f(e'_3) = e'_2 + e'_3$; alors $e'_2 = (f - \mathrm{Id}_E)(e'_3)$ donc $e'_2 \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Notons que $M_{\mathcal{B}}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

la somme des trois vecteurs est nulle

$\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(-e_1 - 2e_3,\ e_1 - e_2 + 3e_3,\ e_2 - e_3) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + 3e_3,\ e_2 - e_3)$.

$\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + 3e_3 + 2(e_2 - e_3),\ e_2 - e_3) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3,\ e_2 - e_3)$.

Notons alors que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.

* Amorçons alors la synthèse.

Posons $\underline{e'_1 = e_1 - 2e_2 + 4e_3}$ et $\underline{e'_2 = e_1 + e_2 + e_3}$. $e'_1 \in SEP(f, -2)$ donc $\underline{f(e'_1) = -2e'_1}$

et $e'_2 \in SEP(f, 1)$ donc $\underline{f(e'_2) = e'_2}$.

Cherchons alors e'_3 tel que $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$ et tel que sa première composante soit .

Soit $u = x e_2 + y e_3$ un élément de $\mathbb{R}^3$

$$f(u) = e'_2 + u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + x \\ 3x = 1 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ 3 = 3 \ ! \end{cases}$$

$f(u) = e'_2 + u \Leftrightarrow x = 1$ et $y = 2$.

Posons alors $\underline{e'_3 = e_2 + 2e_3}$. $\underline{f(e'_3) = e'_2 + e'_3}$.

Vérifions que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de montrer que cette famille est libre car elle est de cardinal 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$0_{\mathbb{R}^3} = \alpha(e_1 - 2e_2 + 4e_3) + \beta(e_1 + e_2 + e_3) + \gamma(e_2 + 2e_3)$. Ainsi $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \beta = -\alpha \\ 0 = -2\alpha - \alpha + \delta = -3\alpha + \delta \\ 0 = 4\alpha - \alpha + 2\delta = +3\alpha + 2\delta \end{cases} \; ; \; \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \delta = 3\alpha \\ 3\alpha + 6\alpha = 0 \end{cases} \; ; \; \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Ainsi $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1 - 2e_2 + 4e_3,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_2 + 2e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $T = M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et telle que e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

b) **V1.** Posons $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(-2,1,1)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'abord $T = D + N$. De plus $DN = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ND$

on peut donc appliquer la formule du binôme et dire que $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$.

Notons que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ N^k = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n + n D^{n-1} N = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} (-2)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Notons que ce résultat vaut encore pour $n = 0$ et $n = 1$.

V2 $T^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $T^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- C'est clair pour $n = 0$
- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$T^{n+1} = T T^n = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q4 $T = P^{-1} M P$ donc $M = P T P^{-1}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P T^n P^{-1}$.

R.

- $PT^0P^{-1} = P I_3 P = PP^{-1} = I_3 = \Pi^0$; la propriété est vraie pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.

$\Pi^{n+1} = \Pi\Pi^n \underset{HR}{=} PTP^{-1}PT^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$. Ceci achève la récurrence.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \Pi^n = PT^nP^{-1}}$.

(Q5) a) P est une matrice de passage ; P est donc inversible. Il n'est pas utile de vérifier par équivalence pour trouver P^{-1}.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $PX = X'$.

Alors $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x + y = x' \\ -2x + y + z = y' \\ 4x + y + 2z = z' \end{cases}$

$L_1 + L_3 - 2L_2$ donne $x+y+4x+y+2z+4x-2y-2z = x'+z'-2y'$; $x = \frac{1}{9}(x'-2y'+z')$.

L_1 donne $y = x'-x = x' - \frac{1}{9}(x'-2y'+z') = \frac{1}{9}(8x'+2y'-z')$.

L_2 donne $z = y'+2x-y = \frac{1}{9}(9y'+2x'-4y'+2z'-8x'-2y'+z') = \frac{1}{9}(-6x'+3y'+3z')$

Dans ces conditions $\underline{P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\Pi^n = PT^nP^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} (-2)^n & 1 & n \\ (-2)^{n+1} & 1 & n+1 \\ (-2)^{n+2} & 1 & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\underline{\text{La première ligne de } \Pi^n \text{ est : } \frac{1}{9}\left((-2)^n+8-6n \quad (-2)^{n+1}+2+3n \quad (-2)^n-1+3n\right)}$

$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = X_n = \Pi^n X_0 = \Pi^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Alors u_n est le produit de la première ligne de Π par $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

Donc $u_n = \frac{1}{9}\left((-2)^n-6n+8\right)u_0 + \frac{1}{9}\left((-2)^{n+1}+3n+2\right)u_1 + \frac{1}{9}\left((-2)^n+3n-1\right)u_2$.

Remarque.. Il est alors fortement conseillé de vérifier que ce résultat trouvé vaut au moins pour $n=0$, 1 et 2 ...

R,

EXERCICE 7

Exercice **N1$^-$**

Trouver a, b, c, a', b' et c' pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres.

Posons $U=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notons que U, V, W sont des éléments non nuls de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors U, V, W vecteurs propres de $A \iff \exists (\alpha,\beta,\delta) \in \mathbb{R}^3$, $AU=\alpha U$, $AV=\beta V$ et $AW=\delta W$.

U, V, W vecteurs propres de $A \iff \exists (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 1+a+a'=\alpha \\ 1+b+b'=\alpha \\ 1+c+c'=\alpha \end{cases}$, $\begin{cases} 1-a'=\beta \\ 1-b'=0 \\ 1-c'=-\beta \end{cases}$ et $\begin{cases} 1-a=\gamma \\ 1-b=-\gamma \\ 1-c=0 \end{cases}$.

U, V, W vecteurs propres de A

$\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} \alpha=1+a+a' \\ 1+b+b'=1+a+a' \\ 1+c+c'=1+a+a' \end{cases}$, $\begin{cases} \beta=1-a' \\ b'=1 \\ 1-c'=-(1-a') \end{cases}$ et $\begin{cases} \gamma=1-a \\ 1-b=-(1-a) \\ c=1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b+b'=a+a' \\ c+c'=a+a' \end{cases}$, $\begin{cases} b'=1 \\ c'=2-a' \end{cases}$ et $\begin{cases} c=1 \\ b=2-a \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b'=1 \\ c=1 \\ b=2-a \\ c'=2-a' \end{cases}$ et $\begin{cases} 2-a+1=a+a' \\ 1+(2-a')=a+a' \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b'=1 \\ c=1 \\ b=2-a \\ c'=2-a' \end{cases}$ et $\begin{cases} 2a+a'=3 \\ a+2a'=3 \end{cases}$. Notons que $\begin{cases} 2a+a'=3 \\ a+2a'=3 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} 2a+a'=3 \\ -3a=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ a'=1 \end{cases}$.

Alors : U, V, W sont des vecteurs propres de A si et seulement si $\begin{cases} a=1 \\ a'=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b'=1 \\ c'=1 \\ b=2-a=1 \\ c'=2-a'=1 \end{cases}$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ si et seulement si $a=b=c=a'=b'=c'=1$.

Exercice.. Notez que si $a=b=c=a'=b'=c'=1$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 3, 0 et 0.

R.

Exercice 8

Exercice **N1** **Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec paramètre.**

t est dans $\mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$.

$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\lambda \end{pmatrix}$. $L_1 \leftrightarrow L_3$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 3-\lambda & 1 & 1+t \end{pmatrix}$.

$L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda-3)L_1$ donne : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & \lambda-2 & \varphi(\lambda) \end{pmatrix}$ avec $\varphi(\lambda) = 1+t + (\lambda-3)(4+2t-\lambda)$.

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ conduit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & 0 & \varphi(\lambda)-1-t \end{pmatrix}$.

la matrice est triangulaire supérieure.

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & 0 & \varphi(\lambda)-1-t \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \varphi(\lambda)-1-t = 0 \end{cases}$

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \text{ou} \\ 0 = \varphi(\lambda)-1-t = (\lambda-3)(4+2t-\lambda) + 1 + t - 1 - t = (\lambda-3)(4+2t-\lambda). \end{cases}$

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = 4+2t$. $\underline{\underline{Sp\,A = \{2, 3, 4+2t\}}}$.

$4+2t = 2 \Leftrightarrow t = -1$ et $4+2t = 3 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

$\underline{\underline{\text{Si } t \neq -1 \text{ et } t \neq -\frac{1}{2}}}$, A possède trois valeurs propres distinctes deux à deux et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\underline{\underline{A \text{ est diagonalisable}}}$.

Supposons que $\underline{t = -1}$. $Sp\,A = \{2, 3\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y = 2x \\ 2y = 2y \\ x+y+2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow x+y=0.$

Alors $SEP(A,2)$ est le plan d'équation $x+y=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors $3 \geq \dim SEP(A,2) + \dim SEP(A,3) = 2 + \dim SEP(A,3) \geq 2 + \; = 3$

cours

$SEP(A,3) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors $\dim SEP(A,2) + \dim SEP(A,3) = 3$. **A est diagonalisable.**

- **Exercice.-** Diagonaliser A.

"Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(2,2,3)$... et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tout est dit !"

Supposons que $\underline{t = -\frac{1}{2}}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Notons que $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + \frac{1}{2}z = 2x \\ 2y - \frac{1}{2}z = 2y \\ x + y + 3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y = 0\,(!) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0. \end{cases}$$

Alors $SEP(A,2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Donc $\dim SEP(A,2) = 1$.

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + \frac{1}{2}z = 3x \\ 2y - \frac{1}{2}z = 3y \\ x + y + 3z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ z = -2y \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases}$$

Alors $SEP(A,3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Donc $\dim SEP(A,3) = 1$.

$\mathrm{Sp}\,A = \{2, 3\}$ et $\dim SEP(A,2) + \dim SEP(A,3) = 2 < 3$. **A n'est pas diagonalisable.**

Finalement **A est diagonalisable si et seulement si $t \neq -\frac{1}{2}$.**

- **Exercice.-** Diagonaliser A lorsque $t \neq -1$ et $t \neq -\frac{1}{2}$.

<u>quelques réponses</u>.. $SEP(A,2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $SEP(A,3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -t \\ -1-t \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A, 4+2t) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & -t & 1 \\ -1 & -1-t & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, P est inversible, $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(2, 3, 4+2t)$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{2(2t+1)} \begin{pmatrix} (t+1) & -(t+1) & -(t+1) \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & (2t+1) \end{pmatrix}$

Si l'on pose $\alpha = 2t+1$: $P^{-1} = \dfrac{1}{2\alpha} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & -\alpha \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Exercice .. $\dim_{\mathbb{R}} E = 2$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E. $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\Pi_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Q1.. Trouver le spectre de u et ses sous-espaces propres.

Q2.. $\forall f \in \mathcal{L}(E)$. $\varphi(f) = u \circ f$. Prouver que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$. Trouver le spectre et les sous-espaces propres de φ.

Q1_ Soit $v = xe_1 + ye_2$ un élément de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans la suite $F_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$.

$u(v) = \lambda v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (\lambda - 1) y \\ 0 = (1-\lambda)x + 4y = (1-\lambda)(\lambda - 1)y + 4y = (-\lambda^2 + 2\lambda + 3)y \end{cases}$

$u(v) = \lambda v \Leftrightarrow \begin{cases} x = (\lambda - 1)y \\ -(\lambda + 1)(\lambda - 3)y = 0 \end{cases}$

1er cas .. $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$. $u(v) = \lambda v \Leftrightarrow x = y = 0$; $\lambda \notin \mathrm{Spec}(u)$

2ème cas .. $\lambda = -1$. $u(v) = \lambda v \Leftrightarrow x = -2y$; $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$ et $F_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(2e_1 - e_2)$.

3ème cas .. $\lambda = 3$. $u(v) = \lambda v \Leftrightarrow x = 2y$; $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$ et $F_\lambda = \mathrm{Vect}(2e_1 + e_2)$.

Finalement : $\mathrm{Spec}(u) = \{-1, 3\}$, $F_{-1} = \mathrm{Vect}(2e_1 - e_2)$ et $F_3 = \mathrm{Vect}(2e_1 + e_2)$.

Notons que u est diagonalisable. $\mathcal{B}' = (2e_1 - e_2, 2e_1 + e_2)$ est une base de E et $\Pi_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Q2.. Notons que si $f \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ f \in \mathcal{L}(E)$ (composée de deux endomorphismes de E), par conséquent φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$. Notons que φ est linéaire.

$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f + g) = u \circ (\lambda f + g) \underset{\uparrow}{=} \lambda\, u \circ f + u \circ g = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$

linéarité de u

Par conséquent : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Posons $\Pi_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$

$\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow u \circ f = \lambda f \Leftrightarrow \Pi_{\mathcal{B}}(u) A = \lambda A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \\ z + 4t = \lambda z \\ z + t = \lambda t \end{cases}$

Nous pourrions résoudre le système, trop banal (et occultant le fond du débat) ... de plus nous l'avons déjà fait dans Q1. Justement ...!

Posons $R = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $S = \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}$

$\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}[R, S] = \lambda [R, S] \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_{\mathcal{B}}(u) R = \lambda R \\ \Pi_{\mathcal{B}}(u) S = \lambda S \end{cases} \Leftrightarrow$ R et S sont dans $\hat{F}_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid \Pi_{\mathcal{B}}(u) X = \lambda X\}$

1er cas .. $\lambda \notin \{-1, 3\}$. $\hat{F}_\lambda = \{0\}$; $\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow f = 0_{\mathcal{L}(E)}$; $\lambda \notin \mathrm{Spec}\, \varphi$.

<u>2ème Cas</u>.. $\lambda = -1$.

$\varphi(f) = -f \Leftrightarrow R \in \hat{F}_{-1}$ et $S \in \hat{F}_{-1}$; donc $\underline{-1 \in \operatorname{Spec} \varphi}$.

Précisons. $\hat{F}_{-1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ (c'est le sous-espace propre de $M_B(u)$ associé à la valeur propre -1.

Donc $\varphi(f) = -f \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $R = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $S = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $M_B(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}$

$\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, M_B(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}\}$

$\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid M_B(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\}$

<u>3ème Cas</u>. $\lambda = 3$.

$\varphi(f) = 3f \Leftrightarrow R$ et S sont dans $\hat{F}_3 = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $R = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $S = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\varphi(f) = 3f \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, M_B(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \Leftrightarrow M_B(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

donc $\underline{3 \in \operatorname{Spec} \varphi \text{ et } \operatorname{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid M_B(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\}}$.

Finalement :
- $\operatorname{Spec} \varphi = \{-1, 3\} = \operatorname{Spec} u$
- $\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid M_B(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\}$ et
- $\operatorname{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid M_B(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\}$

<u>Remarques</u> 1.. $\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})$ est isomorphe à $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$ qui est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ de dimension 2 ; donc $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = 2$

De même : $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = 2$.

On a alors : $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})) + \dim(\operatorname{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathcal{L}(E)$; $\underline{\varphi \text{ est diagonalisable}}$.

2.. Tout cela n'est pas nouveau. Retrouvons les résultats précédents à travers une démonstration généralisée.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$: $F_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

$\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow u \circ f = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in E$, $u(f(x)) = \lambda f(x) \Leftrightarrow \forall \omega \in \operatorname{Im} f$, $u(\omega) = \lambda \omega \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset F_\lambda$

ou $F_\lambda = \{0_E\}$ et : $\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \varphi(f) = \lambda f\} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$

ou $F_\lambda \neq \{0_E\}$ et : $\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \varphi(f) = \lambda f\} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Par conséquent : $\operatorname{Spec} \varphi = \operatorname{Spec} u = \{-1, 3\}$.

De plus : $\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(2e_1 - e_2)\}$

et $\operatorname{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(2e_1 + e_2)\}$

ce qui confirme les résultats précédents.

Exercice α est un réel. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de l'espace vectoriel réel E. Φ_α est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Montrer que 1 est valeur propre de Φ_α et donner une base du sous-espace propre associé $E_1(\alpha)$ (on sera amené à discuter suivant les valeurs de α).

$\boxed{\textbf{Q2}}$ On pose $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ et $f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3$.

a) Préciser la dimension du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1 et f_2.

b) Montrer que F est stable par Φ_α.

c) On note φ_α l'endomorphisme de F induit par Φ_α, c'est à dire défini par : $\forall u \in F,\ \varphi_\alpha(u) = \Phi_\alpha(u)$.

Donner la matrice de φ_α dans la base (f_1, f_2).

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Montrer que $\alpha - 1$ est une valeur propre de Φ_α et que l'on peut trouver une vecteur f_3 de E, indépendant de α qui soit un vecteur propre de Φ_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E.

b) Trouver la matrice de Φ_α dans cette base. Φ_α est-il diagonalisable ?

ESCP-E-III-2000

Q1 Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément de E.

$$\Phi_\alpha(u) = u \iff A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + (2-\alpha)y - \alpha z = x \\ -\alpha x + y - \alpha z = y \\ 2x + (\alpha-2)y + (\alpha+1)z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ -\alpha x - \alpha z = 0 \\ 2x + (\alpha-2)y + \alpha z = 0 \end{cases} \quad L_3 := -L_1$$

$$\Phi_\alpha(u) = u \iff \begin{cases} \alpha(x+z) = 0 \quad (-\alpha z = \alpha x \dots) \\ -2x + (2-\alpha)y + \alpha x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(x+z) = 0 \\ (\alpha-2)(x-y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Notons que $(1, 1, -1)$ est solution de (1).

Ainsi si $u = e_1 + e_2 - e_3$: $u \neq 0_E$ et $\Phi_\alpha(u) = u$.

Alors 1 est valeur propre de Φ_α. et $e_1 + e_2 - e_3 \in SEP(\Phi_\alpha, 1) = E_1(\alpha)$.

1er cas. $\alpha \notin \{0, 2\}$. $\Phi_\alpha(u) = u \iff \begin{cases} \alpha(x+z) = 0 \\ (\alpha-2)(x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = x \end{cases}$.

$E_1(\alpha) = SEP(\Phi_\alpha, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$. $\dim E_1(\alpha) = 1$.

2e cas. $\alpha = 0$. $\Phi_\alpha(u) = u \iff x = y$. $E_1(\alpha) = SEP(\Phi_\alpha, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$ et $\dim E_1(\alpha) = 2$

3e cas. $\alpha = 2$ $\Phi_\alpha(u) = u \iff x + z = 0$ $E_2(\alpha) = SEP(\Phi_\alpha, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2)$ et $\dim E_1(\alpha) = 2$

Q2 a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $af_1+bf_2=0_E$.

$a(e_1+e_2-e_3)+b(e_1+e_2-2e_3)=0_E$.

$(a+b)e_1+(a+b)e_2-(a+2b)e_3=0_E$. $a+b=-(a+2b)=0$, $a=b=0$.

Ainsi (f_1,f_2) est une famille libre de E donc de F et $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$.

Alors (f_1,f_2) est une base de F et $\dim F=2$.

b) $A_\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2-\alpha&-\alpha\\-\alpha&1&-\alpha\\2&\alpha-2&\alpha+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2-\alpha+\alpha\\-\alpha+1+\alpha\\2+\alpha-2-\alpha-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\varphi_\alpha(f_1)=f_1$ ce

qui n'est pas une grosse surprise (!!) voir Q1.

$A_\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2-\alpha&-\alpha\\-\alpha&1&-\alpha\\2&\alpha-2&\alpha+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2-\alpha+2\alpha\\-\alpha+1+2\alpha\\2+\alpha-2-2\alpha-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+1\\\alpha+1\\-\alpha-2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Ainsi $\varphi_\alpha(f_2)=\alpha f_1+f_2$.

$\varphi_\alpha(F)=\varphi_\alpha(\mathrm{Vect}(f_1,f_2))=\mathrm{Vect}(\varphi_\alpha(f_1),\varphi_\alpha(f_2))=\mathrm{Vect}(f_1,\alpha f_1+f_2)\overset{!}{=}\mathrm{Vect}(f_1,f_2)=F$

En particulier $\varphi_\alpha(F)\subset F$ et F est stable par φ_α.

c) $\psi_\alpha(f_1)=\varphi_\alpha(f_1)=f_1$ et $\psi_\alpha(f_2)=\varphi_\alpha(f_2)=\alpha f_1+f_2$.

Alors $M_{(f_1,f_2)}(\psi_\alpha)=\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}$.

Q3 Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3$ un élément de E.

$\varphi_\alpha(u)=(\alpha-1)u \Leftrightarrow \begin{cases}-x+(2-\alpha)y-\alpha z=(\alpha-1)x\\-\alpha x+y-\alpha z=(\alpha-1)y\\2x+(\alpha-2)y+(\alpha+1)z=(\alpha-1)z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha x+(2-\alpha)y-\alpha z=0\\-\alpha x+(2-\alpha)y-\alpha z=0\\2x+(\alpha-2)y+2z=0\end{cases}$

$\varphi_\alpha(u)=(\alpha-1)u \underset{\substack{L_2=L_1!\\L_3\leftarrow L_1+L_3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}-\alpha x+(2-\alpha)y-\alpha z=0\\(2-\alpha)(x+z)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha(x+z)+(2-\alpha)y=0\\(2-\alpha)(x+z)=0.\end{cases}$ (2)

$(1,0,-1)$ est solution de (2) et ce pour tout α !

Ainsi $f_3=e_1-e_3$ est un vecteur non nul indépendant de α tel que $\varphi_\alpha(f_3)=(\alpha-1)f_3$.

Alors <u>$\alpha-1$ est valeur propre de φ_α et $f_3=e_1-e_3$ est un vecteur propre associé indépendant de α.</u>

(Q4) a) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $af_1+bf_2+cf_3=0_E$;

$a(e_1+e_2-e_3)+b(e_1+e_2-2e_3)+c(e_1-e_3)=0_E$;

$(a+b+c)e_1+(a+b)e_2+(-a-2b-c)e_3=0$; $\begin{cases} a+b+c=0\\ a+b=0\\ -a-2b-c=0\end{cases}$ $\begin{cases} a+b=0\\ c=0\\ -a-2b=0\end{cases}$;

$a=b=c=0$.

(f_1,f_2,f_3) est donc une famille libre de trois vecteurs de E qui est de dimension 3.

<u>(f_1,f_2,f_3) est une base de E.</u>

$$\underline{M_{(f_1,f_2,f_3)}(\varphi_\alpha)=\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&1&0\\0&0&\alpha-1\end{pmatrix}}\quad . \quad Sp(\varphi_\alpha)=\{1,\alpha-1\}.$$

1er cas... $\alpha=0$. La matrice précédente est diagonale. φ_α est diagonalisable.

2e cas... $\alpha=2$. $Sp(\varphi_\alpha)=\{1\}$ et dim $SEP(\varphi_\alpha,1)=2$ (Q3)

φ_α n'est pas diagonalisable.

3ème cas... $\alpha\notin\{0,2\}$. $Sp(\varphi_\alpha)=\{1,\alpha-1\}$ et $1\neq\alpha-1$.

dim $SEP(\varphi_\alpha,1)=1$. ← Voir Q3 !

Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3\in E$. $\varphi_\alpha(u)=(\alpha-1)u \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}-\alpha(x+z)+(2-\alpha)y=0\\ (2-\alpha)(x+z)=0\end{cases} \overset{\alpha\neq 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} z=-x\\ y=0\end{cases}$.

Alors $SEP(\varphi_\alpha,\alpha-1)=\mathrm{Vect}(f_3)$.

dim $SEP(\varphi_\alpha,\alpha-1)=1$. $1+1<3$ donc φ_α n'est pas diagonalisable.

<u>φ_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha=0$.</u>