R

1

EXERCICE 11

Exercice **Triangularisation simultanée de deux endomorphisme**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. f et g sont les endomorphismes de E ayant respectivement pour matrices dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q1. a) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de g.

b) Calculer $(A - I_3)^2$; f est-il diagonalisable ? Montrer que les vecteurs propres de g sont des vecteurs propres de f.

Q2. Trouver une base de E par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires. Déterminer les matrices de f et g dans cette base.

(Q1) Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$u \in \mathrm{Ker}(g - \lambda Id_E) \Leftrightarrow g(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + y + z = 0 \\ -x + (1-\lambda)y - z = 0 \\ x + y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases}$

$u \in \mathrm{Ker}(g - \lambda Id_E) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\lambda x + y + z = 0 \\ -x + (1-\lambda)y - z = 0 \\ (2-\lambda)(y+z) = 0 \end{cases}$

1er cas.. $\lambda = 2$ $\quad u \in \mathrm{Ker}(g - \lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y + z = 2x = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$

Ainsi $2 \in Sp\, g$ et $SEP(g, 2) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$.

2ème cas.. $\lambda \neq 2$ $\quad u \in \mathrm{Ker}(g - \lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ -\lambda x = 0 \\ -x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$

a) $\lambda = 0$ $\quad u \in \mathrm{Ker}(g - \lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = 2y \end{cases}$

Ainsi $0 \in Sp\, g$ et $SEP(g, 0) = \mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 - e_3)$

b) $\lambda \neq 0$ $\quad u \in \mathrm{Ker}(g - \lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \end{cases} \underset{\lambda \neq 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $\lambda \notin Sp\, g$.

Ainsi $Sp\, g = \{0, 2\}$, $SEP(g, 0) = \mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 - e_3)$ et $SEP(g, 2) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$.

Remarque.. $\dim SEP(g, 0) + \dim SEP(g, 2) = 2 \neq 3 = \dim E$. g n'est pas diagonalisable.

b) $A-I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$. $(A-I_3)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A (donc de f) dont le seul zéro est 1.

Alors $\mathrm{Sp}\,A\subset\{1\}$ et $\mathrm{Sp}\,f\subset\{1\}$.

Montrons que f n'est pas diagonalisable.

V1 Supposons que f est diagonalisable. Alors f admet au moins une valeur propre. Comme $\mathrm{Sp}\,f\subset\{1\}$: $\mathrm{Sp}\,f=\{1\}$!

Alors $E=SEP(f,1)=\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$. Donc $f-\mathrm{Id}_E=0_{\mathcal{L}(E)}$. $f=\mathrm{Id}_E$.

Or $f(e_2)=e_3$! Donc f n'est pas diagonalisable.

V2 Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3\in E$.

$u\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\Leftrightarrow f(u)=u\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x\\-z=y\\y+2z=z\end{cases}\Leftrightarrow y+z=0$

$\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ est donc l'hyperplan d'équation $y+z=0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Alors $1\in\mathrm{Sp}\,f$ et $\dim SEP(f,1)=2$. Or $\mathrm{Sp}\,f\subset\{1\}$.

Donc $\underline{\mathrm{Sp}\,f=\{1\}\text{ et }\dim SEP(f,1)=2\text{ donc } f \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Soit u un vecteur propre de g. $\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $u=xe_1+ye_2+ze_3$.

1er cas.. u est associé à la valeur propre 0.

$\exists\lambda\in\mathbb{R}^*$, $u=\lambda(2e_1+e_2-e_3)=2\lambda e_1+\lambda e_2-\lambda e_3$

$\lambda+(-\lambda)=0$ donc u appartient à l'hyperplan de E d'équation $y+z=0$ dans $\mathcal{B}$ donc appartient à $SEP(f,1)$.

u est un vecteur propre de f car $u\neq 0_E$.

2e cas.. u est associé à la valeur propre 2. $\exists\lambda\in\mathbb{R}^*$, $u=\lambda(e_2-e_3)$.

Comme $\lambda+(-\lambda)=0$ u appartient encore à $SEP(f,1)$.

u est un vecteur propre de f car $u\neq 0_E$.

Les vecteurs propres de g sont des vecteurs propres de f ... associé à la valeur propre 1.

(Q2) Posons $e'_1 = e_2 - e_3$ et $e'_2 = 2e_1 + e_2 - e_3$.

e'_1 et e'_2 sont deux vecteurs propres de g associés respectivement aux valeurs propres 2 et 0. Comme $2 \neq 0$ (!) : (e'_1, e'_2) est une famille libre de E. Notons que $g(e'_1) = 2e'_1$, $g(e'_2) = 0 \cdot e'_2$, $f(e'_1) = e'_1$ et $f(e'_2) = e'_2$. Ainsi si e'_3 est un vecteur de E tel que (e'_1, e'_2, e'_3) soit une base de E :- les matrices de f et g dans cette base sont triangulaires.

Posons $e'_3 = e_3$ (... car clairement $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e'_1, e'_2)$ ...).

$\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3, 2e_1 + e_2 - e_3, e_3) = \mathrm{Vect}(e_2, 2e_1 + e_2, e_3)$

$\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) = \mathrm{Vect}(e_2, 2e_1, e_3) = \mathrm{Vect}(e_2, e_1, e_3) = E$.

$B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une famille génératrice de cardinal 3 de E qui est de dimension 3. $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

Soit (α, β, γ) (resp. (a, b, c)) les coordonnées de $f(e'_3)$ (resp. $g(e'_3)$) dans B'.

$-e_2 + 2e_3 = f(e_3) = f(e'_3) = \alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = \alpha(e_2 - e_3) + \beta(2e_1 + e_2 - e_3) + \gamma e_3$.

Alors $\begin{cases} 0 = +2\beta \\ -1 = \alpha + \beta \\ 2 = -\alpha - \beta + \gamma \end{cases}$; $\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -1 \\ \gamma = 2 + \alpha + \beta = 1 \end{cases}$. $\underline{f(e'_3) = -e'_1 + e'_3}$.

$e_1 - e_2 + 3e_3 = g(e_3) = g(e'_3) = ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = a(e_2 - e_3) + b(2e_1 + e_2 - e_3) + ce_3$

$\begin{cases} 1 = 2b \\ -1 = a + b \\ 3 = -a - b + c \end{cases}$; $\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -1 - b = -3/2 \\ c = 3 + a + b = 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$ $\underline{g(e'_3) = -\frac{3}{2} e'_1 + \frac{1}{2} e'_2 + 2e_3}$.

Alors $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $B' = (e_2 - e_3, 2e_1 + e_2 - e_3, e_3)$ est une base de E.

2) les matrices de f et g dans B' sont triangulaires (supérieures).

3) $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4) Soit P la matrice de passage de B à B'.

- $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- P est inversible.

- $P^{-1} M_B(f) P = M_{B'}(f)$ et $P^{-1} M_B(g) P = M_{B'}(g)$

Exercice .. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Résolution de l'exercice ! $P = P_{(B, B')}$ donc $P^{-1} = P_{(B', B)}$

$e'_1 = e_2 - e_3$, $e'_2 = 2e_1 + e_2 - e_3$, $e'_3 = e_3$.

Alors $e_3 = e'_3$, $e_2 = e'_1 + e_3 = e'_1 + e'_3$, $e_1 = \frac{1}{2}(e'_2 - e_2 + e_3) = \frac{1}{2}(e'_2 - e'_1 - e'_3 + e'_3)$.

$e_1 = \frac{1}{2}(-e'_1 + e'_2)$, $e_2 = e'_1 + e'_3$, $e_3 = e'_3$.

$P^{-1} = P_{(B', B)} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

R.

EXERCICE 12

Exercice N2 **Une petite QSP d'HEC 2010**

Q1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Q2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède une autre valeur propre, égale à 1 ou à -1.

b) Montrer que si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.

Q1 A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale. Alors $\mathrm{Sp}\, A = \{0, 1\}$.

Soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$\mathrm{rg}\, A = \dim \mathrm{Vect}\,(0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}, E_2, E_1) = \dim \mathrm{Vect}(E_2, E_1) = 2$ car (E_2, E_1) est libre puisque (E_1, E_2, E_3) est libre.

Alors $\dim SEP(A,0) = 3 - \mathrm{rg}\, A = 3 - 2 = 1$. $\underline{\dim SEP(A,0) = 1}$.

$A E_3 = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc E_3 est un élément non nul de $SEP(A,0)$ qui est de dimension 1.

Ainsi $\underline{SEP(A,0) = \mathrm{Vect}(E_3)}$.

$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(A - I_3) = \dim \mathrm{Vect}(-E_1, 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}, E_1 - E_3) = \dim \mathrm{Vect}(E_1, E_3 - E_1)$.

$\mathrm{rg}\,(A - I_3) = \dim \mathrm{Vect}\,(E_1, E_3 - E_1) = \dim \mathrm{Vect}(E_1, E_3) = 2$ car (E_1, E_3) est libre.

Ainsi $\dim SEP(A - I_3) = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 3 - 2 = 1$. $\underline{\dim SEP(A,1) = 1}$.

De plus $(A - I_3) E_2 = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc E_2 est un élément non nul de $SEP(A,1)$ qui est de dimension 1. Alors $\underline{SEP(A,1) = \mathrm{Vect}(E_2)}$.

$\dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,1) = 2 < 3$ et $\mathrm{Sp}\, A = \{0,1\}$. Alors $\underline{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Q2 a) Supposons que 0 n'est pas valeur propre de u. Alors $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$.

Donc u est un endomorphisme injectif de E qui est de dimension 3.

Alors u est bijectif. Donc $u^2 = u \circ u$ est également bijectif. Alors $\mathrm{rg}\, u^2 = 3$!!

Donc <u>0 est valeur propre de u.</u>

Supposons que 1 et -1 ne sont pas valeurs propres. Un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait montre $u - Id_E$ et $u + Id_E$ sont des automorphismes de E.

Alors $u^2 - Id_E \underset{u \circ Id_E = Id_E \circ u}{=} (u - Id_E) \circ (u + Id_E)$ est un automorphisme de E comme composée de deux automorphismes de E.

Donc $\mathrm{Ker}(u^2 - Id_E) = \{0_E\}$. Or u^2 est un projecteur de rang 1, donc

$\mathrm{Ker}(u^2 - Id_E) = \mathrm{Im}\, u^2$ et $\dim \mathrm{Im}\, u^2 = 1$. Une légère contradiction apparaît.

Ainsi <u>1 ou -1 est valeur propre de u.</u>

<u>u possède une autre valeur propre que 0 qui est 1 ou -1.</u> Précisons...

Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté montrons que u ne peut pas avoir comme valeur propre 1 <u>et</u> -1. Supposons le contraire.

Alors $\dim \mathrm{Ker}(u - Id_E) \geq 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(u + Id_E) \geq 1$. Notons qu'alors $1 \in \mathrm{Sp}\, u$ et $-1 \in \mathrm{Sp}\, u$.

Or $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + Id_E)$ sont deux sous-espaces propres de u donc ils sont en somme directe. Soit x un élément non nul de $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et y un élément non nul de $\mathrm{Ker}(u + Id_E)$. <u>(x, y) est une famille libre</u> ($\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + Id_E)$ sont en somme directe).

$u(x) = x$ donc $u^2(x) = x$; <u>$x \in \mathrm{Ker}(u^2 - Id_E) = \mathrm{Im}\, u^2$.</u>
$u(y) = -y$ donc $u^2(y) = y$; <u>$y \in \mathrm{Ker}(u^2 - Id_E) = \mathrm{Im}\, u^2$</u>
} u^2 est une projection.

Les trois points précédents montrent alors que $\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u^2 \geq 2$!!

Finalement <u>u ne peut pas avoir 1 <u>et</u> -1 comme valeur propre.</u>

Allons plus loin encore. $(u^2)^2 = u^2$ car u^2 est un projecteur.
Alors $u^4 - u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $X^4 - X^2$ est un polynôme annulateur de u dont les zéros sont -1, 0 et 1.
Ainsi <u>$\mathrm{Sp}\, u \subset \{-1, 0, 1\}$.</u>

Ce qui précède montre que <u>$\mathrm{Sp}\, u = \{-1, 0\}$ ou $\mathrm{Sp}\, u = \{0, 1\}$.</u>

b) Supposons que $1 \in Sp\, u$. Alors comme nous venons de le voir $Sp\, u = \{0, 1\}$.
Faisons une petite analyse.

- <u>Analyse</u>. Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = A$.

Alors $u(e_1) = 0_E$, $u(e_2) = e_2$ et $u(e_3) = e_1$.

Donc $e_1 \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$, $\underline{e_2 \in \operatorname{Ker}(u - Id_E)}$ et $\underline{e_1 = u(e_3)}$.

Notons également que $u^2(e_3) = u(e_1) = 0_E$ et $u(e_3) = e_1 \neq 0_E$ donc $\underline{e_3 \in \operatorname{Ker} u^2 \text{ et } e_3 \notin \operatorname{Ker} u}$.

- <u>Synthèse</u> Commençons par montrer que $\operatorname{Ker} u \subsetneq \operatorname{Ker} u^2$.

L'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$ est claire. Supposons que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

Alors $\dim \operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Ker} u^2 = 3 - \operatorname{rg} u^2 = 3 - 1 = 2$. De plus 1 est valeur propre de u.

Ainsi $\dim SEP(u,0) + \dim SEP(u,1) = 2 + \dim SEP(u,1) \geqslant 2 + 1 = \dim E$.

Or la somme des dimensions des sous-espaces propres de u n'excède pas $\dim E$.

Ceci montre que $\begin{cases} Sp\, u = \{0, 1\} & \text{(nous le savions déjà)} \\ \dim SEP(u,0) + \dim SEP(u,1) = \dim E \end{cases}$

Soit $\mathcal{B}'_1 = (e'_1, e'_2)$ une base de $SEP(u,0)$ et $\mathcal{B}'_2 = (e'_3)$ une base de $SEP(u,1)$.

Alors $\mathcal{B}' = $ "$\mathcal{B}'_1 \cup \mathcal{B}'_2$" est une base de E et $A' = M_{\mathcal{B}'}(u) = \operatorname{Diag}(0, 0, 1)$.

Donc $A'^2 = \operatorname{Diag}(0^2, 0^2, 1^2) = A'$. $u^2 = u$. u est un projecteur !!

$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ est impossible. Donc $\operatorname{Ker} u \subsetneq \operatorname{Ker} u^2$. On peut donc trouver un vecteur e_3

qui appartient à $\operatorname{Ker} u^2$ mais pas à $\operatorname{Ker} u$. Posons alors $\underline{e_1 = u(e_3)}$.

Notons que $e_1 \neq 0$ et que $\underline{u(e_1) = u^2(e_3) = 0_E}$. Choisissons enfin un vecteur propre e_2

de u associé à la valeur propre 1. Alors $\underline{u(e_2) = e_2}$.

Montrons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. Cette famille a pour cardinal la

dimension de E donc pour montrer que c'est une base de E il suffit de prouver qu'elle

est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_E$.

Alors $0_E = u^2(0_E) = \alpha u^2(e_1) + \beta u^2(e_2) + \gamma u^2(e_3) = \alpha u(0_E) + \beta u(e_2) + 0_E = \beta e_2$.

$u(e_1) = 0_E$, $u(e_2) = e_2$, $u^2(e_3) = 0_E$; $u(e_2) = e_2$.

Comme $e_2 \neq 0_E$: $\underline{\beta = 0}$.

Ainsi $\alpha e_1 + \gamma e_3 = 0_E$.

donc $0_E = u(0_E) = \alpha u(e_1) + \gamma u(e_3) = \alpha . 0_E + \gamma u(e_3) = \gamma u(e_3)$.

Or $u(e_3) = e_1 \neq 0_E$ donc $\underline{\gamma = 0}$.

Alors $\alpha e_1 = 0_E$ et $e_1 \neq 0_E$ donc $\underline{\alpha = 0}$.

$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_E \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est libre de card. 3 et $\dim E = 3$. Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

Rappelons que $u(e_1) = 0_E$, $u(e_2) = e_2$ et $u(e_3) = e_1$ donc $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$.

<u>Si 1 est valeur propre de u et si u n'est pas un projecteur il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.</u>

R.

EXERCICE 13

Ancienne Correction.

Exercice Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A est-elle diagonalisable ?

Q2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer B^n et A^n pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$L_2 \leftrightarrow L_3$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2$ donne $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$ et : $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$ qui est une réduite de Gauss de $A-\lambda I_3$ que nous notons R_λ.

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3$ non inversible $\Leftrightarrow R_\lambda$ non inversible $\Leftrightarrow 1-\lambda = 0$ ou $-(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

$Sp(A) = \{1\}$. Comme A n'est pas $1 \times I_3$, A n'est pas diagonalisable.

Confirmons. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -y-z = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -y$.

$SEP(A,1)$ est le plan vectoriel d'équation $z = -y$.

$SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. $Sp(A) = \{1\}$ et $\dim SEP(A,1) = 2$; A n'est pas diagonalisable !

Q2 Posons $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Pour montrer que A et B sont semblables il suffit de trouver une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

Analyse.. Supposons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ solution. $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = e'_2$ et $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$.

Ainsi $e'_1 \in Ker(f - Id_E)$, $e'_2 \in Ker(f - Id_E)$ et $(f - Id_E)(e'_3) = e'_2$.

Donc $e'_1 \in Ker(f - Id_E)$, $e'_2 \in Ker(f - Id_E) \cap Im(f - Id_E)$ et $(f - Id_E)(e'_3) = e'_2$.

Synthèse.. $Sp(f) = Sp(A) = \{1\}$. $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$; ainsi

$SEP(f,1) = Ker(f - Id_E) = Vect(e_1, e_2 - e_3)$.

Cherchons $Im(f - Id_E)$. $M_{\mathcal{B}}(f - Id_E) = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$Im(f - Id_E) = Vect((f-Id_E)(e_1), (f-Id_E)(e_2), (f-Id_E)(e_3)) = Vect(0_E, -e_2+e_3, -e_2+e_3)$.

$Im(f - Id_E) = Vect(e_2 - e_3) \subset Ker(f - Id_E)$. Ainsi $Im(f - Id_E) \cap Ker(f - Id_E) = Vect(e_2 - e_3)$.

Dès lors posons $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_2 - e_3$ et cherchons e'_3 tel que : $(f - Id)(e'_3) = e'_2$.

2.

Posons $e'_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ avec $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$(f - Id_E)(e'_3) = e'_2 \iff (A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}0=0\\-y-z=1\\y+z=-1\end{cases} \iff y+z=-1$

Posons alors $x=0$, $y=0$, $z=-1$.

Alors $e'_3 = -e_3$ et $(f - Id_E)(e'_3) = e'_2$.

Soit P la matrice de la famille (e'_1, e'_2, e'_3) dans $\mathcal{B}$; $P = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}$.

P est triangulaire inférieure sans zéro sur la diagonale. P est donc inversible ce qui prouve que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

De plus $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = B$ car $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = e'_2$ et $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$.

A et B sont donc semblables.

P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donc $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)P$ d'où : $B = P^{-1}AP$

$B = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ un calcul très simple donne $P^{-1} = P$!!

Posons $C = B - I$. $C = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$; $C^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Ainsi $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $C^k = 0$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $B^n = (C + I_3)^n \underset{\substack{\uparrow\\ CI_3 = I_3C}}{=} \sum_{k=0}^{n} C_n^k C^k I_3^{n-k} = C_n^0 C^0 I_3^n + C_n^1 C I_3^{n-1} = I + nC$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $B^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$ ceci reste encore vrai pour $n = 0$ et 1.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$0 \notin Sp(B)$ donc B est inversible. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrons que $B^{-n} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Il suffit de montrer que $B^n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix} = I_3$ car $B^{-n} = (B^n)^{-1}$.

$B^n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n+n\\0&0&1\end{pmatrix} = I_3$. $B^{-n} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{Z}$, $B^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} = PB^nP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1-n&-n\\0&n&n+1\end{pmatrix}$.

R.

EXERCICE 14

Exercice **N1** **Matrices semblables 2.**

Q1. $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q2. Calculer A^n pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Q1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Pour montrer que A est semblable à B nous allons construire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = \mathbb{R}^3$.

- Analyse.. Supposons que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

  Alors $f(e'_1) = 4e'_1$, $f(e'_2) = 3e_1 + 4e'_2$ et $f(e'_3) = 2e'_3$.

  Ainsi $e'_1 \in \mathrm{Ker}(f - 4Id_E)$, $e'_3 \in \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$ et $e'_1 = \frac{1}{3}(f - 4Id_E)(e'_2) = (f - 4Id_E)(\frac{1}{3}e'_2) \in \mathrm{Im}(f - 4Id_E)$.

- Synthèse.. Construisons une telle base.

  $$M_{\mathcal{B}}(f - 4Id_E) = A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{Im}(f - 4Id_E) = \mathrm{Vect}(4e'_1 - 2e'_2 + 4e'_3, -e'_1 - e'_2 - e'_3, -5e'_1 + e'_2 - 5e'_3)$.

$\mathrm{Im}(f - 4Id_E) = \mathrm{Vect}(2e'_1 - e'_2 + 2e'_3, e'_1 + e'_2 + e'_3, -5e'_1 + e'_2 - 5e'_3)$.

$\mathrm{Im}(f - 4Id_E) = \mathrm{Vect}(e'_1 + e'_2 + e'_3, 2e'_1 - e'_2 + 2e'_3 - 2(e'_1 + e'_2 + e'_3), -5e'_1 + e'_2 - 5e'_3 + 5(e'_1 + e'_2 + e'_3))$.

$\mathrm{Im}(f - 4Id_E) = \mathrm{Vect}(e'_1 + e'_2 + e'_3, -3e'_2, 6e'_2) = \mathrm{Vect}(e'_1 + e'_2 + e'_3, e'_2) = \mathrm{Vect}(e'_1 + e'_3, e'_2)$.

La famille $(e'_1 + e'_3, e'_2)$ étant clairement libre, $\dim \mathrm{Im}(f - 4Id_E) = 2$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}(f - 4Id_E) = 1$. Ainsi $4 \in \mathrm{Sp}\, f$ et $\dim SEP(f, 4) = 1$.

Notons que $(f - 4Id_E)(e_1 - e_2 + e_3) = (f - 4Id_E)(e_1) - (f - 4Id_E)(e_2) + (f - 4Id_E)(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 4e_3 + e_1 + e_2 + e_3 - 5e_1 + e_2 - 5e_3 = 0_E$. Donc $e_1 - e_2 + e_3$ est un élément non nul de $SEP(f, 4)$ qui est de dimension 1. Alors $SEP(f, 4) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + e_3)$. Notons que $e_1 - e_2 + e_3 \in \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2)$.

Alors $\mathrm{Ker}(f - 4Id_E) = SEP(f, 4) \subset \mathrm{Im}(f - 4Id_E)$.

Posons alors $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$. $e'_1 \in SEP(f, 4)$ donc $f(e'_1) = 4e'_1$.

Cherchons e'_2 dans E tel que $f(e'_2) = 3e'_1 + 4e'_2$ et $e'_2 \neq 0$!

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$.

$f(u) = 3e'_1 + 4u \Leftrightarrow (f - 4\,\mathrm{Id}_E)(u) = 3e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - 5z = 3 \\ -2x - y + z = -3 \\ 4x - y - 5z = 3 \end{cases}$

$f(u) = 3e'_1 + 4u \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ 4x - y - 5z = 3 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ 6x - 6z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 1 \\ -3 = -2x - y + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}.$

Notons que $(1, 1, 0)$ est solution du dernier système. Posons alors $\underline{e'_2 = e_1 + e_2}$.

$\underline{f(e'_2) = 3e'_1 + 4e'_2}$. Cherchons maintenant $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$.

$u \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (f - 2\,\mathrm{Id}_E)(u) = 0 \Leftrightarrow (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$u \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - y - 5z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ 4x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 6x - y - 5z = 0 \\ 4x - y - 3z = 0 \end{cases} \underset{\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ 0 = -2x + y + x \end{cases}.$

$u \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}.$

Alors $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$. Posons $\underline{e'_3 = e_1 + e_2 + e_3}$. $\underline{f(e'_3) = 2e'_3}$.

Posons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ et montrons que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

$\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + e_3,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3) \underset{e_1 + e_2 + e_3 - (e_1 + e_2)}{=} \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + e_3,\ e_1 + e_2,\ e_3).$

$\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) \underset{e_1 - e_2 + e_3 - e_3}{=} \mathrm{Vect}(e_1 - e_2,\ e_1 + e_2,\ e_3) \underset{e_1 + e_2 - (e_1 - e_2)}{=} \mathrm{Vect}(e_1 - e_2,\ 2e_2,\ e_3) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2,\ e_2,\ e_3).$

Ainsi $\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = E$. Alors (e'_1, e'_2, e'_3) est une famille génératrice de E dont le cardinal coïncide avec la dimension de E.

Ainsi $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E. De plus $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$.

Ceci achève de montrer que $\underline{A \text{ est semblable à } B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

(Q2) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$B = \Pi_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\Pi_{\mathcal{B}}(f)P = P^{-1}AP$.

Alors $A = PBP^{-1}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$.

A et B sont inversibles car 0 n'est pas valeur propre de ces deux matrices.

$A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{-n} = (A^{-1})^n = (PB^{-1}P^{-1})^n = P(B^{-1})^nP^{-1} = PB^{-n}P^{-1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$ et $A^{-n} = PB^{-n}P^{-1}$ donc $\underline{\forall n \in \mathbb{Z},\ A^n = PB^nP^{-1}.}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^2 & 2\times 4\times 3 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$.

$B^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^2 & 2\times 4\times 3 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^3 & 3\times 4^2\times 3 & 0 \\ 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$. Montrons par récurrence que pour

tout n dans $\mathbb{N}$ $B^n = \begin{pmatrix} 4^n & n\times 4^{n-1}\times 3 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. C'est vrai pour $n=0$. Supposons l'égalité

vrai pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$B^{n+1} = BB^n = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & n\,4^{n-1}\times 3 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^{n+1} & (n+1)4^n\times 3 & 0 \\ 0 & 4^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 3n\,4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Montrons que ce résultat vaut pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Soit $\underline{n \in \mathbb{Z}}$ et $\underline{n < 0}$. $B^n = (B^{-n})^{-1}$. Notons que $B^{-n} = \begin{pmatrix} 4^{-n} & 3(-n)4^{-n-1} & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$ car $-n \in \mathbb{N}$.

$\begin{pmatrix} 4^n & 3n\,4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^{-n} & 3(-n)4^{-n-1} & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3n}{4}+\frac{3n}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Alors $(B^{-n})^{-1} = \begin{pmatrix} 4^n & 3n\,4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ donc $B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 3n\,4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 3n\,4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Cherchons P^{-1}. P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donc P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

Alors $e_3 = e_1 + e_2 + e_3 - (e_1 + e_2) = e'_3 - e'_2$; $\underline{e_3 = e'_3 - e'_2}$.

$2e_2 = e_1 + e_2 + e_3 - (e_1 - e_2 + e_3) = e'_3 - e'_1$; $\underline{e_2 = \frac{1}{2}(e'_3 - e'_1)}$.

$e_1 = e'_2 - e_2 = e'_2 - \frac{1}{2}(e'_3 - e'_1) = \frac{1}{2}e'_1 + e'_2 - \frac{1}{2}e'_3$. $\underline{e_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + 2e'_2 - e'_3)}$.

Alors $$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. $A^n = P B^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 3n4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n & 3n4^{n-1}+4^n & 2^n \\ -4^n & -3n4^{n-1}+4^n & 2^n \\ 4^n & 3n4^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{3(n+2)}{2}4^n - 2^n & -4^n + 2^n & -\frac{4+3n}{2}4^n + 2^{n+1} \\ \frac{2-3n}{2}4^n - 2^n & 4^n + 2^n & \frac{3n-4}{2}4^n + 2^{n+1} \\ \frac{3n+2}{2}4^n - 2^n & -4^n + 2^n & -\frac{3n}{2}4^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

R.

EXERCICE 15

Exercice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q3. Calculer A^n pour n dans $\mathbb{N}^*$... ou pour $n \in [\![2, +\infty[\![$.

Q1 Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - y + z - t = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z + t = 0 \\ -x + y - (1+\lambda)z + t = 0 \\ -x + y - 3z + (3-\lambda)t = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1-\lambda)x - y + z - t = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z + t = 0 \\ -\lambda(x+z) = 0 \\ -x + y - 3z + (3-\lambda)t = 0 \end{cases}$$

__1er Cas..__ $\lambda = 0$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x + y - 3z + 3t = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2(x+z) = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x + y - 3z + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ 0 = -x + y + 3x - 3y \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \\ t = -x \end{cases}$$. $0 \in Sp(A)$ et $SEP(A, 0) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

__2ème Cas..__ $\lambda \neq 0$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ -\lambda x - y - t = 0 \\ t = (\lambda - 1)y \\ 0 = -x + y + 3x + (3-\lambda)(\lambda-1)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = (\lambda-1)y \\ 0 = -\lambda x - y - (\lambda-1)y = -\lambda(x+y) \\ 0 = 2x + (-\lambda^2 + 4\lambda - 2)y \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \underset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} z = -x \\ t = (\lambda-1)y \\ y = -x \\ 0 = x[2 + \lambda^2 - 4\lambda + 2] = (\lambda-2)^2 x \end{cases}$$

__a)__ $\lambda = 2$ $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \\ t = y = -x \end{cases}$. $2 \in Sp(A)$ et $SEP(A, 2) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

__b)__ $\lambda \neq 2$ $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$; $\lambda \notin Sp(A)$.

Finalement $Sp(A)=\{0,2\}$, $SEP(A,0)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A,2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi A n'est pas diagonalisable car $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,2)=2<4$.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ une base de $E=\mathbb{R}^4$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.
Pour prouver que A est semblable à la matrice B il suffit de trouver une base $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$ de E telle que : $M_{\mathcal{B}'}(f)=B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ (1)

Notons que (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(e'_1)=0_E & (e'_1\in \mathrm{Ker} f)\\ f(e'_2)=e'_1 \\ f(e'_3)=2e'_3 & (e'_3\in \mathrm{Ker}(f-2Id_E))\\ f(e'_4)=e'_3+2e'_4\end{cases}$

Notons encore que $Sp(f)=\{0,2\}$, $SEP(f,0)=\mathrm{Vect}(e_1+e_2-e_3-e_4)$ et $SEP(f,2)=\mathrm{Vect}(-e_1+e_2+e_3+e_4)$.
Dès lors posons $\underline{e'_1=e_1+e_2-e_3-e_4}$ et $\underline{e'_3=-e_1+e_2+e_3+e_4}$. $\underline{f(e'_1)=0_E}$ et $\underline{f(e'_3)=2e'_3}$.
Cherchons alors e'_2 et e'_4 dans E tels que $f(e'_2)=e'_1$ et $f(e'_4)=e'_3+2e'_4$.
Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3+te_4$.

$f(u)=e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\-1&1&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+z-t=1\\x+y+z+t=1\\-x+y-z+t=-1\\-x+y-3z+3t=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+z-t=1\\2x+2z=2\\-2z+2t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=t\\z=1-x\\-y-t=1-x-z=0\end{cases}$

$L_3\leftarrow -L_1$
$L_2\leftarrow L_2+L_1$
$L_4\leftarrow L_4+L_1$

$f(u)=e'_1 \Leftrightarrow \begin{cases}z=1-x\\t=1-x\\y=x-1\end{cases}$

En posant $x=1$, $y=z=t=0$ on a $u=e_1$ et $f(e_1)=e'_1$ ... ce qui était visible dès le départ !
Dès lors posons $\underline{e'_2=e_1}$; $\underline{f(e'_2)=e'_1}$.

Reprenons $u=xe_1+ye_2+ze_3+te_4$.

$f(u)=e'_3+2u \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\-1&1&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+z-t=-1+2x\\x+y+z+t=1+2y\\-x+y-z+t=1+2z\\-x+y-3z+3t=1+2t\end{cases}$

$f(u) = e'_3 + 2u \iff \begin{cases} -x-y+z-t=-1 \\ x-y+z+t=1 \\ -x+y-3z+t=1 \\ -x+y-3z+t=1 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1+L_2 \\ L_3 = L_4}}{\iff} \begin{cases} -x-y+z-t=-1 \\ -2y+2z=0 \\ -x+y-3z+t=1 \end{cases} \iff \begin{cases} z=y \\ x+t=1 \\ -x-2y+t=1 \end{cases}$

$f(u) = e'_3 + 2u \iff \begin{cases} z=y \\ t=1-x \\ -x-2y+1-x=1 \end{cases} \iff \begin{cases} z=y \\ t=1-x \\ y=-x \end{cases} \iff \begin{cases} z=-x \\ y=-x \\ t=1-x \end{cases}$

Posons $x=0$, $y=0$, $z=0$ et $t=1$. Alors $u=e_4$ et $f(u)=f(e_4)=e'_3+2e_4$.

Posons alors $\underline{e'_4 = e_4}$. $\underline{f(e'_4) = e'_3 + 2e'_4}$.

Ainsi si $e'_1 = e_1+e_2-e_3-e_4$, $e'_2 = e_1$, $e'_3 = -e_1+e_2+e_3+e_4$ et $e'_4 = e_4$.

alors $f(e'_1) = 0_E$, $f(e'_2) = e'_1$, $f(e'_3) = 2e'_3$ et $f(e'_4) = e'_3 + 2e'_4$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base de E.

Comme $\dim E = 4$ il suffit de prouver que (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 + \delta e'_4 = 0_E$.

$\alpha(e_1+e_2-e_3-e_4) + \beta(e_1) + \gamma(-e_1+e_2+e_3+e_4) + \delta e_4 = 0_E$.

$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ -\alpha+\gamma=0 \\ -\alpha+\gamma+\delta=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \alpha=\gamma=0 \\ \beta=0 \\ \delta=0 \end{cases}$; $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base de E et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$.

Alors $B = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\underline{A \text{ est semblable à } B}$.

Q2 $B = \begin{pmatrix} U & O_2 \\ O_2 & V \end{pmatrix}$ avec $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Un produit élémentaire par blocs donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} U^n & O_2 \\ O_2 & V^n \end{pmatrix}$.

$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$. . $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $U^n = O$

$V = 2I_2 + U$. $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $V^n \underset{\underset{I_2U = UI_2 = U}{\uparrow}}{=} \sum_{k=0}^{n} C_n^k U^k (2I_2)^{n-k} = 2^n I_2 + 2^{n-1} n U = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $B^n = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & V^n \end{pmatrix}$ avec $V^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Un calcul simple donne $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & n-1 & -n \\ 0 & 1 & -(n-1) & n \\ 0 & 1 & -(n-1) & n \\ 0 & 1 & -(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$.

R.

EXERCICE 16

Exercice Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}$.

Q2. Calculer A^2 et A^4.

Q3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1 Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} t = \lambda x \\ x = \lambda y \\ y = \lambda z \\ z = \lambda t \end{cases} \iff \begin{cases} z = \lambda t \\ y = \lambda^2 t \\ x = \lambda^3 t \\ t = \lambda^4 t \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda^4) t = 0 \\ x = \lambda^3 t \\ y = \lambda^2 t \\ z = \lambda t \end{cases}.$$

1er cas $\lambda^4 \neq 1$. $AX = \lambda X \iff \begin{cases} t=0 \\ x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \iff X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$

λ n'est pas valeur propre de A.

2ème cas $\lambda^4 = 1$ $AX = \lambda X \iff \begin{cases} x = \lambda^3 t \\ y = \lambda^2 t \\ z = \lambda t \end{cases}$

Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ et $\mathrm{SEP}(A, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Notons que $\lambda^4 = 1 \iff \lambda \in \{1, -1, i, -i\}$.

Donc $\mathrm{Sp}\, A = \{1, -1, i, -i\}$. $\mathrm{SEP}(A,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathrm{SEP}(A,-1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\mathrm{SEP}(A,i) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathrm{SEP}(A,-i) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Remarque.. La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est $4 = \dim \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

Donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Notons que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, car $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A = \{1, -1\}$ et

$\dim \mathrm{SEP}(A,1) + \dim \mathrm{SEP}(A,-1) = 2 < 4$.

R.

(Q2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}.$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix}.$

$A^4 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} = I_4.$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}$ et $\underline{A^4 = I_4}$.

(Q3) Posons $E = \mathbb{R}^4$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E.

Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

Pour montrer que A et B sont semblables il suffit de trouver une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

Avant de commencer notons que $Sp\, f = \{1, -1\}$, que $SEP(f,1) = Vect(e_1+e_2+e_3+e_4)$ et $SEP(f,-1) = Vect(-e_1+e_2-e_3+e_4)$.

* <u>Une petite analyse.</u> Supposons que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ soit une base de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$. Alors $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = -e'_2$, $f(e'_3) = e'_4$ et $f(e'_4) = -e'_3$.

ou $f^2(e'_3) = -e'_3$.

Donc $e'_1 \in SEP(f,1)$, $e'_2 \in SEP(f,-1)$, $e'_4 = f(e'_3)$ et $e'_3 = -f(e'_4) = -f^2(e'_3)$.

Donc $\underline{e'_1 \in SEP(f,1),\ e'_2 \in SEP(f,-1),\ e'_4 = f(e'_3) \text{ et } e'_3 \in SEP(f^2,-1)}$.

Si -1 est valeur propre de f^2 !

* <u>Construction d'une base solution.</u>

Posons $\underline{e'_1 = e_1+e_2+e_3+e_4}$; $e'_1 \in SEP(f,1)$ donc $\underline{f(e'_1) = e'_1}$.

Posons $\underline{e'_2 = -e_1+e_2-e_3+e_4}$; $e'_2 \in SEP(f,-1)$ donc $\underline{f(e'_2) = -e'_2}$.

Cherchons e'_3 tel que $f^2(e'_3) = -e'_3$. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in E$.

$$f^2(u) = -u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ x = -z \\ y = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases}.$$

Posons $e'_3 = e_1 - e_3$; $f^2(e'_3) = -e'_3$. Notons que $-1 \in Sp\, f^2$ et que $e'_3 \in SEP(f^2, -1)$

Posons $e'_4 = f(e'_3)$.
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad e'_4 = e_2 - e_4.$$

Il reste deux choses à vérifier : 1) $f(e'_4) = -e'_3$ 2) $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base de E.

1) $f(e'_4) = f^2(e'_3) \overset{e'_3 \in SEP(f^2,-1)}{=} -e'_3$. $f(e'_4) = -e'_3$.

2) Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 + \delta e'_4 = 0_E$.

$0_E = \alpha(e_1+e_2+e_3+e_4) + \beta(-e_1+e_2-e_3+e_4) + \gamma(e_1 - e_3) + \delta(e_2 - e_4) = (\alpha - \beta + \gamma)e_1 + (\alpha + \beta + \delta)e_2 + (\alpha - \beta - \gamma)e_3 + (\alpha + \beta - \delta)e_4$.

Ainsi $\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 & (1) \\ \alpha + \beta + \delta = 0 & (2) \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 & (3) \\ \alpha + \beta - \delta = 0 & (4) \end{cases}$ (1)+(3) et (1)-(3) donnent $\alpha = \beta$ et $\gamma = 0$. (2)+(4) et (2)-(4) donnent $\alpha = -\beta$ et $\delta = 0$. $\begin{cases} \gamma = \delta = 0 \\ \alpha = \beta \\ \beta = -\beta \end{cases}$.

Alors $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

$B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une famille libre de cardinal 4 de E qui est de dimension 4.

B' est une base de E et $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$. Ainsi A et B sont semblables.

Remarque : Posons $P = Pas(B, B')$. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$B = P^{-1}AP$

Un calcul simple donne : $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

R.

EXERCICE 17

Exercice **N1** **Racines carrées d'une matrice.**

Q1. $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit D un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si D commute avec C : D est diagonale.

En déduire que si $D^2 = C$ alors D est diagonale.

Q2. Déterminer le nombre d'éléments D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $D^2 = C$.

Q3. $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre d'éléments B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $B^2 = A$.

Q1 Soit D une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commute avec C et soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique.

$\mathrm{Sp}\, C = \{9, 4, 1\}$. Alors $SEP(A,9)$, $SEP(A,4)$, $SEP(A,1)$ sont nécessairement de dimension 1.

Pour tout $j \in [\![1,3]\!]$, CE_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de C. Alors $CE_1 = 9E_1$, $CE_2 = 4E_2$ et $CE_3 = E_3$.

Alors $E_1 \in SEP(C,9)$, $E_2 \in SEP(C,4)$ et $E_3 \in SEP(C,1)$. Mieux :

$SEP(C,9) = \mathrm{Vect}(E_1)$, $SEP(C,4) = \mathrm{Vect}(E_2)$ et $SEP(C,1) = \mathrm{Vect}(E_3)$ car E_1, E_2, E_3 sont non nuls et les sous-espaces propres de C sont de dimension 1.

$CDE_1 = DCE_1 = 9DE_1$ donc $DE_1 \in SEP(C,9) = \mathrm{Vect}(E_1)$; $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $DE_1 = \alpha E_1$.

$CDE_2 = DCE_2 = 4DE_2$ donc $DE_2 \in SEP(C,4) = \mathrm{Vect}(E_2)$; $\exists \beta \in \mathbb{R}$, $DE_2 = \beta E_2$.

$CDE_3 = DCE_3 = DE_3$ donc $DE_3 \in SEP(C,1) = \mathrm{Vect}(E_3)$; $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $DE_3 = \gamma E_3$.

Alors $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$; D est diagonale. Si $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et si D commute avec C : D est diagonale.

Les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec C sont les matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice.. Retrouver le résultat précédent en partant de $= \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$.

Reprenons D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et supposons que $D^2 = C$.

Alors $DC = DD^2 = D^3 = D^2D = CD$. D commute avec C. D est diagonale.

Si $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et si $D^2 = C$, D est diagonale.

Q2 $\{D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid D^2 = C\} = \{D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid D \text{ diagonale et } D^2 = C\}$.

Soit $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. $D^2 = C \iff \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha^2 = 9 \\ \beta^2 = 4 \\ \gamma^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 3 \text{ ou } -3 \\ \beta = 2 \text{ ou } -2 \\ \gamma = 1 \text{ ou } -1 \end{cases}$

R.

Posons $\mathcal{S}_C = \{D \in M_3(\mathbb{R}) \mid D^2 = C\}$. $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 3\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'' \end{pmatrix} ; (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{0,1\}^3 \right\}$.

Alors card $\mathcal{S}_C$ = card $\{0,1\}^3 = 2^3 = 8$.

Il y a exactement huit éléments D de $M_3(\mathbb{C})$ tels que $D^2 = C$.

(Q3) A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale. Alors $Sp\,A = \{9, 4, 1\}$. A est diagonalisable car $A \in M_3(\mathbb{R})$ et A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes. Donc il existe une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(9,4,1) = C$. Posons $\mathcal{S}_A = \{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A\}$.

Rappelons que $\mathcal{S}_C = \{D \in M_3(\mathbb{R}) \mid D^2 = C\}$ a 8 éléments et montrons que $\mathcal{S}_A$ est équipotent à $\mathcal{S}_C$.

Alors posons $\forall B \in \mathcal{S}_A$, $\varphi(B) = P^{-1}BP$.

$\forall B \in \mathcal{S}_A$, $(\varphi(B))^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}B^2P \overset{B \in \mathcal{S}_A}{=} P^{-1}AP = C$. $\forall B \in \mathcal{S}_A$, $\varphi(B) \in \mathcal{S}_C$.

φ est une application de $\mathcal{S}_A$ dans $\mathcal{S}_C$. Montrons qu'elle est bijective.

Soit $D \in \mathcal{S}_C$. Montrons par analyse-synthèse que : $\exists!\, B \in \mathcal{S}_A$, $\varphi(B) = D$.

• Analyse / Unicité. Supposons que B soit un élément de $\mathcal{S}_A$ tel que $\varphi(B) = D$.

Alors $P^{-1}BP = D$ donc $B = PDP^{-1}$. D'où l'unicité.

• Synthèse / Existence. Posons $B = PDP^{-1}$. $B^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} \overset{D \in \mathcal{S}_C}{=} PCP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = A$.

Ainsi $B \in \mathcal{S}_A$. De plus $\varphi(B) = P^{-1}BP = P^{-1}(PDP^{-1})P = D$. D'où l'existence.

$\forall D \in \mathcal{S}_C$, $\exists!\, B \in \mathcal{S}_A$, $\varphi(B) = D$. φ est bijective. Alors $\mathcal{S}_A$ et $\mathcal{S}_C$ sont équipotents.

Donc card $\mathcal{S}_A$ = card $\mathcal{S}_C = 8$.

Il y a exactement huit éléments B de $M_3(\mathbb{R})$ tels que $B^2 = A$.

Remarque.. $\{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A\} = \left\{ P \begin{pmatrix} 3\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'' \end{pmatrix} P^{-1} ; (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{-1,1\}^3 \right\}$.

Exercice.. Montrer que l'on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer alors $\{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A\}$.

Exercice **Racines $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q1. Donner les valeurs propres et les sous espaces de A.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^n = A$.

a) Soit B un élément de $\mathcal{R}$. Montrer que B commute avec A.

En déduire que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de B et que B est triangulaire inférieure.

Montrer l'existence de trois réels a, b et f tels que : $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

b) Déterminer $\mathcal{R}$.

Q1 A est triangulaire inférieure donc les valeurs propres de A sont les éléments de sa diagonale. $Sp(A) = \{1, -1\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x + y = y \\ -z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. $SEP(A,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ x + y = -y \\ -z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. $SEP(A,-1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$Sp(A) = \{1, -1\}$. $SEP(A,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. $SEP(A,-1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

__Remarque__.. A n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres n'est pas 3.

Q2 a) $BA = BB^n = B^{n+1} = B^nB = AB$. __B commute avec A.__

Soit X un vecteur propre de A. $X \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $\exists \lambda \in \{-1, 1\}$, $AX = \lambda X$.

$BAX = \lambda BX$ (multiplication par B de $AX = \lambda X$).

Alors $ABX = BAX = \lambda BX$; $BX \in SEP(A, \lambda)$.

Or $X \neq 0$, $X \in SEP(A,\lambda)$ et $\dim SEP(A,\lambda) = 1$ donc $SEP(A,\lambda) = \mathrm{Vect}(X)$.

Alors $BX \in \mathrm{Vect}(X)$. $\exists\, \delta_\lambda \in \mathbb{R}$, $BX = \delta_\lambda X$. Comme $X \neq 0$, X est un vecteur propre de B.

__Les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de B.__

Soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AE_2 = E_2$; $AE_3 = -E_3$; $E_2 \neq 0$ et $E_3 \neq 0$.

E_2 et E_3 sont donc deux vecteurs propres de A donc de B.

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $BE_2 = \alpha E_2$ et $BE_3 = \beta E_3$.

Or BE_2 (resp. BE_3) est la deuxième colonne (resp. troisième colonne) de B.

Ainsi $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix}$. B est triangulaire inférieure.

$AB = BA$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a+b & \alpha & 0 \\ -c & 0 & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b+\alpha & \alpha & 0 \\ c & 0 & -\beta \end{pmatrix}$.

Ainsi $\alpha = a$ et $-c = c$. Donc $\alpha = a$ et $c = 0$.

$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$. Posons $t = \beta$! Alors $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$.

b) Ce qui précède montre que : $R \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} ; (a,b,t) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Soit $(a,b,t) \in \mathbb{R}^3$. Posons $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$.

$B^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$.

$B^3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2b & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$.

Une récurrence simple montre que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k & 0 \\ 0 & 0 & t^k \end{pmatrix}$

Alors : $B \in R \Leftrightarrow B^n = A \Leftrightarrow \begin{cases} a^n = 1 \\ na^{n-1}b = 1 \\ t^n = -1 \end{cases}$

1er cas. n est pair. $R = \emptyset$!

2ème cas. n est impair. $B \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ t = -1 \\ b = 1/n \end{cases}$. $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\hookrightarrow x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice - f est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice, dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?
Q2. On suppose que g est un endomorphisme de E vérifiant : $g \circ g = f$.
a) Montrer que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et 4.
En déduire que e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de g. g est-il diagonalisable ?
b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de g est $\{1, 2\}$ ou $\{-1, -2\}$ ou $\{1, -2\}$ ou $\{-1, 2\}$.
c) Montrer qu'il existe deux réel δ et ε tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/(2\delta) & \delta & 0 \\ 1/(\delta + 2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

Q3. Résoudre l'équation :

$$X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad X^2 = A$$

Q1 A est triangulaire inférieure donc son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux.
$Sp(f) = Sp(A) = \{1, 4\}$. Un calcul simple donne $SEP(f,1) = Vect(e_2)$ et $SEP(f,4) = Vect(e_3)$.

Ainsi f n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas égale à dim E.

Q2 a) $f(g(e_2)) = g^3(e_2) = g(f(e_2)) = g(e_2)$. De plus $g(e_2)$ n'est pas nul car $g(e_2) = 0_E$ donne $g(g(e_2)) = 0_E$ qui donne $e_2 = f(e_2) = g(g(e_2)) = 0_E$!
Donc $g(e_2)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

De même $g(e_3)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 4.
$g(e_2) \in SEP(f,1) = Vect(e_2)$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $g(e_2) = \lambda e_2$ et $e_2 \neq 0_E$. Alors e_2 est un vecteur propre de g. Notons que : $e_2 = f(e_2) = g(g(e_2)) = \lambda^2 e_2$ donc $\lambda^2 = 1$.
e_2 est un vecteur propre de g associé à une valeur propre λ vérifiant $\lambda^2 = 1$. De même e_3 est un vecteur propre de g associé à une valeur propre μ vérifiant $\mu^2 = 4$.

Supposons g diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $D = M_{\mathcal{B}'}(g)$ soit diagonale.
Alors $M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'}(g^2) = D^2$ est diagonale et ainsi f est diagonalisable !
g n'est pas diagonalisable.

R.

b) λ et μ sont deux valeurs propres distinctes ($\lambda^2=1$ et $\mu^2=4$) de g. Or g ne peut pas avoir trois valeurs propres distinctes car g n'est pas diagonalisable.
Alors $Sp(g)=\{\lambda,\mu\}$. Comme $\lambda^2=1$ et $\mu^2=4$: $\lambda=1$ ou -1 et $\mu=2$ ou -2.
Ainsi $\underline{Sp(g)=\{1,2\} \text{ ou } \{-1,-2\} \text{ ou } \{1,-2\} \text{ ou } \{-1,2\}}$.

En clair $\delta=\lambda$ et $\varepsilon=\frac{\mu}{2}$!!

c) Posons $\delta=1$ si $\lambda=1$ et $\delta=-1$ si $\lambda=-1$; posons $\varepsilon=1$ si $\mu=2$ et $\varepsilon=-1$ si $\mu=-2$.
$g(e_2)=\lambda e_2=\delta e_2$ et $g(e_3)=\mu e_3=2\varepsilon e_3$. Notons que $\delta\in\{-1,1\}$ et $\varepsilon\in\{-1,1\}$.
De plus $\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $g(e_1)=ae_1+be_2+ce_3$. $\Pi_B(g)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ b & \delta & 0\\ c & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}=A=\Pi_B(f)=\Pi_B(g^2)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ b & \delta & 0\\ c & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ ba+\delta b & \delta^2 & 0\\ ac+2\varepsilon c & 0 & 4\varepsilon^2\end{pmatrix}.$$

Alors $a^2=1$, $ba+\delta b=1$ et $c(a+2\varepsilon)=1$.
Comme $b(a+\delta)=1$: $a\neq-\delta$. $a^2=1=\delta^2$ donc alors nécessairement $a=\delta$.
Donc $a=\delta$, $b=\frac{1}{2\delta}$ et $c=\frac{1}{\delta+2\varepsilon}$. $\Pi_B(g)=\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0\\ 1/2\delta & \delta & 0\\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}$ avec $\varepsilon\in\{-1,1\}$ et $\delta\in\{-1,1\}$.

Q3) Soit $X\in M_3(\mathbb{R})$ tel que $X^2=A$. Notons h l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est X. $\Pi_B(h^2)=X^2=A=\Pi_B(f)$. $h^2=f$. $h\circ h=f$
D'après Q2 $\exists\varepsilon\in\{-1,1\}$, $\exists\delta\in\{-1,1\}$, $X=\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0\\ 1/2\delta & \delta & 0\\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}$.

Réciproquement soit $(\delta,\varepsilon)\in\{-1,1\}^2$. Posons $X=\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0\\ 1/2\delta & \delta & 0\\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}$.

$$X^2=\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0\\ 1/2\delta & \delta & 0\\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} \delta^2 & 0 & 0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \delta^2 & 0\\ \frac{\delta}{\delta+2\varepsilon}+\frac{2\varepsilon}{\delta+2\varepsilon} & 0 & 4\varepsilon^2\end{pmatrix}$$

Donc $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}=A$.

Ainsi $\{X\in M_{3,3}(\mathbb{R})\mid X^2=A\}=\left\{\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0\\ 1/2\delta & \delta & 0\\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix};(\delta,\varepsilon)\in\{-1,1\}^2\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 1/3 & 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ -1/2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & -2\end{pmatrix}\right\}$.

Exercice **Réduction d'un endomorphisme** EXERCICE 30 R

P1

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Q2. Construire (en justifiant) une base de E constituée de vecteurs propres de f.

⚠ Nous n'utiliserons pas le caractère symétrique de A.

Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)$.

Soit $u = xe_1+ye_2+ze_3+te_4$ un élément de E. Posons $X = M_{\mathcal{B}}(u)$. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow (f-\lambda Id_E)(u) = 0 \Leftrightarrow (A-\lambda I_4)X = 0_{M_{4,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-\lambda)x = 0 \\ (5-\lambda)y+4z-2t=0 \\ 4y+(5-\lambda)z+2t=0 \\ -2y+2z+(8-\lambda)t=0 \end{cases}$

1er cas.. $\lambda = 9$

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} -4y+4z-2t=0 \\ 4y-4z+2t=0 \\ -2y+2z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2y-2z+t=0$

Si $\lambda=9$: $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)$ est l'hyperplan de E d'équation $2y-2z+t=0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Ainsi $9 \in Sp\, f$ et $\dim SEP(f,9) = 3$.

$SEP(f,9) = \{xe_1+ye_2+ze_3+te_4 \in E \mid t=-2y+2z\} = \{xe_1+ye_2+ze_3+(-2y+2z)e_4 \; ; (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$

$SEP(f,9) = \{x e_1 + y(e_2-2e_4)+z(e_3+2e_4) ; (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2-2e_4, e_3+2e_4)$.

$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2-2e_4, e_3+2e_4)$ est une famille génératrice de cardinal 3 de $SEP(f,9)$ qui est de dimension 3. $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2-2e_4, e_3+2e_4)$ est une base de $SEP(f,9)$.

2ème cas.. $\lambda \neq 9$

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (5-\lambda)y+4z-2t=0 \\ 4y+(5-\lambda)z+2t=0 \\ -2y+2z+(8-\lambda)t=0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=0 \\ (5-\lambda)y+4z-2t=0 \\ (9-\lambda)(y+z)=0 \\ -2y+2z+(8-\lambda)t=0 \end{cases}$

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \underset{\lambda\neq 9}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=0 \\ z=-y \\ 0=(5-\lambda)y-4y-2t=(1-\lambda)y-2t \\ 0=-2y-2y+(8-\lambda)t=-4y+(8-\lambda)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-y \\ t=\frac{1-\lambda}{2}y \\ 0=-4y+(8-\lambda)\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)y = \frac{\lambda(\lambda-9)}{2}y \end{cases}$

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \underset{\lambda\neq 9}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=0 \\ z=-y \\ t=\frac{1-\lambda}{2}y \\ \lambda y=0 \end{cases}$

a) $\lambda \neq 0$. $u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 0_E$

λ n'est pas valeur propre de f.

b) $\lambda = 0$ $u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-y \\ t=y/2 \end{cases}$

...

Donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \{y e_2 - y e_3 + \frac{y}{2} e_4 \,;\, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3 + \frac{1}{2} e_4) =$
$\mathrm{Vect}(2e_2 - 2e_3 + e_4)$.

Alors comme $2e_2 - 2e_3 + e_4 \neq 0_E$! 0 est valeur propre de f et

$\mathcal{B}_2 = (2e_2 - 2e_3 + e_4)$ est une base de $SEP(f,0)$.

Finalement $Sp\, f = \{0, 9\}$. $SEP(f,0)$ est la droite vectorielle engendrée par $2e_2 - e_3 + e_4$ et $SEP(f,3)$ est l'hyperplan de E admettant pour base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4)$.

Q2 $Sp\, f = \{0, 9\}$ et $\dim SEP(f,0) + \dim SEP(f,9) = 1 + 3 = 4 = \dim E$ donc

f est diagonalisable.

$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4)$ est une base de $SEP(f,9)$, $\mathcal{B}_2 = (2e_2 - 2e_3 + e_4)$ est une base de $SEP(f,0)$ et $E = SEP(f,9) \oplus SEP(f,0)$.

Alors $\mathcal{B}' = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4, 2e_2 - 2e_3 + e_4)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 9, 9, 9 et 0.

Remarques.. 1.. $M_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Diag}(9,9,9,0)$

2.. $\mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.. L'inverse de $P = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est : $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4.. $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P = P^{-1}AP$.