EXERCICE 21

Exercice **N1** **Diagonalisation d'un endomorphisme de "faible" rang. HEC 2007 MIII E exercice.**

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3).

Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer les valeurs propres de t. Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.

L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$.

Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

- pour tout entier i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(t \circ t) \subset \mathrm{Im}(t)$, où $\mathrm{Im}\, u$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$.

Établir que $\mathcal{B} = \left(e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(t)$.

Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathcal{B}$

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

(Q1) Soit λ un réel et soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$$t(u) = \lambda u \Leftrightarrow T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = \lambda x \\ y = \lambda y \\ y = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ y = \lambda z \end{cases}$$

1er cas. $\lambda = 1$. $t(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0.$

Alors 1 est valeur propre de t et $SEP(t,1) = Vect(e_1)$.

2ème cas. $\lambda \neq 1$ $t(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \lambda z = 0 \\ (1-\lambda)x + z = 0 \end{cases}$

a) $\lambda = 0$ $t(u) = \lambda u \Leftrightarrow y = 0$ et $x + z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ et $z = -x$.

Alors 0 est valeur propre de t et $SEP(t,0) = Vect(e_1 - e_3)$

b) $\lambda \neq 0$ $t(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ (1-\lambda)x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$; λ n'est pas valeur propre de t.

Finalement $\underline{\underline{Sp\, t = \{0,1\},\ SEP(t,0) = Vect(e_1 - e_3)}}$ et $\underline{\underline{SEP(t,1) = Vect(e_1)}}$.

$\dim SEP(t,0) + \dim SEP(t,1) = 2 < 3$ donc t n'est pas diagonalisable.

$0 \in Sp\, t$ donc t n'est pas bijectif.

(Q2) a) Posons $\hat{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$. $T = M_{\hat{B}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

b) $Im\, t = t(\mathbb{R}^{2n+1}) = t(Vect(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1}))$

$Im\, t = Vect(t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_{2n+1})) = Vect(e_1, e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1})$.

$\underline{Im\, t = Vect(e_1, e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}) = Vect(e_1, e_2 + e_3 + \cdots + e_{2n+1})}$.

$(e_1, e_2+e_3+\cdots+e_{2n+1})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, t$. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha e_1 + \beta(e_2+\cdots+e_{2n+1}) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$

Alors $\alpha e_1 + \beta e_2 + \cdots + \beta e_{2n+1} = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$; ainsi $\alpha=\beta=0$ car $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$ est libre. Ceci achève de montrer que $(e_1, e_2+e_3+\cdots+e_{2n+1})$ est libre.

Finalement $(e_1, e_2+e_3+\cdots+e_{2n+1})$ est une base de $\mathrm{Im}\, t$.

Ainsi $\mathrm{rg}\, t = \dim \mathrm{Im}\, t = 2$. Alors $\dim \mathrm{Ker}\, t = 2n+1-2 = 2n-1$.

$\mathrm{rg}\, t = 2$ et $\dim \mathrm{Ker}\, t = 2n-1$.

c) $\dim \mathrm{Ker}\, t = 2n-1 \geq 1$ $(n\geq 1)$ donc $\mathrm{Ker}\, t \neq \{0_{\mathbb{R}^{2n+1}}\}$. 0 est valeur propre de t.

$SEP(t,0) = \mathrm{Ker}\, t$ donc $\dim SEP(t,0) = 2n-1$. (*) Voici une base de $SEP(t,0)$ à la fin.

Q3) $\forall x\in\mathbb{R}^{2n+1}$, $t(x)\in\mathbb{R}^{2n+1}$; $\forall x\in\mathbb{R}^{2n+1}$, $t(t(x))\in t(\mathbb{R}^{2n+1}) = \mathrm{Im}\, t$.

$\forall x\in\mathbb{R}^{2n+1}$, $(t\circ t)(x)\in \mathrm{Im}\, t$. $\mathrm{Im}(t\circ t)\subset \mathrm{Im}\, t$.

Q4) Nous avons déjà montré que $\mathcal{B} = (e_1, \sum_{i=2}^{2n+1} e_i)$ est une base de $\mathrm{Im}\, t$ dans Q2 b)

$\tilde{t}(e_1) = t(e_1) = e_1$ et $\tilde{t}(\sum_{i=2}^{2n+1} e_i) = t(\sum_{i=2}^{2n+1} e_i) = \sum_{i=2}^{2n+1} t(e_i) = \sum_{i=2}^{n} e_1 + (e_1+\cdots+e_{2n+1}) + \sum_{i=n+2}^{2n+1} e_1$.

$\tilde{t}(e_1) = e_1$ et $\tilde{t}(\sum_{i=2}^{2n+1} e_i) = 2n\, e_1 + (e_2+\cdots+e_{2n+1})$.

Alors $M_{\mathcal{B}}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q5) a) Soit λ une valeur propre non nulle de t et x un vecteur propre associé à λ. $t(x) = \lambda x$; $x = t(\frac{1}{\lambda}x) \in \mathrm{Im}\, t$.

Tout vecteur propre associé à une valeur propre non nulle appartient à $\mathrm{Im}\, t$.

b) Soit λ une valeur propre non nulle de t soit x un vecteur propre associé.

$x \neq 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$, $t(x) = \lambda x$ et $x \in \mathrm{Im}\, t$.

Alors $x \neq 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$ et $\hat{t}(x) = \lambda x$. donc λ est une valeur propre de $\hat{t}$.

Or $\mathrm{Sp}\,\hat{t} = \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \{1\}$ (la matrice est triangulaire supérieure) donc $\lambda = 1$.

donc $\mathrm{Sp}\, t \cap \mathbb{R}^* \subset \{1\}$. Or $t(e_1) = e_1$ et $e_1 \neq 0_E$ donc $1 \in \mathrm{Sp}\, t$.

Finalement $\mathrm{Sp}\, t = \{0, 1\}$.

Supposons que t est diagonalisable. $2n+1 = \dim \mathbb{R}^{2n+1} = \dim SEP(t,0) + \dim SEP(t,1) = 2n-1 + \dim SEP(t,1)$

Ainsi $\dim SEP(t,1) = 2$.

Alors $SEP(t,1) \subset \mathrm{Im}\, t$ et $\dim SEP(t,1) = \dim \mathrm{Im}\, t = 2$. Alors $SEP(t,1) = \mathrm{Im}\, t$.

Donc $\forall x \in \mathrm{Im}\, t$, $t(x) = x$. En particulier $t(e_2 + e_3 + \cdots + e_{2n+1}) = e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

Alors $2n\, e_1 + \sum_{i=2}^{2n+1} e_i = \sum_{i=2}^{2n+1} e_i$; $2n\, e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$. Ceci est impossible.

donc t n'est pas diagonalisable.

Remarque. $SEP(t,1) = \mathrm{Vect}(e_1)$ (car $e_1 \in SEP(t,1)$ et $1 \leq \dim SEP(t,1) < 2$).

Retour sur Q2 c) Cherchons une base de $SEP(t,0) = \mathrm{Ker}\, t$. Rappelons que $\dim \mathrm{Ker}\, t = 2n-1$.

$\forall i \in [\![2, 2n+1]\!] - \{n+1\}$, $t(e_i - e_1) = t(e_i) - t(e_1) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$

Alors $\mathcal{F} = (e_2 - e_1, \ldots, e_n - e_1, e_{n+2} - e_1, \ldots, e_{2n+1} - e_1)$ est une famille de $\mathrm{Ker}\, t$ de cardinal $2n-1$.

Pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathrm{Ker}\, t$ il suffit alors de montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Soient $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_{2n+1}$ des réels tels que $\sum_{i=2}^{n} \alpha_i (e_i - e_1) + \sum_{i=n+2}^{2n+1} \alpha_i (e_i - e_1) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$

Alors $\left(-\sum_{i=2}^{n} \alpha_i - \sum_{i=n+2}^{2n+1} \alpha_i\right) e_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=n+2}^{2n+1} \alpha_i e_i = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$. Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$ est libre :

$-\sum_{i=2}^{n} \alpha_i - \sum_{i=n+2}^{2n+1} \alpha_i = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha_{n+2} = \cdots = \alpha_{2n+1} = 0$. Ceci achève de montrer que $\mathcal{F}$

est une famille libre. Donc $\mathcal{F} = (e_2 - e_1, \ldots, e_n - e_1, e_{n+2} - e_1, \ldots, e_{2n+1} - e_1)$ est une base de

$\mathrm{Ker}\, f$ et de $SEP(f, 0)$.

Exercice $n \in [\![2, +\infty[\![$ et J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Diagonaliser J.

α et β sont deux réels. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diagonaliser A.

(*) Observons que $J^2 = nJ$. $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de J dont les zéros sont 0 et n. Alors $Sp\, J \subset \{0, n\}$.

Notons que $\operatorname{rg} J = 1 < n$. Alors J n'est pas inversible donc $\underline{0 \text{ est valeur propre de } J.}$

De plus $\dim SEP(J,0) = n - \operatorname{rg} J = n-1$. $\underline{\dim SEP(J,0) = n-1.}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$JX = 0 \iff x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \iff x_n = -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$.

$SEP(J,0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} \end{pmatrix} ; (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}$

Notons $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$SEP(J,0) = \{ x_1(E_1 - E_n) + x_2(E_2 - E_n) + \cdots + x_{n-1}(E_{n-1} - E_n) ; (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \}$

$SEP(J,0) = \operatorname{Vect}(E_1 - E_n, E_2 - E_n, \ldots, E_{n-1} - E_n)$.

$\mathcal{B}_1 = (E_1 - E_n, E_2 - E_n, \ldots, E_{n-1} - E_n)$ est une famille génératrice de cardinal $n-1$ de $SEP(J,0)$ qui est de dimension $n-1$.

$\underline{\mathcal{B}_1 = (E_1 - E_n, E_2 - E_n, \ldots, E_{n-1} - E_n) \text{ est une base de } SEP(J,0).}$

Regardons si n est valeur propre de J.

$JX = nX \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n x_1 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n x_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n x_1 \\ n x_1 = n x_2 \\ n x_1 = n x_3 \\ \cdots \\ n x_1 = n x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_n \\ \text{et} \\ \underbrace{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}_{n x_1} = n x_1 \end{cases}$

$JX = nX \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Donc $\underline{n \in Sp\, J \text{ et } SEP(J,n) = \operatorname{Vect}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \underline{= \operatorname{Vect}(E_1 + E_2 + \cdots + E_n).}$

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(J,n)$.

$Sp(J) = \{0, n\}$ et $\dim SEP(J,0) + \dim SEP(J,n) = n-1+1 = n$.

Ainsi J est diagonalisable (ce qui n'est pas une surprise car J est symétrique et à coefficients réels).

- $SEP(J,0) \oplus SEP(J,n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{B}_1 = (E_1 - E_n, \dots, E_{n-1} - E_n)$ est une base de $SEP(J,0)$.
- $\mathcal{B}_2 = (E_1 + E_2 + \dots + E_n)$ est une base de $SEP(J,n)$.

Alors $\mathcal{B} = $ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$" est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J respectivement associés aux valeurs propres $0, 0, \dots, 0, n$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

1° $P = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} \\ \hline -1 \ \cdots \ -1 & 1\end{array}\right)$ 2° P est inversible comme matrice de passage.

3° $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(0, 0, \dots, 0, n)$.

(*) $A = (\alpha-\beta)I_n + \beta J$. donc $P^{-1}AP = (\alpha-\beta)P^{-1}I_nP + \beta P^{-1}JP$.

$P^{-1}AP = (\alpha-\beta)I_n + \beta\,\mathrm{Diag}(0,0,\dots,0,n) = (\alpha-\beta)\,\mathrm{Diag}(1,1,\dots,1) + \beta\,\mathrm{Diag}(0,0,\dots,0,n)$.

donc $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\alpha-\beta, \alpha-\beta, \dots, \alpha-\beta, \alpha-\beta+n\beta)$.

Ainsi A est diagonalisable

Notons que $Sp A = \{\alpha-\beta, \alpha-\beta+n\beta\}$ et que $\mathcal{B}$ est aussi une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\alpha-\beta, \alpha-\beta, \dots, \alpha-\beta, \alpha-\beta+n\beta$.

Remarque.. A est inversible si et seulement si $\alpha-\beta \neq 0$ et $\alpha-\beta+n\beta \neq 0$.

Exercice.. Calculer A^{-1} lorsque $\alpha-\beta \neq 0$ et $\alpha-\beta+n\beta \neq 0$ (on pourra calculer A^2 en fonction de A et I_n).

R.

EXERCICE 23

Exercice **N1** **Diagonalisation d'une matrice de rang 1...**

$n \in [\![2, +\infty[\![$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = \dfrac{i}{j}\cdot$ La matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ notons $C_j(A)$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de A et posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(A) = \dfrac{1}{j} U$.

Alors $\operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \operatorname{Vect}(U, \frac{1}{2}U, \frac{1}{3}U, \dots, \frac{1}{n}U) = \operatorname{Vect}(U)$.

donc $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \dim \operatorname{Vect}(U) = 1$ car $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Comme $\operatorname{rg} A = 1 < n$, A n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de A.

Mieux $\underline{0 \in \operatorname{Sp} A \text{ et } \dim SEP(A,0) = n-1}$.

Ainsi A ne peut pas avoir plus de deux valeurs propres et si A possède une valeur propre non nulle le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Remarque... ~~Autorisons nous à parler de Im A quelques instants, quelques instants~~ seulement... $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(U)$ et $AU \in \operatorname{Im} U$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $AU = \lambda U$!
Oublions...

Mais n'oublions pas de calculer AU. Posons $U' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix} = AU$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$ $u'_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{j} x_j = \sum_{j=1}^{n} i = n \times i$.

Alors $AU = nU$ et $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Donc n est valeur propre de A et U est un vecteur propre associé. Ce que nous avons dit plus haut nous permet d'affirmer que $\underline{\operatorname{Sp} A = \{0, n\}}$ et que $\dim SEP(A,n) = 1$.

Alors $\dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,n) = n-1+1 = n$. $\underline{A \text{ est diagonalisable}}$. En plus $\rightarrow$

Notons que $\underline{SEP(A,n) = \operatorname{Vect}(U) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}\right)}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$X \in SEP(A,0) \iff AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \times x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{j} x_j = i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} x_j$.

donc $X \in SEP(A,0) \iff \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} x_j = 0$. $\underline{SEP(A,0) \text{ est l'hyperplan d'équation } x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n = 0 \text{ dans la base canonique de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Exercice... Diagonaliser A.

R.

EXERCICE 24

Exercice **N1** **Diagonalisation d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

n est un entier supérieur ou égal à 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diagonaliser A.

Version 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$(A-\lambda I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_n = 0 \\ (1-\lambda)x_2 + x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ (1-\lambda)x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} + (1-\lambda)x_n = 0 \end{cases}.$$

1er cas. $\lambda = 1$.

$$(A-\lambda I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} x_n = 0 \\ \text{et} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = 0 \\ \text{et} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = 0 \\ \text{et} \\ x_{n-1} = -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-2} \end{cases}$$

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A-I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ -x_1-x_2-\cdots-x_{n-2} \\ 0 \end{pmatrix} ; (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2} \right\}.$$

$$\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A-I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{ x_1E_1 + \cdots + x_{n-2}E_{n-2} - (x_1+x_2+\cdots+x_{n-2})E_{n-1} ; (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2} \}$$

$$\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A-I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{ x_1(E_1-E_{n-1}) + \cdots + x_{n-2}(E_{n-2}-E_{n-1}) ; (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2} \}.$$

$$\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A-I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \operatorname{Vect}(E_1-E_{n-1}, E_2-E_{n-1}, \dots, E_{n-2}-E_{n-1}) \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}.$$

Ainsi 1 est valeur propre de A et $SEP(A,1) = \operatorname{Vect}(E_1-E_{n-1}, E_2-E_{n-1}, \dots, E_{n-2}-E_{n-1})$.

Posons $\forall k \in [\![1, n-2]\!]$, $X_k = E_k - E_{n-1}$ et $\mathcal{B}_1 = (X_1, X_2, \dots, X_{n-2})$.

$\mathcal{B}_1$ est une famille génératrice de $SEP(A,1)$. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k (E_k - E_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k E_k - \left(\sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k\right) E_{n-1}$.

Comme $(E_1, E_2, \dots, E_{n-1})$ est libre puisque $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il vient : $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k = 0$. Ce qui achève de montrer que $(X_1, X_2, \dots, X_{n-2})$ est libre.

Ainsi $\mathcal{B}_1 = (X_1, X_2, \dots, X_{n-2})$ est une base de $SEP(A,1)$. et $\dim SEP(A,1) = n-2$.

2ième cas.. $\lambda \neq 1$

$(A-\lambda I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ (1-\lambda)x_k + x_n = 0 \\ x_1 + \dots + x_{n-1} + (1-\lambda)x_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \frac{1}{\lambda-1} x_n \\ (n-1)\frac{1}{\lambda-1} x_n + (1-\lambda) x_n = 0 \end{cases}.$

$(A-\lambda I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \frac{1}{\lambda-1} x_n \\ 0 = \frac{1}{\lambda-1}\left[n-1-(\lambda-1)^2\right] x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \frac{1}{\lambda-1} x_n \\ \left[n-1-(\lambda-1)^2\right] x_n = 0. \end{cases}$

a) $n-1-(\lambda-1)^2 \neq 0$

$(A-\lambda I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} x_n = 0 \\ \text{et} \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \frac{1}{\lambda-1} x_n = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \iff X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

donc λ n'est pas valeur propre.

b) $n-1-(\lambda-1)^2 = 0$. Notons que 1) $\lambda \in \{\lambda_2, \lambda_3\}$ avec $\lambda_2 = 1+\sqrt{n-1}$ et $\lambda_3 = 1-\sqrt{n-1}$

2) $\lambda \neq 1$ ($\lambda = 1 \Rightarrow n-1 = 0 \Rightarrow n = 1$!).

Alors $(A-\lambda I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = \frac{1}{\lambda-1} x_n.$

Pas de doute λ est valeur propre de A et $SEP(A,\lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/(\lambda-1) \\ 1/(\lambda-1) \\ \vdots \\ 1/(\lambda-1) \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda-1 \end{pmatrix}\right).$

Ainsi $\lambda_2 = 1+\sqrt{n-1}$ est valeur propre de A et $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \sqrt{n-1} \end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,\lambda_2)$.

et $\lambda_3 = 1-\sqrt{n-1}$ est valeur propre de A et $\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -\sqrt{n-1} \end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,\lambda_3)$.

Finalement 1) $\underline{\underline{\mathrm{Sp}\,A = \{1, 1+\sqrt{n-1}, 1-\sqrt{n-1}\}}}$

2) $\dim SEP(A,1) + \dim SEP(A, 1+\sqrt{n-1}) + \dim SEP(A, 1-\sqrt{n-1}) = n-2+1+1 = n.$

<u>A est diagonalisable.</u> Normal pour une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Posons $X_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \sqrt{n-1} \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -\sqrt{n-1} \end{pmatrix}$. $\mathcal{B}_1 = (X_1, X_2, \dots, X_{n-2})$ est une base de $SEP(A,1)$,

$\mathcal{B}_2 = (X_{n-1})$ est une base de $SEP(A, 1+\sqrt{n-1})$, $\mathcal{B}_3 = (X_n)$ est une base de $SEP(A, 1-\sqrt{n-1})$ et

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,1) \oplus SEP(A, 1+\sqrt{n-1}) \oplus SEP(A, 1-\sqrt{n-1})$. Plus de doute :

$\mathcal{B} = $ " $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ " $= (X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $1, 1, \dots, 1$, $1+\sqrt{n-1}$, $1-\sqrt{n-1}$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

- $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & & \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 & & \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{n-1} & -\sqrt{n-1} \end{pmatrix}$. P est inversible comme matrice de passage

- $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1, 1+\sqrt{n-1}, 1-\sqrt{n-1})$.

(*) Version 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique $\hat{\mathcal{B}} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Posons $g = f - Id_E$ et $C = A - I_n$.

$M_{\hat{\mathcal{B}}}(g) = M_{\hat{\mathcal{B}}}(f - Id_E) = A - I_n = C$. De plus $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Im}\, g = g(E) = g(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)) = \mathrm{Vect}(g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_n))$.

$\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}(e_n, e_n, \dots, e_n, e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1}) = \mathrm{Vect}(e_n, e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1})$.

La famille $(e_n, e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1})$ est évidemment libre donc $\mathcal{B} = (e_n, e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1})$ est une base de $\mathrm{Im}\, g$. $\dim \mathrm{Im}\, g = 2$. Alors $\dim \mathrm{Ker}\, g = \dim E - \dim \mathrm{Im}\, g = n - 2 > 0$ $(n \geq 3)$.

Alors 0 est valeur propre de g et $\dim SEP\, g = n-2$.

$\forall k \in [\![1, n-2]\!]$, $g(e_k - e_{n-1}) = g(e_k) - g(e_{n-1}) = e_n - e_n = 0_E$. $\forall k \in [\![1, n-2]\!]$, $e_k - e_{n-1} \in \mathrm{Ker}\, g$.

$\hat{\mathcal{B}}_1 = (e_1 - e_{n-1}, e_2 - e_{n-1}, \dots, e_{n-2} - e_{n-1})$ est une famille d'éléments de $SEP(g, 0)$.

Montrons que cette famille est libre. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}$ tel que $\sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k (e_k - e_{n-1}) = 0_E$

Alors $\sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k e_k - \left(\sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k\right) e_{n-1} = 0_E$. La liberté de $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ donne :

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k = 0$. Ceci achève de montrer que $\hat{\mathcal{B}}_1$ est une famille libre de $SEP(g, 0)$. Son cardinal $n-2$ est la dimension de $SEP(g, 0)$; alors $\hat{\mathcal{B}}_1$ est une base de $SEP(g, 0)$.

Supposons que λ soit une valeur propre non nulle de g. Soit $x \in SEP(g,\lambda)$.

$g(x) = \lambda x$; $x = \frac{1}{\lambda} g(x) = g(\frac{1}{\lambda} x)$ donc $x \in \operatorname{Im} g$. Ainsi $SEP(g,\lambda) \subset \operatorname{Im} g$.

Notons que $\operatorname{Im} g$ est stable par g. Alors la restriction h de g à $\operatorname{Im} g$ peut être considérée comme un endomorphisme de $\operatorname{Im} g$.

Donc si λ est une valeur propre non nulle de g alors λ est une valeur propre non nulle de h et $SEP(g,\lambda) = SEP(h,\lambda)$. Idem dans les valeurs propres non nulle de h.
et réciproquement !

Posons $u = e_n$ et $v = e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1}$. Comme nous l'avons vu $\mathcal{B} = (u,v)$ est une base de $\operatorname{Im} g$.

$g(u) = g(e_n) = e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1} = v$ et $g(v) = g(e_1) + \dots + g(e_{n-1}) = (n-1)e_n = (n-1)u$.

Alors $h(u) = v$ et $h(v) = n-1u$ donc $M_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in Sp\, h \Leftrightarrow \lambda \in Sp \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & n-1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-\lambda)^2 - (n-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{n-1}$ ou $\lambda = -\sqrt{n-1}$

Notons que $\sqrt{n-1} \neq 0$ et $-\sqrt{n-1} \neq 0$. Les valeurs propres non nulles de h donc de g sont $\sqrt{n-1}$ et $-\sqrt{n-1}$. Ainsi $Sp\, g = \{0, \sqrt{n-1}, -\sqrt{n-1}\}$.

Soit $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Soit $w = xu + yv$ un élément de $\operatorname{Im} g$.

$w \in SEP(g, \varepsilon\sqrt{n-1}) \Leftrightarrow w \in SEP(h, \varepsilon\sqrt{n-1}) \Leftrightarrow h(w) = \varepsilon\sqrt{n-1}\, w \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon\sqrt{n-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$w \in SEP(g, \varepsilon\sqrt{n-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} (n-1)y = \varepsilon\sqrt{n-1}\, x \\ x = \varepsilon\sqrt{n-1}\, y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{n-1}{\varepsilon\sqrt{n-1}} y \\ x = \varepsilon\sqrt{n-1}\, y \end{cases}$.

Or $\frac{n-1}{\varepsilon\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n-1}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon\sqrt{n-1}}{\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{n-1}$.

Donc $w \in SEP(g, \varepsilon\sqrt{n-1}) \Leftrightarrow x = \varepsilon\sqrt{n-1}\, y$. Ainsi $SEP(g, \varepsilon\sqrt{n-1}) = \operatorname{Vect}(\varepsilon\sqrt{n-1}\, u + v)$.

$SEP(g, \varepsilon\sqrt{n-1}) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1} + \varepsilon\sqrt{n-1}\, e_n)$. $\dim SEP(g, \varepsilon\sqrt{n-1}) = 1$.

$Sp\, g = \{0, \sqrt{n-1}, -\sqrt{n-1}\}$ et $\dim SEP(g,0) + \dim SEP(g,\sqrt{n-1}) + \dim SEP(g,-\sqrt{n-1}) = n-2+1+1 = n = \dim E$.

Alors g est diagonalisable.

Posons $\forall k \in [\![1, n-2]\!]$, $t_k = e_k - e_{n-1}$, $t_{n-1} = e_1 + \cdots + e_{n-1} + \sqrt{n-1}\, e_n$ et $t_n = e_1 + \cdots + e_{n-1} - \sqrt{n-1}\, e_n$.

. $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$ est une base de $SEP(g, 0)$;

. (t_{n-1}) est une base de $SEP(g, \sqrt{n-1})$;

. (t_n) est une base de $SEP(g, -\sqrt{n-1})$;

. $E = SEP(g,0) \oplus SEP(g, \sqrt{n-1}) \oplus SEP(g, -\sqrt{n-1})$.

Alors $\hat{\mathcal{B}}' = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de g respectivement associés aux valeurs propres $0, 0, \ldots, 0, \sqrt{n-1}$ et $-\sqrt{n-1}$.

Rappelons que $g = f - Id_E$. Alors $f = g + Id_E$.

$\forall k \in [\![1, n-2]\!]$, $f(t_k) = g(t_k) + t_k = t_k$; $f(t_{n-1}) = g(t_{n-1}) + t_{n-1} = (1 + \sqrt{n-1})\, t_{n-1}$ et $f(t_n) = g(t_n) + t_n = (1 - \sqrt{n-1})\, t_n$.

Alors $\hat{\mathcal{B}}' = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $1, 1, \ldots, 1, 1+\sqrt{n-1}, 1-\sqrt{n-1}$).

Rappelons que $\hat{\mathcal{B}}' = (e_1 - e_{n-1}, e_2 - e_{n-1}, \ldots, e_{n-2} - e_{n-1}, e_1 + \cdots + e_{n-1} + \sqrt{n-1}\, e_n, e_1 + \cdots + e_{n-1} - \sqrt{n-1}\, e_n)$.

En revenant aux matrices nous pouvons dire que :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \sqrt{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -\sqrt{n-1} \end{pmatrix} \right)$$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $1, 1, \ldots, 1, 1+\sqrt{n-1}, 1-\sqrt{n-1}$.

Nous retrouvons ainsi le résultat obtenu dans la version 1.

R

EXERCICE 25

Exercice **N1** **Diagonalisation d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ D'après l'oral ESCP 1996 1.17.**

n est un élément de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 4. a et b sont deux complexes non nuls.

A est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ égale à $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & a \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \\ a & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

On pourra donner une méthode directe et une méthode qui utilise l'image d'un endomorphisme associé.

Version 1.. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a x_1 + b \sum_{k=2}^{n-1} x_k + a x_n = \lambda x_1 \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!],\ a x_1 + a x_n = \lambda x_k \\ a x_1 + b \sum_{k=2}^{n-1} x_k + a x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} a x_1 + b \sum_{k=2}^{n-1} x_k + a x_n = \lambda x_1 \\ a x_1 + a x_n = \lambda x_2 = \lambda x_3 = \dots = \lambda x_{n-1} \\ \lambda x_1 = \lambda x_n \end{cases}$$

1er cas.. $\lambda = 0$

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a x_1 + b \sum_{k=2}^{n-1} x_k + a x_n = 0 \\ a(x_1 + x_n) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \underset{b \neq 0}{\overset{a \neq 0}{\iff}} \begin{cases} x_1 + x_n = 0 \\ \sum_{k=2}^{n-1} x_k = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = -x_1 \\ x_{n-1} = -\sum_{k=2}^{n-2} x_k \end{cases}.$$

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Posons $T = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$

pour éviter Ker A...

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ -x_2 - x_3 - \dots - x_{n-2} \\ -x_1 \end{pmatrix} ; (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n-2} \right\}$$

$$T = \{ x_1(E_1 - E_n) + x_2(E_2 - E_{n-1}) + \dots + x_{n-2}(E_{n-2} - E_{n-1}) ; (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n-2} \}.$$

$T = \mathrm{Vect}(E_1 - E_n, E_2 - E_{n-1}, \dots, E_{n-2} - E_{n-1})$. $T \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$ donc

0 est valeur propre de A et $\mathrm{SEP}(A, 0) = \mathrm{Vect}(E_1 - E_n, E_2 - E_{n-1}, \dots, E_{n-2} - E_{n-1})$.

$\mathcal{B}_1 = (E_1 - E_n, E_2 - E_{n-1}, \dots, E_{n-2} - E_{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathrm{SEP}(A, 0)$.

Montrons que cette famille est libre. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n-2}$ tel que

$$\alpha_1(E_1 - E_n) + \sum_{k=2}^{n-2} \alpha_k (E_k - E_{n-1}) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}.$$

Alors $\alpha_1 E_1 + \sum_{\ell=2}^{n-2} \alpha_\ell E_\ell + \left(-\sum_{k=2}^{n-2} \alpha_k\right) E_{n-1} - \alpha_1 E_n = 0$.

La liberté de $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ suffit alors pour dire que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-2} = 0$.

ceci achève de montrer que la famille $\mathcal{B}_1$ est libre.

Ainsi $\mathcal{B}_1 = (E_1 - E_n, E_2 - E_{n-1}, \dots, E_{n-2} - E_{n-1})$ est une base de $SEP(A,0)$.

Alors $\underline{\underline{\dim SEP(A,0) = n-2}}$. Normal pour l'intersection de deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel de dimension n.

<u>2ème cas</u>.. $\lambda \neq 0$

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a x_1 + b \sum_{\ell=2}^{n-1} x_\ell + a x_n = \lambda x_1 \\ x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = \frac{a}{\lambda}(x_1 + x_n) \\ x_1 = x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = x_1 \\ x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = \frac{2a}{\lambda} x_1 \\ a x_1 + b \times (n-2) \times \frac{2a}{\lambda} x_1 + a x_1 = \lambda x_1 \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_n = x_1 \\ x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = \frac{2a}{\lambda} x_1 \\ (\lambda^2 - 2a\lambda - 2(n-2)ab) x_1 = 0 \end{cases}$$

<u>a)</u> $\lambda^2 - 2a\lambda - 2(n-2)ab \neq 0$

Alors $AX = \lambda X \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \iff X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. λ n'est pas valeur propre de A.

<u>b)</u> $\lambda^2 - 2a\lambda - 2(n-2)ab = 0$. $(*)$

Alors $AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_n = x_1 \\ x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = \frac{2a}{\lambda} x_1 \end{cases}$

Ainsi λ est valeur propre de A et $SEP(A,\lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ 2a \\ \vdots \\ 2a \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$. $\underline{\underline{\dim SEP(A,\lambda) = 1}}$.

Notons si $\lambda^2 - 2a\lambda - 2(n-2)ab = 0$ alors $\lambda \neq 0$ car $2(n-2)ab \neq 0$.

Notons également que le discriminant de $(*)$ est $4a^2 + 4 \times 2(n-2)ab$

$4a^2+4\times 2\times(n-2)ab=0 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a+2(n-2)b=0 \Leftrightarrow a=-2(n-2)b$.

1er Cas. $a=-2(n-b)$.

(*) admet une solution et une seule λ_1 $(\lambda_1=a)$. $\lambda_1\neq 0$.

Alors $Sp(A)=\{0,\lambda_1\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\lambda_1)=n-2+1=n-1\neq n$.

A n'est pas diagonalisable.

2ème Cas. $a\neq -2(n-2)$

(*) admet deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 nécessairement non nulles.

Alors $Sp A=\{0,\lambda_1,\lambda_2\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\lambda_1)+\dim SEP(A,\lambda_2)=n-2+1+1=n$.

Donc A est diagonalisable.

Finalement A est diagonalisable si et seulement si $a=-2(n-2)b$.

Version 2. Posons $E=\mathbb{C}^n$. Soit $B=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans B.

$\mathrm{Im} f=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_n))=\mathrm{Vect}(a(e_1+e_2+\dots+e_n), be_1+be_n,\dots, be_1+be_n, a(e_1+e_2+\dots+e_n))$.

comme a et b ne sont pas nuls $\mathrm{Im} f=\mathrm{Vect}(e_1+e_2+\dots+e_n, e_1+e_n)$.

$\mathrm{Im} f=\mathrm{Vect}(e_1+e_n, e_2+\dots+e_{n-1})$. La famille $(e_1+e_n, e_2+\dots+e_{n-1})$ étant clairement libre $\dim \mathrm{Im} f=2$. Alors $\dim \mathrm{Ker} f=\dim E-\dim \mathrm{Im} f=n-2$ et $n-2>0$.

Alors 0 est valeur propre de f et $\dim SEP(f,0)=n-2$.

Supposons que λ soit une valeur propre non nulle de f. Soit $x\in SEP(f,\lambda)$.

$f(x)=\lambda x$ donc $x=\frac{1}{\lambda}f(x)=f(\frac{1}{\lambda}x)\in \mathrm{Im} f$. Ainsi $SEP(f,\lambda)\subset \mathrm{Im} f$.

Notons que $\mathrm{Im} f$ est stable par f. Soit g l'application de $\mathrm{Im} f$ dans $\mathrm{Im} f$ définie par

$\forall x\in \mathrm{Im} f$, $g(x)=f(x)$. g est un endomorphisme de $\mathrm{Im} f$.

Donc si λ est une valeur propre non nulle de f, λ est une valeur propre non nulle de g et

$SEP(f,\lambda)=SEP(g,\lambda)$ et réciproquement. Posons $u=e_1+e_n$ et $v=e_2+e_3+\dots+e_{n-1}$.

$B'=(u,v)$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

$g(u)=f(u)=f(e_1)+f(e_n)=2a\sum_{k=1}^{n}e_k=2a(u+v)$.

$g(v)=f(v)=\sum_{k=2}^{n-1}f(e_k)=\sum_{k=2}^{n-1}b(e_1+e_n)=(n-2)b\,u$.

Alors la matrice A' de g dans B' est $\begin{pmatrix}2a & (n-2)b\\ 2a & 0\end{pmatrix}$. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$\lambda\in Sp\,g \Leftrightarrow \lambda\in Sp\,A' \Leftrightarrow A'-\lambda I_2 \text{ non inversible} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}2a-\lambda & (n-2)b\\ 2a & -\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-2a\lambda-2(n-2)ab=0 \quad (*)$$

0 n'est pas solution de $(*)$ car $2(n-2)ab\neq 0$. Le discriminant de $(*)$ est $\Delta=4a^2+8(n-2)ab$.

$\Delta=0 \Leftrightarrow 4a^2=-8(n-2)ab \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a=-2(n-2)b$.

<u>1er cas</u> : $a=-2(n-2)b$. $(*)$ admet une solution et une seule λ_1 $(\lambda_1=a)$.

$Sp\,g=\{\lambda_1\}$. Supposons que $\dim SEP(g,\lambda_1)=2$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}(g-\lambda_1 Id_{\mathrm{Im} f})=2=\dim \mathrm{Im} f$. Donc $g=\lambda_1 Id$ car

Alors $\mathrm{Ker}(g-\lambda_1 Id_{\mathrm{Im} f})=\mathrm{Im} f$. Donc $g-\lambda_1 Id_{\mathrm{Im} f}=0_{\mathcal{L}(\mathrm{Im} f)}$. $g=\lambda_1 Id_{\mathrm{Im} f}$.

Par conséquent $A'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ or $A'=\begin{pmatrix}2a & (n-2)b\\ 2a & 0\end{pmatrix}$ et $a\neq 0$.

Donc $\dim SEP(g,\lambda_1)\neq 2$. Alors $\dim SEP(g,\lambda_1)=1$.

Alors $Sp\,f=\{0,\lambda_1\}$ et $\dim SEP(f,0)+\dim SEP(f,\lambda_1)=\dim SEP(f,0)+\dim SEP(g,\lambda_1)=n-2+1=n-1$

Donc f n'est pas diagonalisable.

<u>2ème cas</u> : $a\neq -2(n-2)b$. $(*)$ admet deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 nécessairement non nulle. Alors $Sp\,g=\{\lambda_1,\lambda_2\}$ et $\dim SEP(g,\lambda_1)=\dim SEP(g,\lambda_2)=1$.

Alors $Sp\,f=\{0,\lambda_1,\lambda_2\}$ et $\dim SEP(f,0)+\dim SEP(f,\lambda_1)+\dim SEP(f,\lambda_2)=$

$\dim SEP(f,0)+\dim SEP(g,\lambda_1)+\dim SEP(g,\lambda_2)=n-2+1+1=n=\dim E$. f est diagonalisable.

Ainsi <u>A diagonalisable $\Leftrightarrow$ f diagonalisable $\Leftrightarrow$ $a\neq -2(n-2)b$.</u>

1 **EXERCICE 26** p1

Exercice **Réécriture d'un exercice de l'oral ESCP 2009.**

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$.

Pour simplifier les écriture on pourra poser $c_n = \dfrac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$.

Q1. Justifier en une ligne que A est diagonalisable.

Q2. a) Montrer que A est de rang 2. En déduire que 0 est valeur propre de A.

b) Donner une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

Q3. $E = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

a) On pose $u = e_n$ et $v = \sum_{k=1}^{n-1} k\, e_k$ (oui $n-1$! !). Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

b) Montrer que $\operatorname{Im} f$ est stable par f.

c) Soit g l'endomorphisme de $\operatorname{Im} f$ défini par $\forall x \in \operatorname{Im} f,\ g(x) = f(x)$. Trouver la matrice M de g dans la base $\mathcal{B}'$.

d) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de g.

Q4. Utiliser tout ce qui précède pour diagonaliser A.

Q1 A est une matrice symétrique, d'ordre n, à coefficients réels.

Ainsi **A est diagonalisable**

Q2 a) Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, notons $C_j(A)$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de A.

$\forall j \in [\![2,n-1]\!]$, $C_j(A) = j\, C_1(A)$.

Alors $\operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \ldots, C_n(A)) = \operatorname{Vect}(C_1(A), C_n(A))$.

Montrons que la famille $(C_1(A), C_n(A))$ est libre.

Soit (α, β) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha C_1(A) + \beta C_n(A) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \\ \vdots \\ (n-1)\beta \\ \alpha + n\beta \end{pmatrix}$; $\beta = \alpha + n\beta = 0$; $\alpha = \beta = 0$.

Donc $(C_1(A), C_n(A))$ est libre.

Alors $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \ldots, C_n(A)) = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), C_n(A)) = 2$. **$\operatorname{rg} A = 2$.**

$\mathrm{rg}\, A = 2 < n$; A n'est pas inversible. Alors **0 est valeur propre de A.**

donc $\dim SEP(A,0) = n - \mathrm{rg}(A - 0.I_n) = n - \mathrm{rg}\, A = n-2$. **donc $\dim SEP(A,0) = n-2$.**

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} x_n = 0 \\ 2x_n = 0 \\ \\ (n-1)x_n = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = 0 \\ \\ x_1 = -2x_2 - 3x_3 - \cdots - (n-1)x_{n-1} \end{cases}$$

$$SEP(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 - \cdots - (n-1)x_{n-1} \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} ; (x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} \right\}$$

$$SEP(A,0) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_{n-1} \begin{pmatrix} -(n-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; (x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} \right\}.$$

$$SEP(A,0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -(n-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(E_2 - 2E_1, E_3 - 3E_1, \ldots, E_{n-1} - (n-1)E_1)$$

où $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Posons **$\forall k \in [\![1, n-2]\!]$, $X_k = E_{k+1} - (k+1)E_1$.**

$SEP(A,0) = \mathrm{Vect}(X_1, X_2, \ldots, X_{n-2})$. $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-2})$ est donc une famille génératrice de cardinal $n-2$ de $SEP(A,0)$ qui est de dimension $n-2$.

Ainsi **$(X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}) = (E_2 - 2E_1, E_3 - 3E_1, \ldots, E_{n-1} - (n-1)E_1)$ est une base de $SEP(A,0)$.**

Q3 a) • $u = e_n = f(e_1)$ donc $u \in \mathrm{Im} f$.

• $v = \sum_{k=1}^{n-1} k e_k = \sum_{k=1}^{n} k e_k - n e_n = f(e_n) - n f(e_1) = f(e_n - n e_1)$

donc $v \in \mathrm{Im} f$.

- Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha u+\beta v=0_E$.

  $\alpha e_n+\sum_{k=1}^{n-1}(\beta k)e_k=0$. Alors $\alpha=0=\beta$ car $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est libre.

  Ainsi (u,v) est une famille libre de $\mathrm{Im} f$.

  $\mathrm{rg} f=\mathrm{rg} A=2$ donc $\dim \mathrm{Im} f=2$.

  Alors $\underline{\underline{\mathcal{B}'=(u,v) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f.}}$

b) $\mathrm{Im} f\subset E$ donc $f(\mathrm{Im} f)\subset f(E)=\mathrm{Im} f$. $f(\mathrm{Im} f)\subset \mathrm{Im} f$.

$\underline{\underline{\mathrm{Im} f \text{ est stable par } f.}}$

c) $f(u)=f(e_n)=\sum_{k=1}^{n}k e_k=\sum_{k=1}^{n-1}k e_k+n e_n=nu+v$.

$f(v)=f\left(\sum_{k=1}^{n-1}k e_k\right)=\sum_{k=1}^{n-1}k f(e_k)=\sum_{k=1}^{n-1}k(k e_n)=\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)e_n=\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}u$

$\underline{\underline{f(u)=nu+v \text{ et } f(v)=c_n u \text{ où } c_n=\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}.}}$

La matrice M de g dans la base $\mathcal{B}'$ est : $\begin{pmatrix} n & c_n \\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $w=xu+yv$ un élément de $\mathrm{Im} f$.

$g(w)=\lambda w \iff \begin{pmatrix} n & c_n \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \iff \begin{cases}(n-\lambda)x+c_n y=0\\ x=\lambda y\end{cases}$

$g(w)=\lambda w \iff \begin{cases} x=\lambda y\\ ((n-\lambda)\lambda+c_n)y=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=\lambda y\\ (-\lambda^2+n\lambda+c_n)y=0\end{cases}$

<u>1er cas</u> : $-\lambda^2+n\lambda+c_n\neq 0$

$g(w)=\lambda w \iff \begin{cases} y=0\\ x=0\end{cases} \iff w=0_E$. λ n'est pas valeur propre.

<u>2e cas</u> : $-\lambda^2+n\lambda+c_n=0$.

$g(w)=\lambda w \iff x=\lambda y$. Alors λ est valeur propre de g et

$SEP(g,\lambda)=\mathrm{Vect}(\lambda u+v)$.

Notons que $-\lambda^2+n\lambda+c_n=0 \iff \lambda^2-n\lambda-c_n=0 \iff \left(\lambda-\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}+c_n$.

$$-\lambda^2+n\lambda+c_n=0 \iff \lambda=\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+c_n} \text{ ou } \lambda=\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}+c_n}.$$

Notons que $\sqrt{\frac{n^2}{4}+c_n}=\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}}=\sqrt{\frac{n}{12}(3n+2(n-1)(2n-1))}$.

$$\sqrt{\frac{n^2}{4}+c_n}=\sqrt{\frac{n}{12}(4n^2-3n+2)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n(4n^2-3n+2)}{3}}.$$

Finalement $Sp\, g=\{\lambda_1,\lambda_2\}$ avec $\lambda_1=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n(4n^2-3n+2)}{3}}$ et

$\lambda_2=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n(4n^2-3n+2)}{3}}$. Notons que $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_1\neq 0$ et $\lambda_2\neq 0$.

$SEP(g,\lambda_1)=Vect(\lambda_1 u+v)$ et $SEP(g,\lambda_2)=Vect(\lambda_2 u+v)$.

(Q5) Posons $t_1=\lambda_1 u+v$ et $t_2=\lambda_2 u+v$. t_1 (resp. t_2) est un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ_1 (resp. λ_2).

Alors $t_1\neq 0$, $t_2\neq 0$, $f(t_1)=g(t_1)=\lambda_1 t_1$ et $f(t_2)=g(t_2)=\lambda_2 t_2$.

Ainsi λ_1 (resp. λ_2) est une valeur propre de f et t_1 (resp. t_2) en est un vecteur propre associé.

0 n'est pas une racine de l'équation $\lambda\in\mathbb{R}$ et $-\lambda^2+n\lambda+c_n=0$.

Donc $\lambda_1\neq 0$ et $\lambda_2\neq 0$. Alors 0, λ_1 et λ_2 sont trois valeurs propres de f deux à deux distinctes. De plus : $\dim SEP(f,0)=\dim \operatorname{Ker} f=n-2$ car $rg\, f=2$.

$$n=\dim E\geqslant \dim SEP(f,0)+\dim SEP(f,\lambda_1)+\dim SEP(f,\lambda_2)\geqslant(n-2)+1+1$$

Finalement $\dim SEP(f,0)+\dim SEP(f,\lambda_1)+\dim SEP(f,\lambda_2)=n=\dim E$

Alors $Sp\, f=\{0,\lambda_1,\lambda_2\}$, f est diagonalisable (ce que l'on savait déjà) et $\dim SEP(f,\lambda_1)=\dim SEP(f,\lambda_2)=1$.

Alors $Sp\, A=\{0,\lambda_1,\lambda_2\}$. Soit X_{n-1} la matrice de t_1 dans la base $\mathcal{B}$ et X_n la matrice de t_2 dans $\mathcal{B}$. $t_1=\lambda_1 u+v=\lambda_1 e_n+\sum_{k=1}^{n-1} k e_k$ et $t_2=\lambda_2 u+v=\lambda_2 e_n+\sum_{k=1}^{n-1} k e_k$. $X_{n-1}=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n-1\\\lambda_1\end{pmatrix}$ et $X_n=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n-1\\\lambda_2\end{pmatrix}$.

- $(X_1, X_2, \dots, X_{n-2})$ est une base de $SEP(A,0)$
- (X_{n-1}) est une base de $SEP(A,\lambda_1)$
- (X_n) est une base de $SEP(A,\lambda_2)$
- $M_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,0) \oplus SEP(A,\lambda_1) \oplus SEP(A,\lambda_2)$.

Alors $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $0, 0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. 1) P est inversible

et $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(0, 0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$.

3) Précisons P. Rappelons que $\forall k \in [\![1, n-2]\!]$, $X_k = E_{k+1} - (k+1)E_1$.
De plus $X_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$. Alors $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \\ & & & 1 & n-1 & n-1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Remarque.- le texte original demandait au niveau de sa cinquième question de montrer que $A^2 = nA + c_n I_n$.
Ce résultat est évidemment grossièrement faux. Si c'était le cas $X^2 - nX + c_n$ serait un polynôme annulateur de A. Ainsi 0, λ_1 et λ_2 seraient trois zéros distincts de ce polynôme du second degré !

On a sans doute confondu A et $M_{\mathcal{B}}(g)$.

Exercice	N1$^+$	**Matrice compagnon.**

a_0, a_1, ..., a_{n-1} sont n nombres complexes ($n \geqslant 2$).

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que les valeurs propres de A sont les racines du polynôme $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

On aura intérêt à passer par la transposée de A.

Thème abordé dans LYON MI 2006 Pb 2, oral ESCP 2000 2-11. Apparaît aussi dans oral ESCP 2004 2.2, 2011 2.10 (ou presque).

Remarques 1.. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $\lambda \in \mathrm{Sp}\,A \iff A - \lambda I_n$ non inversible $\iff {}^t(A-\lambda I_n)$ non inversible.

$\lambda \in \mathrm{Sp}\,A \iff {}^tA - \lambda I_n$ non inversible $\iff \lambda \in \mathrm{Sp}\,{}^tA$.

Ainsi $\mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\,{}^tA$.

2.. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,A$.

$\dim SEP(A,\lambda) = n - \mathrm{rg}(A-\lambda I_n) = n - \mathrm{rg}\,{}^t(A-\lambda I_n) = n - \mathrm{rg}({}^tA - \lambda I_n) = \dim SEP({}^tA,\lambda)$.

$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,{}^tA$, $\dim SEP(A,\lambda) = \dim SEP({}^tA,\lambda)$.

3.. $\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}A} \dim SEP(A,\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} \dim SEP({}^tA,\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}{}^tA} \dim SEP({}^tA,\lambda)$. Ainsi A est diagonalisa

Ainsi A est diagonalisable si et seulement si ${}^tA$ est diagonalisable.

4. ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$${}^tAX = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - \cdots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ -a_0 x_1 - a_1 \lambda x_1 - \cdots - a_{n-1}\lambda^{n-1} x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k = \lambda^{k-1} x_1 \\ \text{et} \\ P(\lambda) x_1 = 0 \end{cases}.$$

<u>1er cas..</u> $P(\lambda) \neq 0$

$${}^tAX = \lambda X \iff \begin{cases} \forall k \in [\![2,n]\!],\ x_k = \lambda^{k-1} x_1 \\ x_1 = 0 \end{cases} \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k = 0 \iff X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}.$$

Alors λ n'est pas valeur propre de ${}^tA$.

<u>2ème cas..</u> $P(\lambda) = 0$

$${}^tAX = \lambda X \iff \forall k \in [\![2,n]\!],\ x_k = \lambda^{k-1} x_1.$$

Alors 1) λ est valeur propre de ${}^tA$.

2) $SEP({}^tA, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}\right)$ donc $\dim SEP({}^tA, \lambda) = 1$.

Finalement $Sp\,{}^tA = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid P(\lambda) = 0\}$ et les sous-espaces propres de ${}^tA$ sont de dimension 1.

Ces remarques permettent de dire que :

→ <u>les valeurs propres de A sont les racines du polynôme $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.</u>

→ <u>les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.</u>

Le second point montre que A est diagonalisable si et seulement si A possède n valeurs propres deux à deux distinctes. Le premier point permet alors de dire que <u>A est diagonalisable si et seulement si le polynôme $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ a exactement n racines deux à deux distinctes.</u>

EXERCICE 28

Exercice **N1** **ESCP 1995 1.17**

$n = 2p - 1$ avec p élément de $[\![2, +\infty[\![$. $E = \mathbb{C}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de E. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{C}$. u est l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} & & & a_n \\ & (0) & a_{n-1} & \\ & \iddots & & \\ & a_2 & (0) & \\ a_1 & & & \end{pmatrix}.$$

C'est à dire que $A = (a_{ij})$ avec $a_{n-k+1,k} = a_k$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et 0 autrement

Q1. Calculer $u(e_k)$ pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$.

Q2. Montrer que e_p est un vecteur propre de u. On pose $D_p = \mathrm{Vect}(e_p)$.

Q3. k est un élément de $[\![1, p-1]\!]$. Montrer que le $P_k = \mathrm{Vect}(e_k, e_{n+1-k})$ est stable par u. Montrer que la restriction u_k de u à P_k est un endomorphisme diagonalisable de P_k.

Q4. Montrer que u est diagonalisable.

Q5. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. B est-elle diagonalisable ? Et la matrice B^2.

Dans une QSP ESCP 2010 on trouve $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & (0) & 1 & \\ & \iddots & & \\ & 1 & (0) & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ *($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sans indication sur n...)*

Q1 Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Soit X (resp. Y) la matrice de e_k (resp. $u(e_k)$) dans $\mathcal{B}$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = a_{i,k} = \begin{cases} a_k & \text{si } i = n-k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\underline{u(e_k) = a_k e_{n-k+1}}$ et ceci pour tout k dans $[\![1,n]\!]$.

Q2 $e_p \neq 0_E$ et $u(e_p) = a_p e_{n-p+1} = a_p e_{2p-1-p+1} = a_p e_p$.

Donc e_p est un vecteur propre de u associé à la valeur propre a_p.

Soit $k \in [\![1,p-1]\!]$.

Q3 $u(e_k) = a_k e_{n-k+1}$ et $u(e_{n+1-k}) = a_{n+1-k}\, e_{n-(n+1-k)+1} = a_{n+1-k}\, e_k$.

$u(e_k) = a_k e_{n+1-k}$ et $u(e_{n+1-k}) = a_{n+1-k} e_k$.

$u(P_k) = u(\mathrm{Vect}(e_k, e_{n+1-k})) = \mathrm{Vect}(u(e_k), u(e_{n+1-k})) = \mathrm{Vect}(a_k e_{n+1-k}, a_{n+1-k} e_k)$.

Or $a_k \neq 0$ et $a_{n+1-k} \neq 0$. Donc $u(P_k) = \mathrm{Vect}(e_{n+1-k}, e_k) = P_k$. P_k est stable par u.

une inclusion suffisait...

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre donc la famille $\mathcal{B}_k = (e_k, e_{n+1-k})$ est libre $(k \neq n+1-k$ car $k \neq p)$.
C'est donc une base de P_k. Ainsi P_k est de dimension 2.
Soit u_k l'application de P_k dans P_k définie par $\forall x \in P_k,\ u_k(x) = u(x)$.

u_k est un endomorphisme de P_k, $u_k(e_k) = u(e_k) = a_k e_{n+1-k}$ et $u_k(e_{n+1-k}) = u(e_{n+1-k}) = a_{n+1-k} e_k$.

La matrice de u_k dans $\mathcal{B}_k = (e_k, e_{n+1-k})$ est $A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1-k} \\ a_k & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\lambda \in Sp_{A_k} \Leftrightarrow \lambda \in Sp\, A_k \Leftrightarrow A_k - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a_{n+1-k} \\ a_k & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - a_k a_{n+1-k} = 0$.

$a_k a_{n+1-k} \neq 0$ donc l'équation $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda^2 - a_k a_{n+1-k} = 0$ a deux solutions distinctes. Alors u_k admet deux valeurs propres distinctes et u_k est un endomorphisme de P_k qui est de dimension 2. Alors u_k est diagonalisable.

<u>Pour tout k dans $⟦1, p-1⟧$, la restriction u_k de u à P_k est un endomorphisme diagonalisable.</u>

(Q4) <u>Rappel</u>.. Soit $F_1, F_2, \dots, F_r$ r sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ de dimensions non nulles.
Pour tout k dans $⟦1, r⟧$ soit $\mathcal{B}_k$ une base de F_k.

$\mathbb{C}^n = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r \Leftrightarrow$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$" est une base de $\mathbb{C}^n$.

Pour tout k dans $⟦1, p-1⟧$, $\mathcal{B}_k = (e_k, e_{n+1-k})$ est une base de P_k et $\mathcal{B}_p = (e_p)$ est une base de D_p.

Or "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{p-1} \cup \mathcal{B}_p$" $= (e_1, e_n, e_2, e_{n-1}, \dots, e_{p-1}, \underbrace{e_{n+1-(p-1)}}_{= e_{p+1}}, e_p)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ car $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

Alors le rappel permet de dire que $\underline{E = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_{p-1} \oplus D_p}$.

Soit $k \in ⟦1, p-1⟧$. u_k est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B}'_k$ de P_k constituée de vecteurs propres de u_k donc de vecteurs propres de u.

Rappelons que $\mathcal{B}_p = (e_p)$ est une base de D_p et que e_p est un vecteur propre de u.

Comme $\mathbb{C}^n = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_{p-1} \oplus D_\lambda$ le rappel montre que $\mathcal{B}' = "\mathcal{B}'_1 \cup \mathcal{B}'_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}'_{p-1} \cup \mathcal{B}_p"$ est une base de $\mathbb{C}^n$. Mieux c'est une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de u. $\underset{\text{ici}}{\uparrow}\ \mathcal{B}_p$

Alors u est diagonalisable.

Q5 Notons que $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

Notons aussi que B est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. $Sp\, B = \{0, 1\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$!

$BX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$. $SEP(B, 0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$BX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = x \\ y = y \\ 0 = z \end{cases} \Leftrightarrow x = z = 0$. $SEP(B, 1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$Sp\, B = \{0, 1\}$ et $\dim SEP(B, 0) + \dim SEP(B, 1) = 1 + 1 = 2 \neq 3$. B n'est pas diagonalisable. (*)

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. B^2 est diagonale donc B^2 est diagonalisable. (**)

(*) Tout cela pour dire que le résultat de Q4 ne vaut plus sans l'hypothèse $\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k \neq 0$!

(**) Tout cela pour dire qu'une matrice non diagonalisable peut avoir un carré diagonalisable !

PREMIER PROBLÈME

On note n un entier naturel, $n \geqslant 2$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, I l'identité de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

1. a) Exprimer $f \circ f$ en fonction de I et de n.
   b) En déduire que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, et calculer f^{-1} en fonction de f.

2. Écrire la matrice de f relativement à B.

3. Dans cette question uniquement, on suppose n = 5. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ; f est-il diagonalisable ?

4. On revient au cas général.
   a) Pour tout entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}]$ et tout réel λ, calculer $f(e_k + \lambda e_{n-k+1})$.
   b) Montrer que, pour chaque entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}[$, il existe deux réels distincts a_k et b_k, que l'on calculera, tels que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f. Examiner le cas où $2k = n + 1$.
   c) Montrer que f est diagonalisable.

Message perso :

C'est encore pour toi mon Archag. Mais là je fais un gros effort. C'est de l'algèbre linéaire de Lyon !!
Faire ça est aussi jouissif que de sortir avec Arlette Chabaud. Bon, j'avale mon Viagra et je m'y colle... pas à Arlette, à l'exo tu penses bien !
En plus c'est de la réduction ça peut pas faciliter la chose.

Nous poserons $E = \mathbb{R}^n$ et $I = Id_E$

Q1 a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$ et $f(e_{n-k+1}) = 2^{n-k+1-1} e_{n-(n-k+1)+1}$

$f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$ et $f(e_{n-k+1}) = 2^{n-k} e_k$.

Alors $f^2(e_k) = 2^{k-1} f(e_{n-k+1}) = 2^{k-1} 2^{n-k} e_k = 2^{n-1} e_k = 2^{n-1} Id_E(e_k)$

Ainsi les deux endomorphismes f^2 et $2^{n-1} Id_E$ de E coïncident sur la base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Ils sont égaux. $f^2 = 2^{n-1} Id_E$.

b) $f^2 = 2^{n-1} Id_E$ donc $\left(\frac{1}{2^{n-1}} f\right) \circ f = f \circ \left(\frac{1}{2^{n-1}} f\right) = Id_E$.

Alors 1) f est bijectif 2) $f^{-1} = \frac{1}{2^{n-1}} f$.

f est un isomorphisme de E, ce qui doit rigoureusement s'appeler un automorphisme de E

$f^{-1} = \frac{1}{2^{n-1}} f$.

Q2 $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$

$$\begin{pmatrix} (0) & & 2^{n-1} \\ & 2^{n-2} \quad \diagup & \\ 1 \quad 2 & & (0) \end{pmatrix}$$

Q3 $f^2 = 2^{5-1}\,Id_E$; $x^2 - 2^4$ est un polynôme annulateur de f.

Ainsi $Sp\,f \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 16 = 0\} = \{-4, 4\}$.

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 + ve_5$ un élément de E.

$$f(u) = 4u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 16v = 4x \\ 8t = 4y \\ 4z = 4z \\ 2y = 4t \\ x = 4v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4v \\ y = 2t \end{cases}.$$

Alors $4 \in Sp\,f$.

De plus $SEP(f,4) = \{4ve_1 + 2te_2 + ze_3 + te_4 + ve_5 ,\ (z,t,v) \in \mathbb{R}^3\}$

$SEP(f,4) = \{v(4e_1 + e_5) + t(2e_2 + e_4) + ze_3 ,\ (z,t,v) \in \mathbb{R}^3\}$

$SEP(f,4) = Vect(4e_1 + e_5, 2e_2 + e_4, e_3)$.

Il est aisé de montrer que $(4e_1 + e_5, 2e_2 + e_4, e_3)$ est une famille libre de E.

Ainsi $(4e_1 + e_5, 2e_2 + e_4, e_3)$ est une base de $SEP(f,4)$ et $\dim SEP(f,4) = 3$.

$$f(u) = -4u \Leftrightarrow \begin{cases} 16v = -4x \\ 8t = -4y \\ 4z = -4z \\ 2y = -4t \\ x = -4v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4v \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Alors $-4 \in Sp\,f$ et $SEP(f,-4) = \cdots = Vect(-4e_1 + e_5, -2e_2 + e_4)$.

$(-4e_1 + e_5, -2e_2 + e_4)$ est clairement libre.

Ainsi $(-4e_1 + e_5, -2e_2 + e_4)$ est une base de $SEP(f,-4)$ et $\dim SEP(f,-4) = 2$.

$Sp\,f = \{-4, 4\}$ et $\dim SEP(f,4) + \dim SEP(f,-4) = 3 + 2 = 5 = \dim E$.

Alors f est diagonalisable. $(4e_1 + e_5, 2e_2 + e_4, e_3)$ est une base de $SEP(f,4)$, $(-4e_1 + e_5, -2e_2 + e_4)$ est une base de $SEP(f,-4)$ et $E = SEP(f,4) \oplus SEP(f,-4)$ donc $\mathcal{B}' = (4e_1 + e_5, 2e_2 + e_4, e_3, -4e_1 + e_5, -2e_2 + e_4)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $4, 4, 4, -4, -4$.

Ainsi $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & & & & (0) \\ & 4 & & & \\ & & 4 & & \\ & & & -4 & \\ (0) & & & & -4 \end{pmatrix}$. $P = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Notons que $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4 a) $k \in \mathbb{N} \cap [1, \frac{n+1}{2}]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(e_k + \lambda e_{n-k+1}) = 2^{k-1} e_{n-k+1} + \lambda 2^{n-k} e_k$$

b) Soit $k \in \mathbb{N} \cap [1, \frac{n+1}{2}[$. Soit λ un réel.

Notons que $e_k + \lambda e_{n-k+1}$ n'est pas le vecteur nul. Alors :

$e_k + \lambda e_{n-k+1}$ vecteur propre de f

$\Updownarrow$ $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $f(e_k + \lambda e_{n-k+1}) = \gamma (e_k + \lambda e_{n-k+1})$

$\Updownarrow$ $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $2^{k-1} e_{n-k+1} + \lambda 2^{n-k} e_k = \gamma e_k + \gamma \lambda e_{n-k+1}$

$\Updownarrow$ ← (e_k, e_{n-k+1}) est libre comme sous-famille d'une famille libre ⚠ $k \neq n-k+1$!

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \lambda 2^{n-k} = \gamma \\ 2^{k-1} = \gamma \lambda \end{cases}$

$\Updownarrow$ $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \gamma = \lambda 2^{n-k} \\ \lambda^2 2^{n-k} = 2^{k-1} \end{cases}$

(*) $\Updownarrow$ OK ?!

$\lambda^2 = \dfrac{2^{k-1}}{2^{n-k}} = 2^{2k-1-n}$

$\Updownarrow$ $\lambda = \pm 2^{k - \frac{n+1}{2}}$.

Conclusion.. Il existe deux réels distincts $a_k = 2^{k-\frac{n+1}{2}}$ et $b_k = -2^{k-\frac{n+1}{2}}$ tels que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f.

Remarque.. Le premier est associé à la valeur propre $2^{\frac{n-1}{2}}$ et le second à la valeur propre $-2^{\frac{n-1}{2}}$.

(*) équivalence établie en deux étapes.

⚠ résulte de $\gamma = \lambda 2^{n-k}$.

Supposons que $2k = n+1$. Alors nécessairement n est impair.
Dans ce cas $e_k = e_{\frac{n+1}{2}}$ et $e_{n-k+1} = e_{n-\frac{n+1}{2}+1} = e_{\frac{n+1}{2}} = e_k$.
Donc $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1} = 2^{k-1} e_k = 2^{\frac{n+1}{2}-1} e_k = 2^{\frac{n-1}{2}} e_k$.

__Si $2k = n+1$: e_k est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $2^{\frac{n-1}{2}}$.__

b) __1er cas.__ – n est impair. $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $n = 2p+1$. $n+1 = 2p+2$. et $\frac{n+1}{2} = p+1$.
Pour tout $k \in [\![1, p]\!] = [\![1, \frac{n+1}{2}[\![\cap \mathbb{N}$ notons P_k le plan vectoriel engendré par (e_k, e_{n-k+1}). Notons D_{p+1} la droite vectorielle engendrée par $e_{p+1} = e_{\frac{n+1}{2}}$.

"$(e_1, e_n) \cup (e_2, e_{n-1}) \cup \dots \cup (e_p, e_{p+2}) \cup (e_{p+1})$" est une base de E car elle se déduit de $(e_1, \dots, e_n)$ par une permutation des vecteurs de cette famille.

Alors $E = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_p \oplus D_{p+1}$.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{B}_k = (e_k + a_k e_{n-k+1}, e_k + b_k e_{n-k+1})$ est une famille de deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes ; $\mathcal{B}_k$ est donc une famille libre de $P_k = \mathrm{Vect}(e_k, e_{n-k+1})$ constituée de vecteurs propres de f.
Comme $\dim P_k = 2$, $\mathcal{B}_k$ est une base de P_k constituée de vecteurs propres de f.
$\mathcal{B}_{p+1} = (e_{p+1})$ est clairement une base de D_{p+1} & e_{p+1} est un vecteur propre de f.
Comme $E = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_p \oplus D_{p+1}$, $\hat{\mathcal{B}} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$" $\cup \mathcal{B}_{p+1}$" est une base de E constituée de vecteurs propres de f. Alors __f est diagonalisable__.

__Exercice de contrôle__ 1. Traiter le cas n pair.
C'est la même chose ... sauf qu'il n'y a pas D_{p+1} !
On pose $n = 2p$ et pour tout k dans $[\![1, p]\!]$ on considère le plan P_k engendré par e_k et e_{n-k+1}.
2. – Écrire la matrice de f dans $\hat{\mathcal{B}}$ lorsque $n = 2p+1$
3. – Même chose si $n = 2p$.

Exercice $n \in \mathbb{N}^*$. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Q1.. Montrer que si λ est un réel :

$$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda \notin [\![0, n-1]\!] \text{ et } \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \dots + \frac{1}{\lambda-(n-1)} = 1.$$

Q2.. Trouver le nombre d'éléments de $Sp_{\mathbb{R}}(A)$.

(Q1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $A = \begin{pmatrix} 1 & & (1) \\ & 2 & \\ (1) & & n \end{pmatrix}$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_n = \lambda x_2 \\ \dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + nx_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = (\lambda - k + 1) x_k.$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \text{et} \\ \lambda x_1 = (\lambda+1)x_2 = \dots = (\lambda - n + 1)x_n \end{cases}$$

1er Cas.. **$\lambda \in [\![0, n-1]\!]$.** $\exists i \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda = i$; $\lambda - k + 1 = \begin{cases} i - k + 1 \neq 0 \text{ si } k \neq i+1 \\ i - k + 1 = 0 \text{ si } k = i+1 \end{cases}$

Alors $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \text{et} \\ \lambda x_1 = \dots = (\lambda - i + 1)x_i = \overset{(\lambda - i)x_{i+1}}{0} = (\lambda - i - 1)x_{i+2} = \dots = (\lambda - n + 1)x_n \end{cases}$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \text{et} \\ \forall k \in [\![1, n]\!] - \{i+1\},\ x_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{i+1} = \lambda x_1 \\ \text{et} \\ \forall k \in [\![1, n]\!] - \{i+1\},\ x_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

→ dans si $i \neq 0$ car $x_1 = 0$
→ dans si $i = 0$ car $\lambda = 0$.

Ainsi si $\lambda \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda \notin Sp(A)$.

2ème Cas **$\lambda \notin [\![0, n-1]\!]$.** $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda - k + 1} x_1 \end{cases}$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 = \lambda x_1 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x_1 \left[\displaystyle\sum_{\underline{\underline{k=1}}}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 \right] = 0 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 \end{cases}$$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 \right] = 0 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 \end{cases} \quad \text{car } \lambda \neq 0$$

α) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 \neq 0$. $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\lambda \notin Sp(A)$

β) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 = 0$. $AX=\lambda X \Leftrightarrow \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1$.

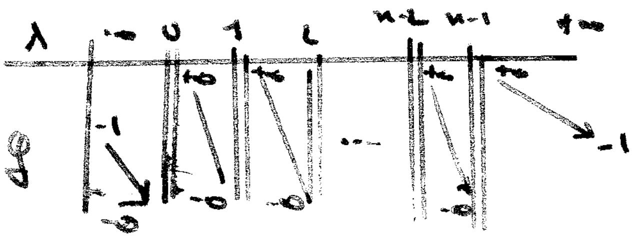
Alors $\lambda \in Sp(A)$ et $SEP(A,\lambda) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 1/(\lambda-1) \\ \vdots \\ 1/(\lambda-n+1) \end{pmatrix} \right)$.

Finalement : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda \notin [\![0,n-1]\!]$ et $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda-1} + \dots + \dfrac{1}{\lambda-n+1} = 1$.

Q2 Montrons que card $Sp(A) = n$.

V1. A est symétrique réelle donc diagonalisable. Q1 a montré que les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles. Alors A possède n valeurs propres distinctes.

V2 Posons $g : \lambda \mapsto \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda-1} + \dots + \dfrac{1}{\lambda-n+1} - 1$. g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{0,1,\dots,n-1\}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}-\{0,1,\dots,n-1\}$, $g'(\lambda) = -\dfrac{1}{\lambda^2} - \dots - \dfrac{1}{(\lambda-n+1)^2} < 0$.



En appliquant le théorème de la bijection sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$, ..., $]n-2,n-1[$, $]n-1,+\infty[$ on montre que g s'annule exactement n fois

(g ne s'annule pas sur $]-\infty,0[$ ...). Ainsi on retrouve card $Sp(A) = n$.