R.

EXERCICE 31

Exercice | N1$^+$ | **Matrice circulante again. Oral ESCP 1996 1.1.**

Q1. Soit $A=(a_{p,q})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (p,q)\in [\![1,n]\!]^2,\ a_{p,q}=\begin{cases}1 & \text{si } q=p+1 \text{ ou si } (p,q)=(\text{n},1)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\vdots&&\ddots&1\\1&0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}.$$ Diagonaliser A dans $\mathbb{C}$.

Q2. $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est un n-uplet de nombre complexes.
Soit $B=(b_{p,q})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall (p,q)\in [\![1,n]\!]^2,\ b_{p,q}=x_k$ où $\begin{cases}k=q-p+1 & \text{si } q>p-1\\ k=q-p+n+1 & \text{sinon}\end{cases}$.

Diagonaliser B.

On trouve Q1 dans oral ESCP 1999 2-23.

Q1 Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$(A-\lambda I_n)X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\iff\begin{cases}-\lambda x_1+x_2=0\\-\lambda x_2+x_3=0\\\cdots\cdots\cdots\\-\lambda x_{n-1}+x_n=0\\x_1-\lambda x_n=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_2=\lambda x_1\\x_3=\lambda x_2\\ \\x_n=\lambda x_{n-1}\\x_1-\lambda x_n=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_2=\lambda x_1\\x_3=\lambda^2x_1\\\vdots\\x_n=\lambda^{n-1}x_1\\0=x_1-\lambda^n x_1=(1-\lambda^n)x_1\end{cases}.$$

1er cas. $\lambda^n\neq 1$. Alors $1-\lambda^n\neq 0$.

donc $(A-\lambda I_n)X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\iff\begin{cases}x_1=0\\x_2=\lambda^2\times 0=0\\\vdots\\x_n=\lambda^{n-1}\times 0=0\end{cases}\iff x_1=x_2=\cdots=x_n=0\iff X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

Alors λ n'est pas valeur propre de A.

2ème cas. $\lambda^n=1$. Alors $1-\lambda^n=0$.

donc $(A-\lambda I_n)X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\iff\begin{cases}x_2=\lambda x_1\\x_3=\lambda^2x_1\\\vdots\\x_n=\lambda^{n-1}x_1\end{cases}$.

Alors $\lambda\in \mathrm{Sp}\,A$ et $\mathrm{SEP}(A,\lambda)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\vdots\\\lambda^{n-1}\end{pmatrix}\right)$.

Les valeurs propres de A sont les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Ainsi A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

Donc **A est diagonalisable.**

...

Posons $\forall q \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_q = e^{iq\times\frac{2\pi}{n}}$ et $X_q = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_q \\ \vdots \\ \lambda_q^{n-1} \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{Sp}\,A = \{\lambda_q ; q \in [\![1,n]\!]\}$ et pour tout q dans $[\![1,n]\!]$, $\mathcal{B}_q$ est une base de $\mathrm{SEP}(A,\lambda_q)$.

Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{q=1}^{n} \mathrm{SEP}(A,\lambda_q)$: "$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$" est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Ainsi $\underline{\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ à la base $\mathcal{B}$.

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$;

2) P est inversible comme matrice de passage ;

3) $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

(Q2) Le principe de la question est assez simple mais la mise en forme est plus délicate.

Examinons rapidement la situation

A quelques abus près la $p^{\text{ième}}$ ligne de B est $(x_{n+2-p} \; x_{n+3-p} \dots x_n \; x_1 \; x_2 \dots x_{n-p+1})$.

Ce qui donne $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_n & x_1 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_3 & x_4 & \dots & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \end{pmatrix}$

donc $B = x_1 I_n + x_2 A + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & (0) \\ | & | & 0 & \ddots & \\ | & | & | & & 1 \\ 0 & | & | & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & | & | \\ (0) & & \ddots & 0 & | \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il semble bien que $B = x_1 I_n + x_2 A + x_3 A^2 + \dots + x_n A^{n-1}$! Ce résultat obtenu il est clair que la réduction de B résultera aisément de celle de A.

...

Soit $\hat{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base $\hat{B}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice B dans $\hat{B}$.

Il s'agit de prouver que $g = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} f^k$.

Comme g et $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} f^k$ sont deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$, pour montrer qu'ils sont égaux il suffit de montrer qu'ils coïncident sur la base $\hat{B}$.

Montrons donc que $\forall q \in [\![1, n]\!]$, $g(e_q) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} f^k(e_q)$.

Soit $q \in [\![1, n]\!]$. A un petit abus près (le cas $q = n$ qu'il faudrait traiter à part) on a :

$$g(e_q) = \sum_{p=1}^{n} b_{p,q} e_p = \sum_{p=1}^{q} b_{p,q} e_p + \sum_{p=q+1}^{n} b_{p,q} e_p = \sum_{p=1}^{q} x_{q-p+1} e_p + \sum_{p=q+1}^{n} x_{q-p+n+1} e_p.$$

En faisant le changement d'indice $\ell = q-p$ dans la première somme et $\ell = q-p+n$ dans la seconde il vient : $g(e_q) = \sum_{\ell=0}^{q-1} x_{\ell+1} e_{q-\ell} + \sum_{\ell=q}^{n-1} x_{\ell+1} e_{n+q-\ell}$.

Donc $\underline{g(e_q) = \sum_{k=0}^{q-1} x_{k+1} e_{q-k} + \sum_{k=q}^{n-1} x_{k+1} e_{n+q-k}}$.

$f(e_1) = e_n$ et $\forall q \in [\![2, n]\!]$, $f(e_q) = e_{q-1}$.

Une récurrence des plus simples montre que $\forall q \in [\![2, n]\!]$, $\forall k \in [\![0, q-1]\!]$, $f^k(e_q) = e_{q-k}$.

<u>Soit $q \in [\![2, n]\!]$.</u> $\forall k \in [\![0, q-1]\!]$, $f^k(e_q) = e_{q-k}$. En particulier $f^{q-1}(e_q) = e_1$.

Alors $f^q(e_q) = f(e_1) = e_n$. $\forall k \in [\![q, n]\!]$, $f^k(e_q) = f^{k-q}(f^q(e_q)) = f^{k-q}(e_n) \underset{\substack{\uparrow \\ k-q \in [\![0, n-1]\!]}}{=} e_{n-(k-q)}$

Finalement $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^k(e_q) = \begin{cases} e_{q-k} \text{ si } k \in [\![0, q-1]\!] \\ e_{n+q-k} \text{ si } k \in [\![q, n-1]\!] \end{cases}$ (*)

$f(e_1) = e_n$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f^k(e_1) = f^{k-1}(e_n) = e_{n-(k-1)} = e_{n+1-k}$.

Donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $f^k(e_1) = e_{n+1-k}$ et $f^0(e_1) = e_1$.

Ce résultat s'intègre dans (*)

Ainsi $\forall q \in [\![1, n]\!]$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^k(e_q) = \begin{cases} e_{q-k} \text{ si } k \in [\![0, q-1]\!] \\ e_{n+q-k} \text{ si } k \in [\![q, n-1]\!] \end{cases}$.

Soit $q \in [\![1, n]\!]$. À un abus près :

$$\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} f^{\ell}\right)(e_q) = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} f^{\ell}(e_q) = \sum_{\ell=0}^{q-1} x_{\ell+1} e_{q-\ell} + \sum_{\ell=q}^{n-1} x_{\ell+1} e_{n+q-\ell} = g(e_q).$$

donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} f^{\ell} = g$. donc $\displaystyle B = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} A^{\ell}$

$\forall q \in [\![1, n]\!]$, $AX_q = \lambda_q X_q$ donc $\forall q \in [\![1, n]\!]$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $A^{\ell} X_q = \lambda_q^{\ell} X_q$.

Alors $\forall q \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle BX_q = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} A^{\ell} X_q = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_q^{\ell} X_q = \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_q^{\ell}\right) X_q$.

Ainsi <u>$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de B</u>

respectivement associés aux valeurs propres $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_1^{\ell}, \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_2^{\ell}, \dots, \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_n^{\ell}$.

donc
1°) B est diagonalisable
2°) $\displaystyle P^{-1} B P = \mathrm{Diag}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_1^{\ell}, \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_2^{\ell}, \dots, \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_n^{\ell}\right)$

R.

EXERCICE 32

Exercice | N2 | **Élément propres d'une matrice tridiagonale.**

n est un entier supérieur ou égal à 4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Dans cette exercice nous ferons abstraction du carractère symétrique de A pour ne pas déborder sur le chapitre algèbre bilinéaire.

Q1. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose : $x_0 = x_{n+1} = 0$.

a) Soit λ un élément de $\mathbb{C}$. Montrer que $AX = \lambda X$ si et seulement si : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = 0$.

b) Soit λ un élément de $\mathbb{C} - \{-2,2\}$. Prouver que :

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{C}^*,\ \exists c \in \mathbb{C}^*,\ \begin{cases} \alpha^{2n+2} = 1 \\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \lambda \\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k = c\,(\alpha^k - \dfrac{1}{\alpha^k}) \end{cases}$$

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de B dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

Q3. a est un réel. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

On trouve ce thème dans ESSEC 1996 MI , LYON 1999 MI Pb 1, HEC 1990 MI, oral ESCP 2008 2.1, dans une QSP ESCP 2006.

Q1 a) $AX=\lambda X \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2 \\ \cdots \\ x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k \\ \cdots \\ x_{n-2} + x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 - \lambda x_1 = 0 \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!],\ x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = 0 \\ -\lambda x_n + x_{n-1} = 0 \end{cases}$

Or $x_0 = x_{n+1} = 0$. Donc $x_2 - \lambda x_1 + x_0 = x_2 - \lambda x_1$ et $x_{n+1} - \lambda x_n + x_{n-1} = -\lambda x_n + x_{n-1}$.

Ainsi $\underline{AX = \lambda X \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = 0}$.

b) Ici $\lambda \in \mathbb{C} - \{-2, 2\}$.

Montrons que $AX = \lambda X$ et $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ si et seulement si il existe deux éléments non nuls α et c appartenant à $\mathbb{C}$ tels que : $\alpha^{2n+2} = 1$, $\lambda = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = c\,(\alpha^k - \frac{1}{\alpha^k})$.

<u>Étape 1</u>.. Montrons que la condition est nécessaire. Supposons que $AX=\lambda X$ et $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ définie par : $\begin{cases} u_0=0,\ u_1=x_1 \\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ u_{k+1}=\lambda u_k - u_{k-1} \end{cases}$

Montrons par récurrence que $\forall k\in[\![0,n+1]\!],\ u_k=x_k$

- la propriété est vraie pour $k=0$ et $k=1$.
- Supposons la propriété vraie pour $k-1$ et k avec $k\in[\![1,n]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

$$u_{k+1}=\lambda u_k-u_{k-1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{hypothèse de récurrence}}}{=} \lambda x_k - x_{k-1} \underset{\text{d'après a) car } AX=\lambda X}{=} x_{k+1}$$

. Ceci achève la récurrence.

Donc $\forall k\in[\![0,n+1]\!],\ u_k=x_k$. Notons au passage que $u_{n+1}=x_{n+1}=0$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $z\in\mathbb{C}$ et $z^2=\lambda z-1$ ou $z\in\mathbb{C}$ et $z^2-\lambda z+1=0$.

Le discriminant de cette équation du second degré est λ^2-4. Or $\lambda\neq 2$ et $\lambda\neq -2$.

Ainsi $\lambda^2-4\neq 0$ et l'équation admet deux solutions distinctes α et β.

Or $\alpha\beta=\frac{1}{1}$ ("$\frac{c}{a}$"!) donc <u>$\alpha\neq 0$</u> et $\beta=\frac{1}{\alpha}$.

Alors $\exists (c,d)\in\mathbb{C}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=c\alpha^n+d\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$.

Or $0=u_0=c+d$ donc $d=-c$. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=c\left(\alpha^n-\frac{1}{\alpha^n}\right)$.

Ainsi <u>$\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=c\left(\alpha^k-\frac{1}{\alpha^k}\right)$</u>. Si $c=0$: $\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=0$ et $X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$!!

Alors <u>$c\in\mathbb{C}^*$</u>.

$0=x_{n+1}=u_{n+1}=c\left(\alpha^{n+1}-\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right)$. Comme c n'est pas nul : $\alpha^{n+1}-\frac{1}{\alpha^{n+1}}=0$. $\alpha^{n+1}=\frac{1}{\alpha^{n+1}}$.

Donc <u>$\alpha^{2n+2}=1$.</u>

La somme des racines de l'équation $z\in\mathbb{C}$ et $z^2-\lambda z+1=0$ est $-\frac{-\lambda}{1}$ donc λ.

Alors <u>$\lambda=\alpha+\frac{1}{\alpha}$</u>.

Ainsi $\exists\alpha\in\mathbb{C}^*,\ \exists c\in\mathbb{C}^*,\ \begin{cases}\alpha^{2n+2}=1\\ \alpha+\frac{1}{\alpha}=\lambda\\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=c\left(\alpha^k-\frac{1}{\alpha^k}\right).\end{cases}$

<u>Etape 2</u>. - Notons que la condition est suffisante. Supposons qu'il existe deux éléments α et c de $\mathbb{C}^*$ tels que : $\alpha^{2n+2}=1$, $\lambda=\alpha+\frac{1}{\alpha}$ et $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $x_k=c(\alpha^k-\frac{1}{\alpha^k})$.

Notons que $AX=\lambda X$ et $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

Observons que $x_0=0=c(\alpha^0-\frac{1}{\alpha^0})$; $x_0=c(\alpha^0-\frac{1}{\alpha^0})$.

$c(\alpha^{n+1}-\frac{1}{\alpha^{n+1}})=c\,\frac{\alpha^{2n+2}-1}{\alpha^{n+1}}=0=x_{n+1}$; $x_{n+1}=c(\alpha^{n+1}-\frac{1}{\alpha^{n+1}})$.

Alors $\forall k\in[\![0,n+1]\!]$, $x_k=c(\alpha^k-\frac{1}{\alpha^k})$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$.

$x_{k+1}-\lambda x_k+x_{k-1}=c(\alpha^{k+1}-\frac{1}{\alpha^{k+1}})-(\alpha+\frac{1}{\alpha})c(\alpha^k-\frac{1}{\alpha^k})+c(\alpha^{k-1}-\frac{1}{\alpha^{k-1}})$.

$x_{k+1}-\lambda x_k+x_{k-1}=c\left[\alpha^{k+1}-\frac{1}{\alpha^{k+1}}-\alpha^{k+1}+\frac{1}{\alpha^{k-1}}-\alpha^{k-1}+\frac{1}{\alpha^{k+1}}+\alpha^{k-1}-\frac{1}{\alpha^{k-1}}\right]=0$

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $x_{k+1}-\lambda x_k+x_{k-1}=0$. D'après a) $\underline{AX=\lambda X}$.

Supposons que $x_1=0$. Alors $0=x_1=c(\alpha-\frac{1}{\alpha})$ et $c\neq 0$. Alors $\alpha-\frac{1}{\alpha}=0$.

$\alpha=\frac{1}{\alpha}$; $\alpha^2=1$; $\alpha=1$ ou -1. Si $\alpha=1$: $\lambda=\alpha+\frac{1}{\alpha}=2$! Si $\alpha=-1$: $\lambda=\alpha+\frac{1}{\alpha}=-2$!

Alors $x_1\neq 0$ donc $\underline{X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}}$.

Finalement $AX=\lambda X$ et $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. Ceci achève de montrer que

$$AX=\lambda X \text{ et } X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \iff \exists\alpha\in\mathbb{C}^*,\ \exists c\in\mathbb{C}^*,\ \begin{cases}\alpha^{2n+2}=1\\ \alpha+\frac{1}{\alpha}=\lambda\\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=c(\alpha^k-\frac{1}{\alpha^k})\end{cases}$$

Q3) <u>Remarque</u>. - Soit $\alpha\in\mathbb{C}^*$ tel que $\alpha^{2n+2}=1$
$\exists k\in[\![0,2n+1]\!]$, $\alpha=e^{ik\times\frac{2\pi}{2n+2}}=e^{ik\times\frac{\pi}{n+1}}$.

Alors $\alpha+\frac{1}{\alpha}=e^{ik\frac{\pi}{n+1}}+e^{-ik\frac{\pi}{n+1}}=2\cos\frac{k\pi}{n+1}$. Posons $\lambda=2\cos\frac{k\pi}{n+1}$.

Remarquons aussi que :

→ si $k=0$: $\lambda=2$

→ si $k=n+1$: $\lambda=-2$

→ $\lambda=2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)=2\cos\left(\pi-\frac{k\pi}{n+1}\right)=2\cos\left((n+1-k)\frac{\pi}{n+1}\right)=2\cos\left((k-(n+1))\frac{\pi}{n+1}\right)$

Cela peut dire que
$\{2\cos\frac{k\pi}{n+1}\,;\,k\in[\![1,n]\!]\}=\{2\cos\frac{k\pi}{n+1}\,;\,k\in[\![n+2,2n+1]\!]\}$

Posons alors $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_r = e^{i r \frac{\pi}{n+1}}$ et $\lambda_r = \alpha_r + \frac{1}{\alpha_r}$.

$\forall r \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_r = 2\cos\frac{r\pi}{n+1}$ et $\alpha_r^{2n+2} = 1$.

De plus $0 < \frac{\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n+1} < \dots < \frac{n\pi}{n+1} < \pi$ et cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

Alors $1 > \cos\frac{\pi}{n+1} > \cos\frac{2\pi}{n+1} > \dots > \cos\frac{n\pi}{n+1} > -1$

Donc $2 > 2\cos\frac{\pi}{n+1} > 2\cos\frac{2\pi}{n+1} > \dots > 2\cos\frac{n\pi}{n+1} > -2$. $2 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > -2$.

Ainsi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n réels deux à deux distincts de l'intervalle $\underline{\underline{]-2,2[}}$.

Soit $r \in [\![1,n]\!]$. Posons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k(r) = \alpha_r^k - \frac{1}{\alpha_r^k}$, $X_r = \begin{pmatrix} x_1(r) \\ x_2(r) \\ \vdots \\ x_n(r) \end{pmatrix}$ et $c = 1$.

$\alpha_r \in \mathbb{C}^*$, $c \in \mathbb{C}^*$, $\alpha_r^{2n+2} = 1$, $\alpha_r + \frac{1}{\alpha_r} = \lambda_r$, $\lambda_r \neq 2$, $\lambda_r \neq -2$ et

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k(r) = c\left(\alpha_r^k - \frac{1}{\alpha_r^k}\right)$.

Alors d'après Q1, $AX_r = \lambda_r X_r$ et $X_r \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$

Donc λ_r est une valeur propre de A et X_r est un vecteur propre associé... dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n valeurs propres deux à deux distinctes de A et $A \in M_n(\mathbb{C})$

Donc $\underline{\underline{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ sont LES valeurs propres de } A.}}$

Notons que dans ces conditions les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

Ainsi $\underline{\underline{\forall r \in [\![1,n]\!],\ SEP(A,\lambda_r) = \mathrm{Vect}(X_r)}}$.

Soit $r \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k(r) = \alpha_r^k - \frac{1}{\alpha_r^k} = \left(e^{i\frac{r\pi}{n+1}}\right)^k - \left(e^{i\frac{r\pi}{n+1}}\right)^{-k} = e^{i\frac{rk\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{rk\pi}{n+1}}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k(r) = 2i\sin\frac{rk\pi}{n+1}$.

Posons $\theta_r = \frac{r\pi}{n+1}$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k(r) = 2i\sin(k\theta_r)$. Notons aussi que $\lambda_r = 2\cos\theta_r$.

Alors $X_r = 2i\begin{pmatrix} \sin\theta_r \\ \sin 2\theta_r \\ \vdots \\ \sin n\theta_r \end{pmatrix}$ donc $SEP(A,\lambda_r) = \mathrm{Vect}(X_r) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sin\theta_r \\ \sin 2\theta_r \\ \vdots \\ \sin n\theta_r \end{pmatrix}\right)$.

Nous pouvons alors donner une conclusion qui vaut aussi bien dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{C}$.

Si $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $\theta_r = \frac{r\pi}{n+1}$:

1) $Sp\, A = \{2\cos\theta_r\ ;\ r \in [\![1,n]\!]\}$

2) $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $SEP(A, 2\cos\theta_r) = Vect\left(\begin{pmatrix} \sin\theta_r \\ \sin(2\theta_r) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_r) \end{pmatrix}\right)$.

Q3 $a \in \mathbb{R}$. $B = a I_n + A$. Posons $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $\hat{X}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta_r \\ \sin(2\theta_r) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_r) \end{pmatrix}$.

$\forall r \in [\![1,n]\!]$, $B\hat{X}_r = aX_r + AX_r = (a + 2\cos\theta_r)\hat{X}_r$ et $\hat{X}_r \neq 0_{M_{n,1}}(\mathbb{R})$.

Alors $a + 2\cos\theta_1, a + 2\cos\theta_2, \dots, a + 2\cos\theta_n$ sont n valeurs propres réelles deux à deux distinctes de B. Comme $B \in M_n(\mathbb{R})$:

1) $Sp\, B = \{a + 2\cos\theta_r\ ;\ r \in [\![1,n]\!]\}$;

2) les sous-espaces propres de B sont de dimension 1.

$\forall r \in [\![1,n]\!]$, $B\hat{X}_r = (a + 2\cos\theta_r)\hat{X}_r$ et $\hat{X}_r \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $SEP(B, a + 2\cos\theta_r) = Vect(\hat{X}_r) = Vect\left(\begin{pmatrix} \sin\theta_r \\ \sin(2\theta_r) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_r) \end{pmatrix}\right)$.

R.

EXERCICE 33

Exercice | N1⁻ | **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 1.**

$E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. f est l'application qui à tout élément P de E associe le reste dans la division de AP par B.

Q0. Rappeler le théorème concernant la division euclidienne des polynômes.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E (à faire très proprement).

Q2. Trouver la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Q3 $\boxed{\text{N1}^+}$ Retrouver les résultats de Q2 sans utiliser la matrice de f par des considérations sur les racines des polynômes.

Thème analogue dans LYON 1994 PB 1, EDHEC 2012 ex 3, ECRICOME 2002 ex1.

Q0 $A \in \mathbb{K}[X]$. $B \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Alors il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Q (resp. R) est le quotient (resp. le reste) dans la division de A par B.

Q1 * Soit $P \in E$. $f(P)$ est le reste dans la division de AP par B.

Alors $f(P) \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg f(P) < \deg B = 4$. Donc $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$; $f(P) \in E$.

$\forall P \in E$, $f(P) \in E$. f est une application de E dans E.

* Soit $(P_1, P_2) \in E^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, $AP_1 = Q_1 B + f(P_1)$ et $AP_2 = Q_2 B + f(P_2)$.

De plus $\deg f(P_1) < \deg B$ et $\deg f(P_2) < \deg B$. Alors :

$A(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda Q_1 + Q_2) B + \lambda f(P_1) + f(P_2)$ et $\deg(\lambda f(P_1) + f(P_2)) < \deg B$ car $\deg f(P_1) < \deg B$ et $\deg f(P_2) < \deg B$.

Alors Q0 permet de dire que $\lambda f(P_1) + f(P_2)$ est le reste dans la division de $A(\lambda P_1 + P_2)$ par B. Donc $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P_1, P_2) \in E^2$, $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$. f est linéaire.

Finalement f est un endomorphisme de E.

Q2 $A \times 1 = X^4 - 1 = X^4 - X + X - 1 = 1 \times B + X - 1$ et $\deg(X-1) < \deg B$ donc $f(1) = -1 + X$

$AX = X^5 - X = X^5 - X^2 + X^2 - X = XB + X^2 - X$ et $\deg(X^2 - X) < \deg B$ donc $f(1) = -X + X^2$.

$AX^2 = X^6 - X^2 = X^6 - X^3 + X^3 - X^2 = X^2 B + X^3 - X^2$ et $\deg(X^3 - X^2) < \deg B$ donc $f(X^2) = -X^2 + X^3$

$AX^3 = X^7 - X^3 = X^7 - X^4 + X^4 - X + X - X^3 = (X^3+1)B + X - X^3$ et $\deg(X-X^3) < \deg B$.

donc $f(X^3) = X - X^3$.

Finalement la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ un élément de E.

$$(f - \lambda Id_E)(P) = 0_E \iff (M - \lambda I_4)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (-1-\lambda)a = 0 \\ a - (1+\lambda)b + d = 0 \\ b - (1+\lambda)c = 0 \\ c - (1+\lambda)d = 0 \end{cases}$$

1er cas.. $\lambda + 1 = 0$ c'est à dire $\lambda = -1$

$$(f - \lambda Id_E)(P) = 0_E \iff \begin{cases} a + d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = -a \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

$\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) = \{ a + 0X + 0X^2 - aX^3 ;\ a \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}(1 - X^3) \neq \{0_E\}$.

Ainsi $-1 \in Sp\, f$ et $SEP(f, -1) = \mathrm{Vect}(1 - X^3)$.

2ème cas.. $\lambda + 1 \neq 0$ c'est à dire $\lambda \neq -1$.

$$(f - \lambda Id_E)(P) = 0_E \iff \begin{cases} a = 0 \\ c = (1+\lambda)d \\ b = (1+\lambda)c = (1+\lambda)^2 d \\ 0 = 0 - (1+\lambda)b + d = -(1+\lambda)^3 d + d = (1 - (1+\lambda)^3)d. \end{cases}$$

- i) $1 - (1+\lambda)^3 \neq 0$ $(f - \lambda I d_E)(P) = 0_E \iff d = 0, b = 0, c = 0, a = 0 \iff P = 0_E$. λ n'est pas valeur propre de f.
- ii) $1 - (1+\lambda)^3 = 0$. donc $(1+\lambda)^3 = 1$. Alors $1 + \lambda = 1$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; $\lambda = 0$.

$$(f - \lambda Id_E)(P) = 0_E \iff \begin{cases} a = 0 \\ c = d \\ b = d \end{cases}.$$

$\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) = \{ dX + dX^2 + dX^3 ;\ d \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}(X + X^2 + X^3) \neq \{0_E\}$.

Ainsi 0 est valeur propre de f et $SEP(f, 0) = \mathrm{Vect}(X + X^2 + X^3)$.

Finalement $Sp\, f = \{-1, 0\}$, $SEP(f, -1) = \mathrm{Vect}(1 - X^3)$ et $SEP(f, 0) = \mathrm{Vect}(X + X^2 + X^3)$.

Remarque.. f n'est pas diagonalisable car $\dim SEP(f, -1) + \dim SEP(f, 0) = 2 \neq 4 = \dim E$.

(Q3) Notons que les zéros de A dans $\mathbb{C}$ sont $1, -1, i$ et $-i$ et les zéros de B dans $\mathbb{C}$ sont $0, 1, j$ et j^2. donc A et B n'ont qu'un zéro commun : 1.

Supposons que λ soit une valeur propre de f. Soit $P \in SEP(f,\lambda)$ et $P \neq 0_E$.

$f(P) = \lambda P$. $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $AP = QB + f(P)$; $AP = QB + \lambda P$; $(A-\lambda)P = QB$

$0, 1, j$ et j^2 sont des zéros de B donc de QB donc de $(A-\lambda)P$.

Or $P \neq 0_E$ et $\deg P \leqslant 3$ donc P ne peut pas admettre pour zéros dans $\mathbb{C}$ $0, 1, j$ et j^2.

Alors ou $P(0) \neq 0$ ou $P(1) \neq 0$ ou $P(j) \neq 0$ ou $P(j^2) \neq 0$.

Si $P(0) \neq 0$ alors $(A-\lambda)(0) = 0$ donc $\lambda = A(0) = -1$.

Si $P(1) \neq 0$ alors $(A-\lambda)(1) = 0$ donc $\lambda = A(1) = 0$.

Si $P(j) \neq 0$ alors $(A-\lambda)(j) = 0$ donc $\lambda = A(j) = j^4 - 1 = j - 1$; ceci est impossible car $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $P(j^2) \neq 0$ alors $(A-\lambda)(j^2) = 0$ donc $\lambda = A(j^2) = j^8 - 1 = j^2 - 1$; ceci est impossible car $\lambda \in \mathbb{R}$.

Allons plus loin.

Reprenons le cas $P(0) \neq 0$. Alors $\lambda = -1$. Donc $A - \lambda = A + 1 = X^4$.

$1, j$ et j^2 ne sont pas des zéros de $A-\lambda$ donc ce sont des zéros de P.

Ainsi $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ divise P et $\deg P \leqslant 3$.

Alors $\exists c \in \mathbb{R}$, $P = c(X^3-1)$ et $P \in \mathrm{Vect}(X^3-1)$

Reprenons le cas $P(0) \neq 0$. Alors $\lambda = 0$. Donc $A - \lambda = A$

$0, j$ et j^2 ne sont pas des zéros de $A-\lambda$ donc ce sont des zéros de P.

Ainsi $X(X^2+X+1) = X(X-j)(X-j^2)$ divise P et $\deg P \leqslant 3$.

Alors $\exists d \in \mathbb{R}$, $P = d(X(X^2+X+1))$. $P \in \mathrm{Vect}(X(X^2+X^2+1))$.

Nous venons donc de montrer que :

1) $\mathrm{Sp}\, f \subset \{-1, 0\}$

2) Si $-1 \in \mathrm{Sp}\, f$ tout vecteur propre de f associé à -1 appartient à $\mathrm{Vect}(X^3-1)$

3) Si $0 \in \mathrm{Sp}\, f$ tout vecteur propre de f associé à 0 appartient à $\mathrm{Vect}(X(X^2+X+1))$

4) la dimension des sous-espaces propres de f n'excède pas 1 donc est égale à 1.

Calculons $f(X^3-1)$ et $f(X(X^2+X+1))$.

$A(X^3-1) = (X^4-1)(X^3-1) = X^7 - X^4 - X^3 + 1 = X^3 B + 1 - X^3$ et $\deg(1-X^3) < \deg B$.

Alors $f(X^3-1) = -(X^3-1)$. Donc $\underline{-1 \in Sp\, f}$ et $X^3-1 \in SEP(f,-1)$.

Or dim $SEP(f,-1) = 1$ (d'après ce que nous avons vu plus haut) et $X^3-1 \neq 0_E$

Alors $\underline{SEP(f,-1) = Vect(X^3-1) = Vect(1-X^3)}$.

$B = X(X^3-1) = X(X-1)(X^2+X+1)$

$AX(X^2+X+1) = (X^4-1)X(X^2+X+1) = (X^3+X^2+X+1)\underbrace{(X-1)(X)(X^2+X+1)}_{= X(X^3-1) = B} = (X^3+X^2+X+1)B$.

$X^4-1 = (X-1)(X^3+X^2+X+1)$

Alors $f(X(X^2+X+1)) = 0$

Comme $X(X^2+X+1) \neq 0_E$: $0 \in Sp\, f$ et $X(X^2+X+1) \in SEP(f,0)$.

Or dim $SEP(f,0) = 1$ ainsi $SEP(f,0) = Vect(X(X^2+X+1)) = Vect(X+X^2+X^3)$.

Finalement $Sp\, f = \{-1, 0\}$, $SEP(f,-1) = Vect(1-X^3)$ et $SEP(f,0) = Vect(X+X^2+X^3)$.

On a ainsi retrouvé les résultats de Q 2.

<u>Exercice..</u> Reprendre le problème en remplaçant $\mathbb{R}_3[X]$ par $\mathbb{C}_3[X]$.

On trouve alors $Sp\, f = \{0, -1, j-1, j^2-1\}$;

$SEP(f,0) = Vect(X+X^2+X^3)$;

$SEP(f,-1) = Vect(1-X^3)$;

$SEP(f, j-1) = Vect(j^2 X + j X^2 + X^3)$;

$SEP(f, j^2-1) = Vect(j X + j^2 X^2 + X^3)$.

EXERCICE 34

Exercice N1⁻. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 2. Contenu dans ESCP 2008 2.12**

$E = \mathbb{R}_n[X]$. $\forall P \in E,\ f(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$. $n \in [\![2, +\infty[\![$.

Q0. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{k(k+1),\ k \in [\![0,n]\!]\}$ et que f est un endomorphisme diagonalisable de E.

Q2. Montrer que pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, un vecteur propre associé à la valeur propre $k(k+1)$ est de degré k.

Q3. Montrer que pour tout k dans $[\![0,n]\!]$ il existe un polynôme unitaire P_k et un seul appartenant à SEP $(f, k(k+1))$. Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Q0 • Soit $P \in E$. $(X^2-1)P'' \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg((X^2-1)P'') \leqslant n$ car $\deg P \leqslant n$.

$2XP' \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(2XP') \leqslant n$ car $\deg P \leqslant n$.

Alors $(X^2-1)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $f(P) = (X^2-1)P'' + 2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$. $f(P) \in E$.

$\forall P \in E,\ f(P) \in E$. <u>$f$ est une application de E dans E.</u>

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q) \in E^2$.

$f(\lambda P + Q) = (X^2-1)(\lambda P + Q)'' + 2X(\lambda P + Q)' = (X^2-1)(\lambda P'' + Q'') + 2X(\lambda P' + Q')$.

$f(\lambda P + Q) = \lambda\left[(X^2-1)P'' + 2XP'\right] + (X^2-1)Q'' + 2XQ' = \lambda f(P) + f(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in E^2,\ f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$. <u>$f$ est linéaire.</u>

Ainsi <u>f est un endomorphisme de E.</u>

Q1 <u>$f(1) = 0_E$, $f(X) = 2X$</u> et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f(X^k) = (X^2-1)\,k(k-1)X^{k-2} + 2X\,k\,X^{k-1}$.

$\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f(X^k) = k(k-1)X^k - k(k-1)X^{k-2} + 2k\,X^k$.

<u>$\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)\,X^{k-2}$</u>

Alors la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X$ $)$ est triangulaire supérieure. Les valeurs propres de A sont ses éléments diagonaux.

Alors $\mathrm{Sp} f = \mathrm{Sp} A = \{0\} \cup \{2\} \cup \{k(k+1);\ k \in [\![2, n]\!]\} = \{k(k+1);\ k \in [\![0, n]\!]\}$.

<u>$\mathrm{Sp} f = \{k(k+1),\ k \in [\![0, n]\!]\}$.</u>

Pour $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k = k(k+1)$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+1)(k+2) - k(k+1) = 2(k+1) > 0$.

Alors la suite $(\lambda_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est strictement croissante.

Ainsi $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n réels deux à deux distincts.

Donc $f \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n+1$ et f admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Alors 1) f est diagonalisable

2) les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

(Q2) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre $k(k+1)$. Soit r le degré de P $(P \neq 0_E)$ et a_r le coefficient de X^r dans P.

Le coefficient de X^r dans $(X^2-1)P''+2XP'$ est $r(r-1)a_r+2ra_r$

Le coefficient de X^r dans $k(k+1)P$ est $k(k+1)a_r$

or $(X^2-1)P''+2XP' = f(P) = k(k+1)P$.

Alors $r(r-1)a_r+2ra_r = k(k+1)a_r$. Comme a_r est non nul :

$r(r-1)+2r = k(k+1)$; $r(r+1) = k(k+1)$. Rappelons que $r \in [\![0,n]\!]$.

Ainsi $\lambda_r = \lambda_k$. Or la suite $(\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est strictement croissante donc $r=k$.

Si $k \in [\![0,n]\!]$, un vecteur propre de f associé à la valeur propre $k(k+1)$ est de degré k.

(Q3) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Posons $D_k = SEP(f, k(k+1))$. D_k est de dimension 1 (voir Q1).

Soit Q un élément non nul de D_k. $D_k = \mathrm{Vect}(Q)$ et $\deg Q = k$ d'après Q2.

Soit b_k le coefficient de X^k dans Q. Posons $P_k = \frac{1}{b_k} Q$.

P_k est unitaire, de degré k et $P_k \in D_k$.

Donc P_k est un polynôme unitaire de $SEP(f, k(k+1))$.

Notons également que $D_k = \mathrm{Vect}(P_k)$. Soit $\hat{P}_k$ un second polynôme unitaire de D_k.

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\hat{P}_k = \alpha P_k$. Or $\deg \hat{P}_k = k = \deg P_k$, $\hat{P}_k$ et P_k sont unitaires.

Alors nécessairement $\alpha = 1$. Donc $\hat{P}_k = P_k$.

Pour tout k dans $[\![0,n]\!]$ il existe un polynôme unitaire P_k et un seul appartenant à $SEP(f, k(k+1))$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$. Alors $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de polynômes non nuls échelonnés en degré.

Ainsi $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le cardinal $n+1$ coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Alors <u>$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc de E.</u>

EXERCICE 35

Exercice **N1. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 3.**

n est un élément de $[\![4, +\infty[\![$. $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (X^2+1)P'' - 2XP'$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver la matrice de f dans la base canononique de E. En déduire le spectre de f. Déterminer le cardinal de cet ensemble.

Q3. Montrer que : $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}_3[X]$, puis que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, X^3+3X)$. Déterminer $\operatorname{Ker}(f + 2Id_E)$.

Q4. Montrer que f est diagonalisable.

Q1 • Soit $P \in E$. $\deg P \leqslant n$.

Alors $(X^2+1)P'' \in \mathbb{R}[X]$, $2XP' \in \mathbb{R}[X]$, $\deg((X^2+1)P'') \leqslant n$ et $\deg(2XP') \leqslant n$.

Donc $(X^2+1)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$. $f(P) = (X^2+1)P'' - 2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\forall P \in E$, $f(P) \in E$. f est une application de E dans E.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q) \in E^2$.

$f(\lambda P + Q) = (X^2+1)(\lambda P + Q)'' - 2X(\lambda P + Q)' = (X^2+1)(\lambda P'' + Q'') - 2X(\lambda P' + Q')$.

$f(\lambda P + Q) = \lambda\left((X^2+1)P'' - 2XP'\right) + (X^2+1)Q'' - 2XQ' = \lambda f(P) + f(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P, Q) \in E^2$, $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$. f est linéaire.

Ainsi f est un endomorphisme de E.

Q2 $f(1) = 0_E$. $f(X) = -2X$.

$\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f(X^k) = (X^2+1)k(k-1)X^{k-2} - 2XkX^{k-1} = \left(k(k-1) - 2k\right)X^k + k(k-1)X^{k-2}$.

$\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f(X^k) = k(k-3)X^k + k(k-1)X^{k-2}$.

Posons $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = k(k-3)$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $b_k = k(k-1)$.

$f(1) = a_0\, 1$, $f(X) = a_1 X$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f(X^k) = a_k X^k + b_k X^{k-2}$.

Alors la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $E = \mathbb{R}_n[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & b_2 & & (0) \\ & a_1 & 0 & \ddots & \\ & & a_2 & \ddots & b_n \\ & & & \ddots & 0 \\ (0) & & & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall k \in [\![0, n]\!], \ a_k = k(k-3) \\ \forall k \in [\![2, n]\!], \ b_k = k(k-1) \end{cases}.$$

A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale.

Alors $Sp\, f = Sp\, A = \{a_\ell \,;\, \ell \in [\![0,n]\!]\} = \{\ell(\ell-3) \,;\, \ell \in [\![0,n]\!]\}$. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

Notons que $k(k-3) = \begin{cases} 0 & \text{si } k=0 \\ -2 & \text{si } k=1 \\ -2 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k=3 \end{cases}$.

Alors $\underline{\underline{Sp\, f = \{k(k-3) \,;\, k \in [\![2,n]\!]\}}}$.

Posons $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $\lambda_k = k(k-3)$.

$\forall k \in [\![2,n-1]\!]$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+1)(k-2) - k(k-3) = k^2 - 2k + k - 2 - k^2 + 3k = 2k - 2 = 2(k-1) > 0$.

La suite $(\lambda_k)_{k \in [\![2,n]\!]}$ est strictement croissante.

Ainsi $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ sont $n-1$ réels deux à deux distincts.

Donc $\underline{\underline{\operatorname{card} Sp\, f = n-1}}$. Pas de chance !

Q3 Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Soit $P \in SEP(f, k(k-3))$ et $P \neq 0_E$.

Posons $r = \deg P$ et notons a_r le coefficient de X^r dans P.

- $(X^2+1)P'' - 2XP' = k(k-3)P$
- le coefficient de X^r dans $(X^2+1)P'' - 2XP'$ est $r(r-1)a_r - 2ra_r$ donc $r(r-3)a_r$.
- Le coefficient de X^r dans $k(k-3)P$ est $k(k-3)a_r$.

Alors $r(r-3)a_r = k(k-3)a_r$. Comme $a_r \neq 0$: $r(r-3) = k(k-3)$.

Donc $0 = r^2 - k^2 - 3(r-k) = (r-k)(r+k-3)$; $r = k$ ou $r = 3-k$.

Notons que si $k=3$: $r = 3$ ou 0 et si $k=2$: $r = 2$ ou 1.

Or si $k=3$: $k(k-3) = 0$ et si $k=2$ $k(k-3) = -2$.

Alors $\forall P \in SEP(f,0)$, $P \neq 0_E \Rightarrow \deg P = 0$ ou 3 ; $\underline{\underline{\operatorname{Ker} f = SEP(f,0) \subset \mathbb{R}_3[X]}}$

$\forall P \in SEP(f,-2)$, $P \neq 0_E \Rightarrow \deg P = 1$ ou 2 ; $\underline{\underline{\operatorname{Ker}(f + 2Id_E) = SEP(f,-2) \subset \mathbb{R}_2[X]}}$.

<u>Remarque</u>.. Si $k \in [\![4,n]\!]$, $\forall P \in SEP(f, k(k-3))$, $P \neq 0_E \Rightarrow \deg P = k$ $\quad (3-k<0)$.

Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$

$P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(P) = 0_E \Longleftrightarrow (X^2+1)P'' - 2XP' = 0_E \Leftrightarrow (X^2+1)(2c + 6dX) - 2X(b + 2cX + 3dX^2) = 0_E$.

$P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow (6d - 6d)X^3 - 2cX^2 + (6d - 2b)X + 2c = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 3d \end{cases}$.

$\operatorname{Ker} f = \{a + 3dX + dX^3 ;\ (a,d) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}(1, X^3 + 3X)$.

$\underline{\underline{SEP(f,0) = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, X^3+3X)}}$. Notons que $\underline{\underline{\dim SEP(f,0) = 2}}$ car $(1, X^3+X)$ est une famille libre.

Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$

$P \in \operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow -2P = f(P) = (X^2+1)P'' - 2XP'$.

$P \in \operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow -2a - 2bX - 2cX^2 = (X^2+1)(2c) - 2X(b + 2cX)$.

$P \in \operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow -2a - 2bX - 2cX^2 = 2c - 2bX - 2cX^2 \underset{(1,X,X^2) \text{ est libre}}{\Leftrightarrow} c = -a$.

$\operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E) = \{a + bX - aX^2 ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}(1 - X^2, X)$.

$\underline{\underline{SEP(f,-2) = \operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E) = \operatorname{Vect}(1-X^2, X)}}$. $\underline{\underline{\dim SEP(f,-2) = 2}}$ car $(1-X^2, X)$ est une famille libre.

Q4 $\dim E \overset{\text{cours}}{\geqslant} \sum_{\lambda \in Sp f} \dim SEP(f,\lambda) = \sum_{k=2}^{n} \dim SEP(f, k(k-3))$.

$\dim E \geqslant \sum_{\lambda \in Sp f} \dim SEP(f,\lambda) = \dim SEP(f,-2) + \dim SEP(f,0) + \sum_{k=4}^{n} \dim SEP(f, k(k-3))$.

$\dim E \geqslant \sum_{\lambda \in Sp f} \dim SEP(f,\lambda) = 2 + 2 + \sum_{k=4}^{n} \dim SEP(f, k(k-3)) \geqslant 4 + \sum_{k=4}^{n} 1 = 4 + (n-3) = n+1$.

$\dim SEP(f, k(k-3)) \geqslant 1$ car $SEP(f, k(k-3))$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$

Donc $\dim E \geqslant \sum_{\lambda \in Sp f} \dim SEP(f,\lambda) \geqslant n+1 = \dim E$.

Ainsi $\sum_{\lambda \in Sp f} \dim SEP(f,\lambda) = \dim E$. $\underline{\underline{f \text{ est diagonalisable}}}$.

<u>Remarque</u> : $\forall k \in [\![4, n]\!]$, $\dim SEP(f, k(k-3)) = 1$.

1

EXERCICE 36

Exercice **Réduction d'une endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.**

n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et $E=\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose

$$f(P)=(X^2-1)P'-nXP.$$

Q1. Prouver que f est un endomorphisme de E (la linéarité est claire).

Q2. Soit λ un réel et P un élément non nul de E tels que : $f(P)=\lambda P$.

a) Montrer que P est de degré n (on pourra noter r le degré de P et a_r le coefficient du terme de plus haut degré de P).

b) Soit α un zéro de P dans $\mathbb{C}$ d'ordre de multiplicité k. Que dire pour P' ? Montrer alors que nécessairement α vaut 1 ou -1.

En déduire qu'il existe c dans $\mathbb{R}^*$ et p dans $[\![0,n]\!]$ tels que : $P=c(X-1)^p(X+1)^{n-p}$.

Préciser la dimension de SEP (f,λ). Exprimer λ en fonction de p et de n. Donner une base de SEP (f,λ).

c) Conclure cette première phase.

Q3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Q1 • Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. $(X^2-1)P'\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $nXP\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$ donc $f(P)=(X^2-1)P'-nXP\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Soit a_n le coefficient de X^n dans P. Le coefficient de X^{n+1} dans $(X^2-1)P'$ (resp. nXP) est na_n (resp. na_n). Donc le coefficient de X^{n+1} dans $f(P)$ est 0. Comme nous avons vu que $f(P)$ appartient à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ nous pouvons dire que $f(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$!

f est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc de E dans E.

• Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(P,Q)\in E^2$.

$f(\lambda P+Q)=(X^2-1)(\lambda P+Q)'-nX(\lambda P+Q)=(X^2-1)(\lambda P'+Q')-\lambda nXP-nXQ$.

$f(\lambda P+Q)=\lambda[(X^2-1)P'-nXP]+[(X^2-1)Q'-nXQ]=\lambda f(P)+f(Q)$.

f est linéaire.

Finalement f est un endomorphisme de E.

Remarque. – Notons que $f(1)=-nX$. Nous ne sommes donc pas dans la situation "$\deg f(P)\leq\deg P$". Ainsi la matrice de f dans la base canonique n'est pas directement triangulaire supérieure.

(Q2) Cette question consiste à faire une ANALYSE sur les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. Il ne restera plus à faire dans Q3 la SYNTHÈSE.

a) $P \neq 0_E$. Posons $r = \deg P$ et notons a_r le coefficient de X^r dans P.

Le coefficient de X^{r+1} dans $(X^2-1)P'$ est $r a_r$.

Le coefficient de X^{r+1} dans nXP est $n a_r$.

Le coefficient de X^{r+1} dans λP est 0.

Ainsi $r a_r - n a_r = 0$. Comme $a_r \neq 0$: $r = n$. $\underline{\deg P = n}$.

b) α est un zéro de P dans $\mathbb{C}$ d'ordre k donc (à un choix près) α est un zéro de P' d'ordre $k-1$.

$f(P) = \lambda P$ donc $(X^2-1)P' - nXP = \lambda P$; $(X^2-1)P' = (nX+\lambda)P$.

$(X-\alpha)^k$ divise P donc divise $(nX+\lambda)P$.

Alors $(X-\alpha)^k$ divise $(X^2-1)P'$ ce qui signifie que l'on peut factoriser $(X-\alpha)^k$ dans $(X^2-1)P'$ ou que α est une racine de $(X^2-1)P'$ d'ordre au moins k.

Supposons que α soit différent de 1 et -1. Alors α n'est pas racine de X^2-1. Donc nécessairement α est une racine d'ordre au moins k de P'. Ceci contredit le fait que α est une racine de P' d'ordre $k-1$. Nécessairement $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

Si α est un zéro de P dans $\mathbb{C}$ d'ordre de multiplicité k : $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

$\deg P = n$ donc $\deg P \geq 1$. Ainsi P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1). Or 1 et -1 sont les seules racines possibles de P dans $\mathbb{C}$.

Alors $\exists c \in \mathbb{C}$, $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $P = c(X-1)^p(X+1)^q$.

$P \neq 0_E$ donc $c \in \mathbb{C}^*$. Mieux, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $c \in \mathbb{R}^*$.

Ainsi $\exists c \in \mathbb{R}^*$, $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $P = c(X-1)^p(X+1)^q$.

$\boxed{3}$

$\deg P = n$ et $\deg\left(c(X-1)^p(X+1)^q\right) = p+q$ (car $c \in \mathbb{R}^*$). Alors $p+q=n$.

Or $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ donc $p \in [\![0,n]\!]$ et $q = n-p$.

$\underline{\underline{\exists c \in \mathbb{R}^*,\ \exists p \in [\![0,n]\!],\quad P = c\,(X-1)^p (X+1)^{n-p}.}}$

Posons $\forall r \in [\![0,n]\!]$, $\varphi_r = (X-1)^r (X+1)^{n-r}$.

$P = c\,\varphi_p$ donc $P \in \mathrm{Vect}(\varphi_p)$.

cela suffit pour dire que $SEP(f,\lambda) \subset \mathrm{Vect}(\varphi_p)$ car $0_E \in \mathrm{Vect}(\varphi_p)$!

Donc $\underset{\substack{\uparrow \\ SEP(f,\lambda) \neq \{0_E\}.}}{1 \leq} \dim SEP(f,\lambda) \leq \dim \mathrm{Vect}(\varphi_p) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi_p \neq 0_E}}{=} 1$

Alors $\underline{\underline{\dim SEP(f,\lambda) = 1}}$. Mieux $\underline{\underline{SEP(f,\lambda) = \mathrm{Vect}(\varphi_p)}}$.

Soit $r \in [\![0,n]\!]$. Calculons $f(\varphi_r)$.

$f(\varphi_r) = (X-1)(X+1)\left[r(X-1)^{r-1}(X+1)^{n-r} + (n-r)(X-1)^r(X+1)^{n-r-1}\right] - nX\varphi_r$.

$f(\varphi_r) = r(X-1)^r(X+1)^{n-r}(X+1) + (n-r)(X-1)(X-1)^r(X+1)^{n-r} - nX\varphi_r$.

$f(\varphi_r) = r(X+1)\varphi_r + (n-r)(X-1)\varphi_r - nX\varphi_r = (rX + r + nX - rX - n + r - nX)\varphi_r$

$\underline{\underline{f(\varphi_r) = (2r-n)\,\varphi_r.}}$

Ainsi $\varphi_p \in SEP(f,\lambda)$ et $f(\varphi_p) = (2p-n)\varphi_p$.

Alors $\lambda\varphi_p = f(\varphi_p) = (2p-n)\varphi_p$ et $\varphi_p \neq 0_E$. Donc $\underline{\underline{\lambda = 2p-n.}}$

$SEP(f,\lambda) = \mathrm{Vect}(\varphi_p)$ et $\varphi_p \neq 0_E$ donc $\underline{\underline{\varphi_p = (X-1)^p(X+1)^{n-p} \text{ est une base de}}}$

$\underline{\underline{SEP(f,\lambda) = SEP(f, 2p-n).}}$

c) Nous avons montré que $\underline{\underline{\boxed{\text{si}}\ \lambda \text{ est une valeur propre de } f}}$:

$\underline{\underline{\exists p \in [\![0,n]\!],}}$ $\left\{\begin{array}{l} \lambda = 2p-n \\ SEP(f,\lambda) = SEP(f, 2p-n) = \mathrm{Vect}(\varphi_p) = \mathrm{Vect}\left((X-1)^p(X+1)^{n-p}\right) \end{array}\right.$

Q3) d'après Q2 $Sp\, f \subset \{2p-n\, ;\, p\in [\![0,n]\!]\}$.

un calcul préliminaire (!!) dans Q2 nous a montré que que :
$\forall r\in [\![0,n]\!],\ f(\varphi_r)=(2r-n)\varphi_r$ et $\forall r\in [\![0,n]\!],\ \varphi_r\neq 0_E$.

Alors $\{2r-n\, ;\, r\in [\![0,n]\!]\}\subset Sp\, f$.

Ainsi $\underline{Sp\, f=\{2p-n\, ;\, p\in [\![0,n]\!]\}}$.

Soit $p\in [\![0,n]\!]$. $2p-n\in Sp\, f$ et donc $SEP(f,2p-n)=1$ d'après Q2.
Comme $f(\varphi_p)=(2p-n)\varphi_p$ et $\varphi_p\neq 0_E$: $SEP(f,2p-n)=Vect(\varphi_p)$.

Ainsi $\underline{\forall p\in [\![0,n]\!],\ SEP(f,2p-n)=Vect\left((X-1)^p(X+1)^{n-p}\right)}$.

<u>Exercice de contrôle</u>.. traiter LYON 1995 PB 1.

traiter ESSEC 91 M 2. Ici la réduction est au service de la détermination de la fonction génératrice donc de la loi d'une variable aléatoire discrète finie (thème du puzzle).

1

EXERCICE 37

Exercice **QNP-Oral**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et A est un élément non nul de E.

f est l'application qui à tout élément P de E associe la dérivée $n^{\text{ème}}$ de AP.

Montrer que f est un endomorphisme de E. f est-il diagonalisable ?

- Soit $P \in E$. $AP \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg AP \leqslant \deg A + n$.

Alors $(AP)^{(n)} \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg (AP)^{(n)} \leqslant \deg A + n - n = \deg A \leqslant n$.

Donc $(AP)^{(n)} \in E$. f est une application de E dans E.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P,Q) \in E^2,\ f(\lambda P+Q) = (A(\lambda P+Q))^{(n)} = (\lambda AP + AQ)^{(n)} = \lambda (AP)^{(n)} + (AQ)^{(n)} = \lambda f(P) + f(Q)$.

Donc f est linéaire. Finalement f est un endomorphisme de E.

- 1er Cas.. Supposons que $\deg A < n$. Posons $r = \deg A$. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$\deg X^k A = k+r$. Ainsi si $k+r<n$: $(X^kA)^{(n)} = 0$ et si $k+r \geqslant n$:

$\deg (X^kA)^{(n)} = k+r-n < k$ ou $\deg (X^kA)^{(n)} \leqslant k-1$

dans les deux cas $\deg f(X^k) \leqslant k-1$ (ai même pour $k=0$) !

$f(X^0) = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ f(X^k) \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^{k-1})$.

Donc la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure et les éléments de sa diagonale sont nuls.

Alors $\text{Sp} f = \{0\}$. Supposons f diagonalisable. Alors $E = SEP(f,0) = \text{Ker} f$.

Donc $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Or $f(X^n) = (X^nA)^{(n)}$ n'est pas nul car $\deg (X^nA) = n+r$ ... et $\deg (X^nA)^{(n)} = r$.

Ainsi f n'est pas diagonalisable.

2ème Cas.. Supposons que $\deg A = n$.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $a_n \neq 0$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$(AX^k)^{(n)} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^{i+k}\right)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} a_i (X^{i+k})^{(n)}$.

Alors $(AX^\ell)^{(n)} = \sum_{i=n-\ell}^{n} a_i (i+\ell)(i+\ell-1)\cdots(i+\ell-n+1) X^{i+\ell-n} = \sum_{i=n-\ell}^{n} a_i \frac{(i+\ell)!}{(i+\ell-n)!} X^{i+\ell-n}$

$$(AX^\ell)^{(n)} \underset{\uparrow}{=} \sum_{j=0}^{\ell} a_{n+j-\ell} \frac{(n+j)!}{j!} X^j .$$

$j=i+\ell-n$

Notons alors que $(AX^\ell)^{(n)} \in \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^\ell)$ et que le coefficient de X^ℓ dans $(AX^\ell)^{(n)}$ est : $a_n \frac{(n+\ell)!}{\ell!}$. Rappelons que $(AX^\ell)^{(n)} = f(X^\ell)$.

Dans ces conditions $\underline{\underline{1}}$°.- La matrice A de f dans la base canonique de $E = \mathbb{R}_n[X]$ est une matrice triangulaire supérieure.

$\underline{\underline{2}}$°.- L'ensemble des éléments de la diagonale de A est $\{ a_n \frac{(n+\ell)!}{\ell!} ; \ell \in [\![0, n]\!] \}$.

Ainsi $\mathrm{Sp}\, f = \mathrm{Sp}\, A = \{ a_n \frac{(n+\ell)!}{\ell!} ; \ell \in [\![0,n]\!] \}$. Posons $\forall \ell \in [\![0,n]\!], \alpha_\ell = a_n \frac{(n+\ell)!}{\ell!}$.

Montrons que $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts. Comme $a_n \neq 0$ il suffit de montrer que $\frac{\alpha_0}{a_n}, \frac{\alpha_1}{a_n}, \dots, \frac{\alpha_n}{a_n}$ sont deux à deux distincts.

Posons $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $\beta_\ell = \frac{(n+\ell)!}{\ell!}$. $\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{\beta_{\ell+1}}{\beta_\ell} = \frac{(n+\ell+1)!}{(\ell+1)!} \times \frac{\ell!}{(n+\ell)!}$.

$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{\beta_{\ell+1}}{\beta_\ell} = \frac{n+\ell+1}{\ell+1} = 1 + \frac{n}{\ell+1} > 1$ et $\beta_\ell > 0$.

Donc $\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $\beta_{\ell+1} > \beta_\ell$. $(\beta_\ell)_{\ell \in [\![0,n]\!]}$ est une suite strictement croissante.

Ainsi $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ sont deux à deux distincts. Il en est de même de $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Alors $\mathrm{card}\, \mathrm{Sp}\, f = n+1$ et $\dim E = n+1$.

Par conséquent f est diagonalisable.

Finalement $\underline{\underline{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \deg A = n.}}$

EXERCICE 38

Exercice **N1. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 6. D'après oral ESCP 1995 1.5.**

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = (2X+1)\,P + (1-X^2)\,P'$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Soit P un élément non nul de $\mathbb{R}[X]$ de degré r. Soit a_r le coefficient de X^r dans P. $a_r \neq 0$.

penser au cas où $r=0$!

$\deg (2X+1)P = r+1$ et $\deg (1-X^2)P' \leqslant r+1$.

Alors $\deg f(P) \leqslant r+1$. Cherchons le coefficient de X^{r+1} dans $f(P)$.

Le coefficient de X^{r+1} dans $(2X+1)P$ est $2a_r$.

Le coefficient de X^{r+1} dans $(1-X^2)P'$ est $-r\,a_r$.

Donc le coefficient de X^{r+1} dans $f(P)$ est $(2-r)\,a_r$.

$(2-r)a_r = 0 \Leftrightarrow r=2$ car $a_r \neq 0$.

Ainsi si $r \neq 2$ $\deg f(P) = r+1$. Si $r=2$ $\deg f(P) \leqslant r$.

Supposons qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $f(P) = \lambda P$ et que $r \neq 2$.

Alors $\deg f(P) = r+1$ et $\deg \lambda P \leqslant r$ ($\lambda = 0$ ...). Donc $r+1 = \deg f(P) \underset{f(P)=\lambda P}{=} \deg(\lambda P) \leqslant r$!!

Ainsi s'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $f(P) = \lambda P$: $r=2$.

<u>Si P est un vecteur propre de f alors $\deg P = 2$.</u>

Ainsi si $\lambda \in Sp f$: $SEP(f,\lambda) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $P = a + bX + cX^2$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$.

$P \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow (2X+1)P + (1-X^2)P' - \lambda P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$P \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow (2X+1)(a+bX+cX^2) + (1-X^2)(b+2cX) - \lambda(a+bX+cX^2) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$P \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow (a+b-\lambda) + (2a+b+2c-\lambda)X + (b+c-\lambda c)X^2 + (2c-2c)X^3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$P \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b-(\lambda-1)a = 0 \\ 2a+b+2c-\lambda b = 0 \\ b-(\lambda-1)c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (\lambda-1)a \\ 2a+2c-(\lambda-1)b = 0 \\ (\lambda-1)(a-c) = 0 \end{cases}$

1er cas. $\lambda=1$. $P\in Ke(f-\lambda Id_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 2a+2c+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-a \end{cases}.$

$Ke(f-\lambda Id_{\mathbb{R}[X]}) = \{a+0.X-aX^2 ; a\in\mathbb{R}\} = \{a(1-X^2) ; a\in\mathbb{R}\} = Vect(1-X^2).$

Alors $1\in Sp f$ et $SEP(f,1)=Vect(1-X^2)$

2ème cas. $\lambda\neq 1$ $P\in Ke(f-\lambda Id_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b=(\lambda-1)a \\ 2a+2c-(\lambda-1)b=0 \\ a-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=(\lambda-1)a \\ c=a \\ 4a-(\lambda-1)^2a=0 \end{cases}$

$P\in Ke(f-\lambda Id_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b=(\lambda-1)a \\ c=a \\ 0=(4-(\lambda-1)^2)a=(2-(\lambda-1))(2+\lambda-1)a=(3-\lambda)(\lambda+1)a \end{cases}$

a) $(3-\lambda)(\lambda+1)\neq 0$; c'est à dire $\lambda\notin\{-1,3\}$.

$P\in Ke(f-\lambda Id_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b=(\lambda-1)a \\ c=a \\ a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0 \Leftrightarrow P=0_{\mathbb{R}[X]}.$

donc λ n'est pas valeur propre de f.

b) $(3-\lambda)(\lambda+1)=0$, c'est à dire $\lambda\in\{-1,3\}$.

$P\in Ke(f-\lambda Id_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b=(\lambda-1)a \\ c=a \end{cases}$

$Ke(f-\lambda Id_{\mathbb{R}[X]}) = \{a+(\lambda-1)aX+aX^2 ; a\in\mathbb{R}\} = Vect(1+(\lambda-1)X+X^2).$

Alors $\lambda\in Sp f$ et $SEP(f,\lambda)=Vect(1+(\lambda-1)X+X^2).$

conclusion..

$Sp f=\{-1,1,3\}$;

$SEP(f,-1)=Vect(1-2X+X^2)=Vect((1-X)^2)$;

$SEP(f,1)=Vect(1-X^2)$;

$SEP(f,3)=Vect(1+2X+X^2)=Vect((1+X)^2)$.

EXERCICE 39

Exercice **N1. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 7. Oral ESCP 2011 2.17.**

Q1. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \neq 1$: $Q(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$.

b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto Q$ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q2. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Q3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ puis calculer son inverse A^{-1}. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?

Q4. a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$. Le complexe α est-il racine de $f^{-1}(Q)$? Avec quel ordre de multiplicité ?

b) En déduire les sous-espaces propres de l'endomorphisme f^{-1} puis montrer qu'ils sont aussi les sous-espaces propres de f.

Ce thème est abordé dans ESSEC 1984 MII, ECRICOME 2012 Pb.

On trouve dans ESSEC 1981 MI $P \to \left[\dfrac{1}{x-s}\displaystyle\int_s^x P(t)\,\mathrm{d}t\right]$ *et même* $P \to \left[\dfrac{1}{(x-s)^2}\displaystyle\int_s^x \left(\int_s^y P(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right]$.

Q1 a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\hat{P}$ la primitive de P sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 1. $\hat{P} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $\hat{P}(1) = 0$. Alors il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\hat{P} = (X-1)\,Q$. Comme $\deg \hat{P} \leqslant n+1$ et $\deg(X-1) = 1$: $\deg Q \leqslant n$.

Ainsi $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt = \dfrac{1}{x-1}\left[\hat{P}(x) - \hat{P}(1)\right] = \dfrac{\hat{P}(x)}{x-1} = \dfrac{(x-1)\,Q(x)}{x-1} = Q(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $Q(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$.

Ainsi on a montré l'existence d'un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R} - \{1\}$, $Q(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$.

Supposons que Q_1 soit un second polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $Q_1(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $(Q_1 - Q)(x) = Q_1(x) - Q(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt - \dfrac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt = 0$

$Q_1 - Q$ admet une infinité de racines donc $Q_1 - Q = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. $Q_1 = Q$.

Il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt$.

b) • Par définition f est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ f(\lambda P_1 + P_2)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (\lambda P_1 + P_2)(t)\,dt = \lambda \frac{1}{x-1}\int_1^x P_1(t)\,dt + \frac{1}{x-1}\int_1^x P_2(t)\,dt$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ f(\lambda P_1 + P_2)(x) = \lambda f(P_1)(x) + f(P_2)(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ \left(f(\lambda P_1 + P_2) - \lambda f(P_1) - f(P_2)\right)(x) = 0$.

$f(\lambda P_1 + P_2) - \lambda f(P_1) - f(P_2)$ est un polynôme qui admet une infinité de racines.

C'est donc le polynôme nul. Alors $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X],\ f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$. f est linéaire.

Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q2 Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. $f(P) = 0_E$. $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ \int_1^x P(t)\,dt = 0$. $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_1^x P(t)\,dt = 0$ (car $\int_1^1 P(t)\,dt = 0$).

En dérivant il vient $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$. $P = 0_E$.

Alors $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. f est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$ qui

est de dimension finie. Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

f est une application bijective de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Posons $S = f^{-1}(P)$. $f(S) = P$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1 \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x S(t)\,dt$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ (x-1)P(x) = \int_1^x S(t)\,dt$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)P(x) = \int_1^x S(t)\,dt$. En dérivant on obtient :

$f^{-1}(P)(x) = S(x) = P(x) + (x-1)P'(x)$. Alors $f^{-1}(P) = P + (X-1)P'$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f^{-1}(P) = P + (X-1)P'$.

(Q3) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Posons $H_k = f(X^k)$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ H_k(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x t^k\,dt = \frac{1}{k+1}\,\frac{x^{k+1}-1}{x-1}$.

1er cas $k=0$ $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ H_0(x) = 1$; $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ H_0 - 1 = 0$. $H_0 - 1$ admet une infinité de racines donc $H_0 - 1 = 0_E$. $H_0 = 1$.

2ème cas $k \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ H_k(x) = \frac{1}{k+1}\,\frac{1}{x-1}\,(x-1)\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} x^i$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ H_k(x) - \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} x^i = 0$.

Ainsi $H_k - \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} X^i$ est un polynôme qui admet une infinité de racines.

Alors $H_k - \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} X^i = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. $H_k = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} X^i$. Notons que ceci vaut aussi pour $k=0$.

Alors $\forall k \in [\![0, n]\!],\ f(X^k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} X^i$. Posons $\forall \ell \in [\![0, n]\!],\ a_\ell = \frac{1}{\ell+1}$.

Alors la matrice de f dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ & a_1 & & \vdots \\ & & \ddots & a_n \\ (0) & & & a_n \end{pmatrix} = A$!

$f^{-1}(1) = 1 + (X-1)\,0_{\mathbb{R}_n[X]} = 1$

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f^{-1}(X^k) = X^k + (X-1)kX^{k-1} = (k+1)X^k - kX^{k-1}$.

Or $A^{-1} = M_{(1, X, \dots, X^n)}(f^{-1})$ car $A = M_{(1, X, \dots, X^n)}(f)$.

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 2 & -2 & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & n+1 \end{pmatrix}$.

La matrice A (resp. A^{-1}) est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

Alors $\mathrm{Sp}A = \{ \frac{1}{k} ; k \in [\![1, n+1]\!] \}$ et $\mathrm{Sp}\, A^{-1} = \{ k ; k \in [\![1, n+1]\!] \}$.

$A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ (resp. $A^{-1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$) et A (resp. A^{-1}) admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Ainsi A (resp. A^{-1}) est diagonalisable.

<u>A et A^{-1} sont diagonalisables.</u>

<u>Remarque</u> .. f et f^{-1} sont diagonalisables, $\mathrm{Sp}\, f = \{ \frac{1}{k} ; k \in [\![1, n+1]\!] \}$ et $\mathrm{Sp}\, f^{-1} = \{ k ; k \in [\![1, n+1]\!] \}$.

Q4 a) Soit $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]$ et soit α un élément de $\mathbb{C}$.

Supposons que α soit un zéro de φ d'ordre de multiplicité k.

$\exists S \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi = (X-\alpha)^k S$ et $S(\alpha) \neq 0$.

$f^{-1}(\varphi) = \varphi + (X-1)\varphi' = (X-\alpha)^k S + (X-1)\left[k(X-\alpha)^{k-1} S + (X-\alpha)^k S' \right]$.

$f^{-1}(\varphi) = (X-\alpha)^{k-1} T$ avec $T = (X-\alpha) S + k(X-1) S + (X-1)(X-\alpha) S'$.

$T(\alpha) = k(\alpha-1) S(\alpha)$. Or $k \in \mathbb{N}^*$ et $S(\alpha) \neq 0$ donc $T(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

<u>1er cas</u> .. $\alpha \neq 1$. Alors $f^{-1}(\varphi) = (X-\alpha)^{k-1} T$ avec $T(\alpha) \neq 0$.

Si $k = 1$: α n'est pas un zéro de $f^{-1}(\varphi)$.

Si $k \geqslant 2$: α est un zéro de $f^{-1}(\varphi)$ d'ordre de multiplicité $k-1$.

<u>2ème cas</u> .. $\alpha = 1$.

$f^{-1}(\varphi) = (X-1)^{k-1} \left[(X-1) S + k(X-1) S + (X-1)^2 S' \right]$.

$f^{-1}(\varphi) = (X-1)^k \left[(k+1) S + (X-1) S' \right]$

$f^{-1}(\varphi) = (X-1)^k \hat{T}$ avec $\hat{T} = (k+1) S + (X-1) S'$.

$\hat{T}(1) = (k+1) S(1) \underset{\alpha=1}{=} (k+1) S(\alpha) \neq 0$.

Alors α est un zéro de $f^{-1}(\varphi)$ d'ordre de multiplicité k..

<u>Conclusion</u>.- $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. α est un zéro de Q d'ordre de multiplicité k.

Si $\alpha \neq 1$ et $k = 1$: α n'est pas un zéro de $f^{-1}(Q)$.

Si $\alpha \neq 1$ et $k \geq 2$: α est un zéro de $f^{-1}(Q)$ d'ordre $k-1$.

Si $\alpha = 1$: α est un zéro de $f^{-1}(Q)$ d'ordre k.

<u>b)</u> Rappelons que f^{-1} admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes et que f^{-1} est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$.

Ainsi les sous-espaces propres de f^{-1} sont de dimension 1.

Rappelons aussi que $Sp\, f^{-1} = \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Nous avons déjà vu que $f^{-1}(1) = 1$ comme dim $SEP(f^{-1}, 1) = 1$: $SEP(f^{-1}, 1) = Vect(1)$.

Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Soit P un élément non nul de $SEP(f^{-1}, k)$. $SEP(f^{-1}, k) = Vect(P)$.

Si P est constant égal à a : $f^{-1}(P) = P + (X-1)P' = a$ et $kP = ka$.

Comme $f^{-1}(P) = kP$: $a = ka$. Or $k \geq 2$ donc $a = 0$. Alors $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$!!

Ainsi P n'est pas constant. P admet au moins un zéro α dans $\mathbb{C}$. Soit k' son ordre de multiplicité.

$k \neq 0$ donc α est un zéro de kP d'ordre de multiplicité k'.

Ainsi α est un zéro de $f^{-1}(P)$ d'ordre de multiplicité k'.

D'après <u>a)</u> ceci exige que $\alpha = 1$.

Ainsi, dans $\mathbb{C}$, 1 est le seul zéro possible de P.

P n'étant pas constant, il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Comme 1 est son seul zéro possible : $\exists c \in \mathbb{R}^*$, $\exists r \in [\![1, n]\!]$, $P = c(X-1)^r$

$P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

De plus $kc(X-1)^r = kP = f^{-1}(P) = P + (X-1)P' = c(X-1)^r + (X-1)\left[cr(X-1)^{r-1}\right]$. Alors :

$kc(X-1)^r = c(r+1)(X-1)^r$, $c \neq 0$ et $(X-1)^r \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Donc $k = r+1$; $r = k-1$.

Finalement $P = c(X-1)^{k-1}$ avec $c \in \mathbb{R}^*$.

Alors $SEP(f^{-1}, k) = \mathrm{Vect}\left(c(X-1)^{k-1}\right) = \mathrm{Vect}\left((X-1)^{k-1}\right)$.

Notons que ce résultat vaut aussi pour $k = 1$.

$\mathrm{Sp}\, f^{-1} = \{ k \; ; \; k \in [\![1, n+1]\!] \}$ et $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $SEP(f^{-1}, k) = \mathrm{Vect}\left((X-1)^{k-1}\right)$.

Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$ et soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$f(P) = \frac{1}{k} P \Leftrightarrow P = f^{-1}\left(\frac{1}{k} P\right) = \frac{1}{k} f^{-1}(P) \Leftrightarrow f^{-1}(P) = kP$

donc $P \in SEP\left(f, \frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow P \in SEP(f^{-1}, k)$.

Alors $SEP\left(f, \frac{1}{k}\right) = SEP(f^{-1}, k)$.

Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $SEP\left(f, \frac{1}{k}\right) = SEP(f^{-1}, k) = \mathrm{Vect}\left((X-1)^{k-1}\right)$.

ce qui répond à la question car $\mathrm{Sp}\, f = \left\{ \frac{1}{k} \; ; \; k \in [\![1, n+1]\!] \right\}$ et $\mathrm{Sp}\, f^{-1} = \{ k \; ; \; k \in [\![1, n+1]\!] \}$.

EXERCICE 40

Exercice **N1. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 8. Oral ESCP 1998 2-2.**

E est l'espace vectoriel des applications polynômiales de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 4.

$\forall P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Phi(P)(x) = P(x) + 2x^4\, P\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Q1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

Q2. Exprimer Φ^2 en fonction de Φ et Id_E. Qu'en déduire pour les valeurs propres de Φ !

Q3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ.

On trouve dans EDHEC 2009 ex 3 $P \to X^{2n+1}\, P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ *dans* $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$

- Soit $P \in E$. $\exists (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$.

  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

  $\phi(P)(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k + 2x^4 \sum_{k=0}^{4} a_k \frac{1}{x^k} = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k + 2 \sum_{k=0}^{4} a_k x^{4-k}$

  $\phi(P)(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k + 2 \sum_{k=0}^{4} a_{4-k} x^k = \sum_{k=0}^{4} (a_k + 2a_{4-k}) x^k$.

  $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \phi(P)(x) = \sum_{k=0}^{4} (a_k + 2a_{4-k}) x^k}$. Ainsi $\phi(P) \in E$.

  $\forall P \in E$, $\phi(P) \in E$. $\underline{\phi \text{ est une application de } E \text{ dans } E}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q) \in E^2$.

  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi(\lambda P + Q)(x) = (\lambda P + Q)(x) + 2x^4 (\lambda P + Q)(\frac{1}{x})$.

  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi(\lambda P + Q)(x) = \lambda P(x) + Q(x) + \lambda 2x^4 P(\frac{1}{x}) + 2x^4 Q(\frac{1}{x})$.

  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi(\lambda P + Q)(x) = \lambda (P(x) + 2x^4 P(\frac{1}{x})) + Q(x) + 2x^4 Q(\frac{1}{x})$.

  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi(\lambda P + Q)(x) = \lambda \phi(P)(x) + \phi(Q)(x) = (\lambda \phi(P) + \phi(Q))(x)$.

  Donc $\phi(\lambda P + Q) = \lambda \phi(P) + \phi(Q)$

  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P, Q) \in E^2$, $\phi(\lambda P + Q) = \lambda \phi(P) + \phi(Q)$; $\underline{\phi \text{ est linéaire}}$.

Ainsi $\underline{\phi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

Q2 Soit P un élément de E.

$\phi(P)(x) = P(x) + 2x^4 P(\frac{1}{x})$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi(\phi(P))(x) = P(x) + 2x^4 P(\frac{1}{x}) + 2x^4 \left(P(\frac{1}{x}) + 2\left(\frac{1}{x}\right)^4 P\left(\frac{1}{1/x}\right)\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi^2(P)(x) = P(x) + 2x^4 P(\frac{1}{x}) + 2x^4 P(\frac{1}{x}) + 4P(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi^2(P)(x) = 2\left[P(x) + 2x^4 P(\frac{1}{x})\right] + 3P(x) = 2\varphi(P)(x) + 3P(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi^2(P)(x) = (2\varphi(P) + 3P)(x)$. Ainsi $\varphi^2(P) = 2\varphi(P) + 3P$.

$\forall P \in E$, $\varphi^2(P) = 2\varphi(P) + 3P = (2\varphi + 3\,Id_E)(P)$.

Alors $\underline{\underline{\varphi^2 = 2\varphi + 3\,Id_E}}$. On en déduit que $Sp\,\varphi \subset \{-1, 3\}$. Voir plus bas !

(Q3) $X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de φ dont les racines sont -1 et 3.

Alors $\underline{\underline{Sp\,\varphi \subset \{-1, 3\}}}$. Regardons alors si -1 et 3 sont des valeurs propres de φ.

Posons $\forall k \in [\![0, 4]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e_k(x) = x^k$. $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E

Soit P un élément de E et $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(P)(x) = \sum_{k=0}^{4} (a_k + 2a_{4-k}) x^k$ comme nous l'avons vu plus haut. Ainsi $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{4} (a_k + 2a_{4-k}) e_k$.

$P \in Ker(\varphi + Id_E) \Leftrightarrow \varphi(P) = -P \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{4} (a_k + 2a_{4-k}) e_k = -\sum_{k=0}^{4} a_k e_k$.

Or $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E donc :

$P \in Ker(\varphi + Id_E) \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, 4]\!]$, $a_k + 2a_{4-k} = -a_k \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, 4]\!]$, $a_{4-k} = -a_k$.

$$P \in Ker(\varphi + Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} a_4 = -a_0 \\ a_3 = -a_1 \\ a_2 = -a_2 \\ a_1 = -a_3 \\ a_0 = -a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = -a_1 \\ a_4 = -a_0 \end{cases}.$$

$Ker(\varphi + Id_E) = \{a_0 e_0 + a_1 e_1 - a_1 e_3 - a_0 e_4 \,;\, (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2\} = Vect(e_0 - e_4, e_1 - e_3)$.

$Ker(\varphi + Id_E) = Vect(e_0 - e_4, e_1 - e_3)$. -1 est valeur propre de φ et $SEP(\varphi, -1) = Vect(e_0 - e_4, e_1 - e_3)$.

$P \in Ker(\varphi - 3\,Id_E) \Leftrightarrow \varphi(P) = 3P \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{4} (a_k + 2a_{4-k}) e_k = 3 \sum_{k=0}^{4} a_k e_k$

$P \in \mathrm{Ker}(\varphi - 3\,\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \forall k \in [\![0,4]\!],\ a_k + 2a_{4-k} = 3a_k \Leftrightarrow \forall k \in [\![0,4]\!],\ a_{4-k} = a_k$.

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi - 3\,\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} a_4 = a_0 \\ a_3 = a_1 \\ a_2 = a_2 \\ a_1 = a_3 \\ a_0 = a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = a_1 \\ a_4 = a_0 \end{cases}.$$

$\mathrm{Ker}(\varphi - 3\,\mathrm{Id}_E) = \{ a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_1 e_3 + a_0 e_4\ ;\ (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \}$.

$\mathrm{Ker}(\varphi - 3\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_0 + e_4, e_1 + e_3, e_2)$.

Alors <u>3 est valeur propre de φ et $SEP(\varphi, 3) = \mathrm{Vect}(e_0 + e_4, e_1 + e_3, e_2)$.</u>

<u>conclusion..</u> <u>$\mathrm{Sp}\,\varphi = \{-1, 3\}$. $SEP(\varphi, -1) = \mathrm{Vect}(e_0 - e_4, e_1 - e_3)$ &</u>

<u>$SEP(\varphi, 3) = \mathrm{Vect}(e_0 + e_4, e_1 + e_3, e_2)$.</u>

<u>Remarque</u>.. Il n'est pas difficile de voir (et de montrer) que $(e_0 - e_4, e_1 - e_3)$ et $(e_0 + e_4, e_1 + e_3, e_2)$ sont des familles libres.

Alors $\dim SEP(\varphi, -1) = 2$ et $\dim SEP(\varphi, 3) = 3$.

Donc $\dim SEP(\varphi, -1) + \dim SEP(\varphi, 3) = 5 = \mathrm{card}\,\mathcal{B} = \dim E$.

Ainsi <u>φ est diagonalisable.</u>

De plus $\mathcal{B}' = (e_0 - e_4, e_1 - e_3, e_0 + e_4, e_1 + e_3, e_2)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de φ respectivement associés aux valeurs propres $-1, -1, 3, 3, 3$.

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

- $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. P est inversible comme matrice de passage.

- $P^{-1} M_{\mathcal{B}}(\varphi) P = \mathrm{Diag}(-1, -1, 3, 3, 3)$.

<u>Exercice..</u> Montrer que $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.