**EXERCICE 41** N1. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 9. LYON 1990 MI Pb 1.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 ; $E$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $n$.

Pour tout entier $k$ de $[\![0,n]\!]$, $\mu_k$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu_k(t) = t^k$.

**Q1** Montrer que, pour tout entier $k$ de $[\![0,n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^k\, e^t\, dt$ est convergente .

**Q2** Soit $f$ un élément de $E$. Montrer que l'on peut définir une fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, e^t\, \mathrm{d}t.$ Cette fonction $g$ dépend de $f$ et est notée $L(f)$.

**Q3** a) Calculer $L(\mu_0),\ L(\mu_1),\ L(\mu_2)$.

b) Montrer que, pour tout entier $k$ de $[\![0,n-1]\!]$ : $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$.

En déduire que : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ L(\mu_k) = (-1)^k\, k! \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}\, \mu_j$.

c) Montrer que, pour tout élément $f$ de $E$, $L(f)$ appartient à $E$.

On considère l'application $L\ :\ f \mapsto L(f)$ de $E$ vers $E$.

La question Q4 a) du texte.

**Q4** a) Montrer que $L$ est une application linéaire et injective.

*Ma question Q4 a).*

*Montrer que $L$ est un endomorphisme de $E$. Montrer que $L$ est injectif puis bijectif et déterminer $L^{-1}$.*

b) Écrire la matrice $M$ représentant l'endomorphisme $L$ de $E$ dans la base $(\mu_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Justifier l'inversibilité de $M$ et écrire $M^{-1}$.

La question Q5 du texte.

**Q5** a) Soient $\lambda$ une valeur propre de $L$, et $f$ un vecteur propre de $L$ associé à la valeur propre $\lambda$.

Montrer que $\lambda$ est non nul et que, pour tout réel $x$, $(1-\lambda)\, f(x) = \lambda\, f'(x)$.

Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}\, f(x)$.

Montrer que $\varphi$ est constante.

b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de $L$. Est-ce que $L$ est diagonalisable ?

*Ma question Q5 !*

*Montrer, sans calcul que 1 est la seule valeur propre de $L$. Montrer que le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\mu_0$.*

Q1.- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. $t \mapsto t^k e^t$ est continue donc localement intégrable sur $]-\infty, 0]$.

$\lim\limits_{t\to-\infty} (t^2\, t^k e^t) = 0$ ; $\exists A \in \mathbb{R}_-^*$, $\forall t \in ]-\infty, A]$, $|t^2 t^k e^t| \leq 1$

$\forall t \in ]-\infty, A]$, $0 \leq |t^k e^t| \leq \frac{1}{t^2}$

Or $\int_{-\infty}^{A} \frac{dt}{t^2}$ converge ; par conséquent : $\int_{-\infty}^{A} |t^k e^t| dt$ converge (règles de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions positives).

Donc $\int_{-\infty}^{A} t^k e^t\, dt$ est absolument convergente donc convergente.

Par conséquent : $\underline{\int_{-\infty}^{0} t^k e^t\, dt \text{ existe pour tout } k \in [\![0, n]\!]}$.

Q2.. Soit $f$ un élément de $E = \mathbb{R}_n[X]$. $\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f_k$

$f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $t \mapsto f(t)e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent : $\int_0^x f(t)e^t dt$ existe pour tout réel $x$.

$\forall t \in ]-\infty, 0]$, $f(t)e^t = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (t^k e^t)$. Comme pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\int_{-\infty}^{0} t^k e^t dt$

existe : $\int_{-\infty}^{0} (\sum\limits_{k=0}^{n} a_k (t^k e^t)) dt$ aussi ! $\int_{-\infty}^{0} f(t)e^t\, dt$ converge.

Par conséquent pour tout réel $x$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t dt$ existe ; $\underline{x \mapsto e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t\, dt}$ est

donc une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Q 3 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $L(f_0)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^t dt = e^{-x} \lim\limits_{A\to-\infty} (\int_A^x e^t dt) = e^{-x} \times \lim\limits_{A\to-\infty} (e^x - e^A) = e^{-x}e^x = 1$

$\underline{L(f_0) = 1}$.

$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{x} e^t dt = e^x$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_{-\infty}^{x} te^t dt = \lim\limits_{A\to-\infty} (\int_A^x te^t dt) = \lim\limits_{A\to-\infty} \left[ [te^t]_A^x - \int_A^x e^t dt \right] = xe^x - e^x$

Donc $L(f_1)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} te^t dt = x - 1$ ; $\underline{L(f_1) = -f_0 + f_1}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_{-\infty}^{x} t^2 e^t dt = \lim\limits_{A\to-\infty} (\int_A^x t^2 e^t dt) = \lim\limits_{A\to-\infty} \left([t^2 e^t]_A^x - 2\int_A^x te^t dt\right) = x^2 e^x - 2\int_{-\infty}^{x} te^t\, dt$

$\int_{-\infty}^{x} t^2 e^t dt = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$L(f_2)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^2 e^t\,dt = (x^2-2x+2)$. $\quad$ $\underline{\underline{L(f_2) = 2f_0 - 2f_1 + f_2}}$

b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $A \in ]-\infty, 0]$. $\displaystyle\int_A^x t^{k+1}e^t\,dt = \left[t^{k+1}e^t\right]_A^x - \int_A^x (k+1)t^k e^t\,dt = x^{k+1}e^x - A^{k+1}e^A - (k+1)\int_A^x t^k e^t\,dt$

En faisant tendre $A$ vers $-\infty$ on obtient : $\displaystyle\int_{-\infty}^x t^{k+1}e^t\,dt = x^{k+1}e^x - (k+1)\int_{-\infty}^x t^k e^t\,dt$ (... les intégrales convergent)

En multipliant par $e^{-x}$ il vient : $L(f_{k+1})(x) = x^{k+1} - (k+1)\,L(f_k)(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f_{k+1})(x) = f_{k+1}(x) - (k+1)L(f_k)(x) = \big(f_{k+1} - (k+1)L(f_k)\big)(x)$.

Donc : $\underline{\underline{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ L(f_{k+1}) = f_{k+1} - (k+1)L(f_k)}}$.

Déduisons en que $L(f_k) = (-1)^k\, k! \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} f_j$ (pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, comme ça de conception !)

Si $k=0$ c'est clair, supposons $k \in [\![1, n]\!]$.

$\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $L(f_{j+1}) = f_{j+1} - (j+1)L(f_j)$.

$\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\dfrac{L(f_{j+1})}{(j+1)!} + \dfrac{L(f_j)}{j!} = \dfrac{f_{j+1}}{(j+1)!}$ (division par $(j+1)!$).

$\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\dfrac{(-1)^{j+1}L(f_{j+1})}{(j+1)!} - (-1)^j\dfrac{L(f_j)}{j!} = \dfrac{(-1)^{j+1}f_{j+1}}{(j+1)!}$ (multiplication par $(-1)^{j+1}$).

Donc : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{(-1)^{j+1}L(f_{j+1})}{(j+1)!} - \frac{(-1)^j L(f_j)}{j!}\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^{j+1}f_{j+1}}{(j+1)!}$.

Or : $\displaystyle\frac{(-1)^{k-1+1}L(f_k)}{k!} - \frac{(-1)^0 L(f_0)}{0!} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^{j+1}f_{j+1}}{(j+1)!} = \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j f_j}{j!}$.

Il vient alors $\displaystyle\frac{(-1)^k L(f_k)}{k!} = f_0 + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j f_j}{j!} = \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}f_j$.

Donc $L(f_k) = \dfrac{k!}{(-1)^k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}f_j$

Et finalement $\underline{\underline{L(f_k) = (-1)^k\, k! \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}f_j}}$ et ceci pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Remarque... s'obtient aussi à l'aide d'une petite récurrence.

c) Soit $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k \in E$. toutes les intégrales convergent.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(t) e^t dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \, e^{-x} \int_{-\infty}^{x} \varphi_k(t) e^t dt = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k L(\varphi_k)\right)(x)$

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $L(\varphi_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} \varphi_j \in E$

Donc $L(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k L(\varphi_k) \in E$

$\forall f \in E$, $L(f) \in E$.

Q4.. a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E^2$. Toutes les intégrales cvg

$\forall x \in \mathbb{R}$, $[L(\lambda f + g)](x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} (\lambda f + g)(t) e^t dt = \lambda e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t) e^t dt + e^{-x} \int_{-\infty}^{x} g(t) e^t dt$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $[L(\lambda f + g)](x) = \lambda L(f)(x) + L(g)(x) = (\lambda L(f) + L(g))(x)$.

Donc $L(\lambda f + g) = \lambda L(f) + L(g)$

Donc $L$ est un endomorphisme de $E$

Soit $f \in \operatorname{Ker} L$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t) e^t dt = 0$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{x} f(t) e^t dt = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{0} f(t) e^t dt + \int_{0}^{x} f(t) e^t dt = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t) e^t dt = -\int_{-\infty}^{0} f(t) e^t dt$ ; $x \mapsto \int_0^x f(t) e^t dt$ est donc constante sur $\mathbb{R}$ et est la primitive de $t \mapsto f(t) e^t$ qui s'annule en 0. donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) e^x = 0$ (la dérivée d'une fonction constante est nulle). Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. $f = 0_E$.

Donc $\operatorname{Ker} L = \{0_E\}$.

L est alors injectif et donc bijectif car L est un endomorphisme de E et dim E = n+1 < +∞ !

Remarque.. Arrêtons nous quelques instants pour stigmatiser le côté artificiel et BIDON de cet exercice.

De quoi parle-t-on ? De pas grand chose ! En effet déterminons $L^{-1}$

Soit $g \in E$ et $f = L^{-1}(g)$.

$g = L(f)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t) e^t dt$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) e^t dt$

Dérivons ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x g(x) + e^x g'(x) = f(x) e^x$

Il vient alors $f(x) = g(x) + g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $\underline{\underline{\forall g \in E,\ L^{-1}(g) = g + g'}}$. En clair $L^{-1} = Id_E + D$ où $D$ est l'opérateur de dérivation ! Indigeste non ! mais le plus beau est à venir.

b) Rappelons que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $L(f_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} f_j$

Donc si $\mathcal{B} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ : $M = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \cdots & (-1)^k k! & \cdots & (-1)^n n! \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{k-1} k! & \cdots & (-1)^{n-1} n! \\ 0 & 0 & 1 & & (-1)^{k-2}\frac{k!}{2!} & \cdots & (-1)^{n-2}\frac{n!}{2!} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1 & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Notons bien que $M \in \underline{\underline{M_{n+1}}}(\mathbb{R})$.

$M$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée de 1

Ceci donne donc de l'inversibilité à $M$ ce qui était déjà clair car $M$ est la matrice d'un automorphisme de $E$ !

$M^{-1} = M_{\mathcal{B}}(L^{-1})$. $\underline{L^{-1}(f_0) = f_0}$ car $L(f_0) = f_0$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. $L(f_{k+1}) = f_{k+1} - (k+1) L(f_k)$ donc

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{k+1} = L^{-1}(f_{k+1}) - (k+1) f_k$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $L^{-1}(f_{k+1}) = f_{k+1} + (k+1) f_k = (k+1) f_k + f_{k+1}$

Ceci donne $\underline{\underline{\forall k \in [\![1, n]\!],\quad L^{-1}(f_k) = k f_{k-1} + f_k.}}$

Ceci confirme le $L^{-1} = Id_E + D$ !

$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & 1 & 2 & \\ & & \ddots & n \\ (0) & & & 1 \end{bmatrix}$ (matrice triangulaire à diagonale unité ... par surprise ... $M$ ... )

__Exercice__.. Inverser $M^{-1}$ en résolvant un système (réponse : on retrouve $M$ !! mais la résolution du système est intéressante à mettre en forme).

Q5.. L'apothéose ! Camarade concepteur l'algèbre <u>LINEAIRE</u> n'est pas compatible avec l'usage immodéré de la boisson

En effet Q4 b) donne $\mathrm{Sp}(M) = \{1\}$. Alors si $M$ est diagonalisable,

$\Pi$ est semblable à $I_{n+1}$ donc égale à $I_{n+1}$ ( $PI_{n+1}P^{-1} = I_{n+1}$ !!) ce qui n'est pas !

Donc $\Pi$ n'est pas diagonalisable. L ne l'est pas davantage.

Alors résoudre une équation différentielle pour prouver cela est inévitable.

Mais... exécutons-nous !

<u>a)</u> $\lambda \in \operatorname{Spec} L$ et $f$ est un vecteur propre de L associé à $\lambda$.

$0 \notin \operatorname{Spec} L$ car L est injective $(\operatorname{Ker}(L - 0.Id_E) = \operatorname{Ker} L = \{0_E\})$.

$L(f) = \lambda f$. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^{t}\,dt = \lambda f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{t}\,dt = \lambda e^{x} f(x)$. Par dérivation (déjà justifiée) :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)e^{x} = \lambda e^{x} f(x) + \lambda e^{x} f'(x)$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda f(x) + \lambda f'(x)$.

<u>$\forall x \in \mathbb{R},\ (1-\lambda) f(x) = \lambda f'(x)$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x} f(x)$ ; $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \frac{\lambda-1}{\lambda} e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x} f(x) + e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x} f'(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}\underbrace{\left((1-\lambda)f(x) - \lambda f'(x)\right)}_{=0}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = 0$. $\varphi$ est donc constante. $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = c$

<u>b)</u> Ceci donne alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{\underline{f(x) = c\, e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}x}}}$. c n'est pas nul car $f \neq 0_E$.

Si $\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$, f admet une limite <u>nulle</u> en $-\infty$ et <u>infinie</u> en $+\infty$, ceci est incompatible avec le caractère polynômiale de f (si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ <u>ou</u> P admet une limite finie en $+\infty$ <u>ET</u> $-\infty$ <u>ou</u> P admet une limite infinie en $+\infty$ <u>ET</u> $-\infty$ ; OK?!)

Si $\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$, f admet une limite infinie en $-\infty$ et nulle en $+\infty$, ceci est impossible car $f \in E$.

Donc $\frac{1-\lambda}{\lambda} = 0$ ! $\lambda = 1$ ... et $f \in \operatorname{Vect}(1) = \operatorname{Vect}(y_0)$

<u>Ceci prouve que</u> 1°.. $\operatorname{Spec}(L) \subset \{1\}$

2°.. $F_1 = \operatorname{Ker}(L - Id_E) \subset \operatorname{Vect}(y_0)$.

<u>Or</u> $L(y_0) = y_0$ et $y_0 \neq 0_E$ <u>donc</u> $1 \in \operatorname{Spec}(L)$ et $y_0 \in F_1$ (ou $\operatorname{Vect}(y_0) \subset F_1$).

"Articulation fondamentale"

<u>conclusion</u>.. $\operatorname{Spec} L = \{1\}$ et $F_1 = \operatorname{Ker}(L - Id_E) = \operatorname{Vect}(y_0)$.

L n'est pas diagonalisable car $\dim F_1 = 1 < n+1 = \dim E$.

<u>Remarque</u>.. Vous souvenez-vous qu'en 3/2 à LYON on diagonalisait un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique était diagonale !! Guignol n'est toujours pas mort.

EXERCICE 42

R P1

Exercice | ESCP 2002 2.20 | Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus $2n$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{2n})$.

On considère $\Phi$ définie sur $E$ par : $\forall P \in E,\ \Phi(P)(X) = (\frac{1}{4} - X^2)P'(X) + 2nXP(X)$.

Q1. Vérifier que $\Phi$ définit un endomorphisme de $E$.

Q2. a) Soit $\lambda$ entier relatif tel que $-n \leqslant \lambda \leqslant n$.

Trouver $(\alpha, \beta)$ dans $\mathbb{N}^2$ pour que le polynôme $P(X) = (X + \frac{1}{2})^\alpha (X - \frac{1}{2})^\beta$ de $E$ vérifie $\Phi(P) = \lambda P$.

b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\Phi$. L'endomorphisme $\Phi$ est-il diagonalisable ?

Q3. Déterminer la matrice $A$ de $\Phi$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Q4. Déterminer une matrice $A'$ dont les valeurs propres sont les nombres $0, 1, \dots, 2n$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

Q5. Construire un endomorphisme $\Lambda$ de $E$ tel que $\Lambda(P)$ s'exprime en fonction de $P, P'$ et $P''$ et admettant 0, 1, 4, 9, ..., $(2n)^2$ comme valeurs propres.

---

Q1 • Soit $P \in E$. $\Phi(P)$ est un polynôme.

$\deg (\frac{1}{4} - X^2)P' \leq 2n+1$ et $\deg(2nXP) \leq 2n+1$ car $\deg P \leq 2n$.

Ainsi $\deg \Phi(P) \leqslant 2n+1$.

Soit $a_{2n}$ le coefficient de $X^{2n}$ dans $P$.

Le coefficient de $X^{2n+1}$ dans $(\frac{1}{4} - X^2)P'$ (resp. $2nXP$) est $-2n a_n$ (resp. $2n a_n$).

Ainsi le coefficient de $X^{2n+1}$ dans $\Phi(P)$ est $-2n a_n + 2n a_n = 0$. Alors $\deg \Phi(P) \leq 2n$.

<u>$\forall P \in E, \Phi(P) \in E$</u>

• Soit $(P, Q) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Phi(\lambda P + Q) = (\frac{1}{4} - X^2)(\lambda P + Q)' + 2nX(\lambda P + Q) = (\frac{1}{4} - X^2)(\lambda P' + Q') + 2nX(\lambda P + Q)$.

$\Phi(\lambda P + Q) = \lambda\left[(\frac{1}{4} - X^2)P' + 2nXP\right] + \left[(\frac{1}{4} - X^2)Q' + 2nXQ\right] = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$.

<u>$\Phi$ est linéaire.</u>

Finalement <u>$\Phi$ est un endomorphisme de $E$.</u>

Q2 a) Soit $\lambda \in [\![-n, n]\!]$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ ~~tel que~~ $P = (X+\frac{1}{2})^\alpha (X - \frac{1}{2})^\beta \in E$.

A des petits abus près : $\Phi(P) = (\frac{1}{2} - X)(\frac{1}{2} + X)\left[\alpha(X+\frac{1}{2})^{\alpha-1}(X-\frac{1}{2})^\beta + \beta(X+\frac{1}{2})^\alpha (X-\frac{1}{2})^{\beta-1}\right] + 2nX(X+\frac{1}{2})^\alpha (X-\frac{1}{2})^\beta$

$\Phi(P) = (X+\frac{1}{2})^\alpha (X-\frac{1}{2})^\beta \left[\alpha(\frac{1}{2} - X) - \beta(X+\frac{1}{2}) + 2nX\right] = \left((2n - \alpha - \beta)X + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)P$.

$P$ n'est pas nul donc $\Phi(P) = \lambda P$ si et seulement si $\lambda = (2n - \alpha - \beta)X + \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Alors $\phi(P)=\lambda P \Leftrightarrow \begin{cases} 2n-\alpha-\beta=0 \\ \frac{\alpha-\beta}{2}=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=2n-\alpha \\ \lambda=\frac{\alpha-(2n-\alpha)}{2}=\alpha-n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=n+\lambda \\ \beta=n-\lambda \end{cases}$

Observons que $n+\lambda\in[\![0,2n]\!]$, $n-\lambda\in[\![0,2n]\!]$ et $(n+\lambda)+(n-\lambda)=2n$.

Si $\lambda\in[\![-n,n]\!]$, il existe un couple $(\alpha,\beta)$ et un seul tel que le polynôme $P=(X+\frac{1}{2})^{\alpha}(X-\frac{1}{2})^{\beta}$ appartienne à E et vérifie $\phi(P)=\lambda P$ ; $(\alpha,\beta)=(n+\lambda,n-\lambda)$.

b) Soit $\lambda\in[\![-n,n]\!]$. Posons $P_\lambda=(X+\frac{1}{2})^{n+\lambda}(X-\frac{1}{2})^{n-\lambda}$.

$P_\lambda\in E$, $P_\lambda\neq 0_E$ et $\phi(P_\lambda)=\lambda P_\lambda$. Alors $\lambda$ est valeur propre de $\phi$ et $P_\lambda$ est un vecteur propre associé.

Ceci étant vrai pour tout $\lambda\in[\![-n,n]\!]$ on peut déjà dire que $-n,-(n-1),\dots,0,1,\dots,n$ sont $2n+1$ valeurs propres distinctes de $\phi$. Comme $\phi$ est un endomorphisme de E qui est de dimension $2n+1$, $\phi$ n'a pas d'autres valeurs propres.

$\mathrm{Sp}\,\phi=[\![-n,n]\!]$. De plus $\phi$ ayant $2n+1$ valeurs propres distinctes et E étant de dimension $2n+1$, les sous-espaces propres de $\phi$ sont de dimension 1.

Alors ce qui précède permet de dire que $\forall\lambda\in[\![-n,n]\!]$, $\mathrm{SEP}(\phi,\lambda)=\mathrm{Vect}\left((X+\frac{1}{2})^{n+\lambda}(X-\frac{1}{2})^{n-\lambda}\right)$

Q3 • $\phi(1)=(\frac{1}{4}-X^2)\times 0+2n\,X\times 1=2n\,X$. $\phi(1)=2nX$

• $\forall k\in[\![1,2n]\!]$, $\phi(X^k)=(\frac{1}{4}-X^2)kX^{k-1}+2n\,X\times X^k$.

$\forall k\in[\![1,2n]\!]$, $\phi(X^k)=(2n-k)X^{k+1}+\frac{1}{4}k\,X^{k-1}$.

Posons $\forall k\in[\![0,2n-1]\!]$, $a_k=2n-k$ et $\forall k\in[\![1,2n]\!]$, $b_k=k/4$.

La matrice de $\phi$ dans la base $\mathcal{B}=(1,X,\dots,X^{2n})$ est $A=\begin{pmatrix} 0 & b_1 & & (0) \\ a_0 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & 0 & b_{2n} \\ (0) & & a_{2n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

**Q4** Pour tout $\lambda \in [\![-n, n]\!]$, $(P_\lambda)$ est une base de $SEP(\varphi, \lambda)$ et $E = \bigoplus_{\lambda=-n}^{n} SEP(\varphi, \lambda)$.

Alors $(P_{-n}, P_{-n+1}, \dots, P_{-1}, P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n)$ est une base, que nous notons $\mathcal{B}'$, de $E$ constituée de vecteurs propres de $\varphi$ respectivement associés aux valeurs propres $-n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$.

Posons $\psi = \varphi + n\,Id_E$.

1) $\psi$ est un endomorphisme de $E$ comme combinaison linéaire de deux endomorphismes de $E$.

2) $\forall \lambda \in [\![-n, n]\!]$, $\psi(P_\lambda) = \varphi(P_\lambda) + n P_\lambda = (\lambda + n) P_\lambda$

Alors $\mathcal{B}'$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $\psi$ associés aux valeurs propres $0, 1, 2, \dots, 2n$.

Alors $Sp\,\psi = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$. Posons $A' = A + n I_n$.

$A' = M_{\mathcal{B}}(\psi)$ donc $Sp\,A' = Sp\,\psi = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$.

De plus $A' = \begin{pmatrix} n & b_1 & & (0) \\ a_0 & n & \ddots & \\ & \ddots & n & b_{2n} \\ (0) & & a_{2n-1} & n \end{pmatrix}$. $\underline{\underline{A' = A + n I_n \text{ est une matrice de } M_{2n+1}(\mathbb{R}) \text{ dont les valeurs propres sont } 0, 1, 2, \dots, 2n \text{ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.}}}$

**Q5** Posons $\Lambda = \psi^2$. $\forall \lambda \in [\![-n, n]\!]$, $\Lambda(P_\lambda) = \psi^2(P_\lambda) = (\lambda + n)^2 P_\lambda$ car $\psi(P_\lambda) = (\lambda + n) P_\lambda$

Alors $\mathcal{B}'$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $\Lambda$ respectivement associés aux valeurs propres $0, 1, 2^2, \dots, (2n)^2$. $\underline{\underline{Sp\,\Lambda = \{k^2 ; k \in [\![0, 2n]\!]\}}}$.

Soit $P \in E$, $\Lambda(P) = \psi^2(P) = (\varphi + n\,Id_E)^2(P) = \varphi^2(P) + 2n\,\varphi(P) + n^2 P$.

car $(\varphi + n Id_E)^2 = \varphi^2 + 2n\,\varphi + n^2 Id_E$ car $\varphi \circ Id_E = Id_E \circ \varphi$

$\Lambda(P) = \varphi\left(\left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + 2nXP\right) + 2n\left(\left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + 2nXP\right) + n^2 P$

$\Lambda(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)\left[-2XP' + \left(\frac{1}{4} - X^2\right)P'' + 2nP + 2nXP'\right] + 2n(X+1)\left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + 2nXP) + n^2 P$. Il est alors clair que $\underline{\underline{\Lambda(P) \text{ s'exprime en fonction de } P, P' \text{ et } P'' \text{ et ceci pour tout } P \text{ élément de } E}}$.

Ainsi $\underline{\underline{\Lambda = (\varphi + n\,Id_E)^2 \text{ répond à la question.}}}$

R.



# EXERCICE 43.

Exercice | N1 | **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 1.**

$E$ est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si $f$ est un élément de $E$, $\varphi(f)$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$ n'ayant pas de valeur propre.

*Thème abordé dans EDHEC 1997 Ex 1.*

*Dans oral ESCP 1994 2.22 on trouve la même chose avec* $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ *et dans 2010 2.4 la même chose avec* $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

---

• Soit $f \in E$. $\varphi(f)$ est la primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0 donc $\varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $\varphi(f) \in E$.

$\forall f \in E,\ \varphi(f) \in E$. <u>$\varphi$ est une application de $E$ dans $E$.</u>

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E^2$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda f+g)(x) = \int_0^x (\lambda f+g)(t)\,dt = \lambda \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt = \lambda\,\varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(x)$.

Donc $\varphi(\lambda f+g) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda f+g) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g)$. <u>$\varphi$ est linéaire.</u>

<u>$\varphi$ est un endomorphisme de $E$.</u>

• Supposons que $\varphi$ possède une valeur propre $\lambda$. Soit $f$ un vecteur propre associé.

$f \neq 0_E$ et $\varphi(f) = \lambda f$. $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\,dt = \lambda f(x)$.

<u>1er cas</u>.. $\lambda = 0$. $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\,dt = 0$. En dérivant il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. $f = 0_E$ !!

<u>2ème cas</u>.. $\lambda \neq 0$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(t)\,dt$. Rappelons que $x \mapsto \int_0^x$ est la primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0. Alors $x \mapsto \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En dérivant on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - \frac{1}{\lambda} f(x) = 0$.

$x \mapsto \frac{x}{\lambda}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{1}{\lambda}$. Le cours montre alors que :

$\exists C \in \mathbb{R},\ f(x) = C e^{\frac{1}{\lambda}x}$. Or $f(0) = \frac{1}{\lambda}\int_0^0 f(t)\,dt = 0$. Alors $0 = f(0) = C e^{\frac{1}{\lambda}\times 0} = C$. $C = 0$.

On retrouve encore $f = 0_E$ !! Finalement <u>$\mathrm{Sp}\,\varphi = \emptyset$.</u> <u>Exercice</u>.. Notez que $\varphi$ est injectif mais $\varphi$ n'est pas surjectif

# EXERCICE 44 — Ancienne correction.



**Exercice** E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\forall f \in E,\quad \varphi(f)(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x \in ]0,1] \end{cases}$$

Q1.. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de E. $\varphi$ est-il injectif ? surjectif ?

Q2.. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\varphi$.

---

Q1.. Soit $f \in E$. Montrons que $\varphi(f) \in E$. $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est la primitive de $f$ sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0. Ainsi $\varphi(f)$ est dérivable en tout point de $]0,1]$ comme produit de 2 fonctions dérivables en tout point de $]0,1]$. En particulier $\varphi(f)$ est continue en tout point de $]0,1]$.

Montrons que $\varphi(f)$ est continue en 0.

Soit F une primitive de $f$ sur $[0,1]$. $\forall x \in ]0,1]$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$.

Donc $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0) = \varphi(f)(0)$; ainsi $\varphi(f)$ est continue en 0.

Finalement : $\forall f \in E$, $\varphi(f) \in E$. Montrons alors la linéarité de $\varphi$.

Soient $f$ et $g$ deux éléments de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in ]0,1]$, $\varphi(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f+g)(t)\,dt = \lambda\,\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt = \lambda\,\varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(x)$

$\varphi(\lambda f+g)(0) = (\lambda f+g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda\varphi(f)(0) + \varphi(g)(0) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(0)$

Ainsi $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(\lambda f+g)(x) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(x)$ et donc $\varphi(\lambda f+g) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g)$. Ceci achève de prouver la linéarité de $\varphi$.

<u>$\varphi$ est un endomorphisme de E.</u>

Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. $\varphi(f) = 0_E$. En particulier $\forall x \in ]0,1]$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = 0$.

Donc $\forall x \in ]0,1]$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$ et par conséquent : $\forall x \in [0,1]$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$ !

En dérivant il vient : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 0$. $f = 0_E$.

Finalement : $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$; <u>$\varphi$ est un endomorphisme injectif.</u>

Nous avons vu que si $f \in E$, $\varphi(f)$ est dérivable sur $]0,1]$. Ainsi $\operatorname{Im}\varphi$ est contenu dans l'ensemble des éléments de E dérivables sur $]0,1]$. Posons $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$; $g$ est un élément de E non dérivable en 1/2 donc $g \in E$ mais $g \notin \operatorname{Im}\varphi$. $\operatorname{Im}\varphi \neq E$.

<u>$\varphi$ est un endomorphisme non surjectif.</u>

(Q2).. Analyse.. Soit $\lambda \in Sp(\varphi)$. $\exists f \in E$, $f \neq 0_E$ et $\varphi(f) = \lambda f$.

$\lambda$ n'est pas nul car $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}(\varphi - 0\,Id_E) = \{0_E\}$.

Ainsi $\forall x \in ]0,1]$, $f(x) = \frac{1}{\lambda}\varphi(f)(x) = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$. Alors $f$ est dérivable en tout point de $]0,1]$.

$\forall x \in ]0,1]$, $\lambda x f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. En dérivant il vient : $\forall x \in ]0,1]$, $\lambda f(x) + \lambda x f'(x) = f(x)$

$\forall x \in ]0,1]$, $f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x) = 0$ (OK ?) ceci est maintenant du cours

**Lemme** .. $a$ est une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des applications $f$, dérivables de $I$ dans $\mathbb{R}$, et telles que : $\forall x \in I$, $f'(x) - a(x)f(x) = 0$ est $\operatorname{Vect}(\omega)$ où $\omega : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{A(x)} \end{array}$ $A$ étant une primitive de $a$ sur $I$.

▲ Soit $f \in \mathcal{S}$. $\forall x \in I$, $f'(x) - a(x)f(x) = 0$. $\forall x \in I$, $e^{A(x)}f'(x) - a(x)e^{A(x)}f(x) = 0$.

Ainsi $e^A f' - a e^A f = 0$ ; $e^A f' - (e^A)' f = 0$ ; $\dfrac{e^A f' - (e^A)' f}{(e^A)^2} = 0$.

Donc $\left(\dfrac{f}{e^A}\right)' = 0$ ; $\dfrac{f}{e^A}$ est constante sur $I$. $\exists c \in \mathbb{R}$, $f = c\,e^A$. $f \in \operatorname{Vect}(e^A) = \operatorname{Vect}(\omega)$.

Réciproquement. Soit $f \in \operatorname{Vect}(\omega)$. $\exists c \in \mathbb{R}$, $f = c\,e^A$.

$f' - a f = (c e^A)' - a(c e^A) = c A' e^A - c a e^A = c a e^A - c a e^A = 0$ ; $f \in \mathcal{S}$.

Ceci achève de prouver le lemme. ▼

Reprenons notre démonstration : $\forall x \in ]0,1]$, $f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x) = 0$.

Ce qui précède prouve que $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in ]0,1]$, $f(x) = c\,e^{A(x)}$ où $A$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1-\lambda}{\lambda x}$ sur $]0,1]$. Ainsi en prenant $\forall x \in ]0,1]$, $A(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)$ nous obtenons :

$\forall x \in ]0,1]$, $f(x) = c\,e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)} = c\,|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = c\,x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$

$f$ n'étant pas nulle : $c$ n'est pas nul. Par conséquent $f$ ayant une limite finie en $0$ : $f(0)$, $x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ admet une limite finie en $0$. Ceci exige $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0$ donc $\lambda \in ]0,1]$.

Ainsi $\lambda \in ]0,1]$.

Soit alors $g_\lambda$ le prolongement par continuité de la fonction : $\begin{array}{l} ]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \end{array}$

Notons que $g_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ lorsque $\lambda \in ]0,1[$ et

$g_\lambda(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$ lorsque $\lambda = 1$.

Notons alors que $f \in \text{Vect}(g_\lambda)$.

Ainsi si $\lambda \in Sp(\varphi)$ : $\lambda \in ]0,1]$ et $SEP(\varphi,\lambda) \subset \text{Vect}(g_\lambda)$. Cette inclusion est en fait une égalité car $\dim SEP(\varphi,\lambda) \geqslant 1$ et $\dim \text{Vect}(g_\lambda) = 1$

Cette analyse nous donne alors

1) $Sp(\varphi) \subset ]0,1]$.
2) $\forall \lambda \in Sp(\varphi)$, $SEP(\varphi,\lambda) = \text{Vect}(g_\lambda)$.

"Synthèse" : Notons que $Sp(\varphi) = ]0,1]$.

Il nous suffit de prouver que $]0,1] \subset Sp(\varphi)$. Soit $\lambda \in ]0,1]$.

$g_\lambda \in E$ , $g_\lambda \neq 0_E$ . Notons que $\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$ et ainsi nous aurons $\lambda \in Sp(\varphi)$.

* $\lambda = 1$. $\forall x \in [0,1]$, $g_\lambda(x) = 1$.

$\varphi(g_\lambda)(0) = g_\lambda(0) = \lambda g_\lambda(0)$ car $\lambda = 1$.

$\forall x \in ]0,1]$, $\varphi(g_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x 1\,dt = \frac{1}{x} \times x = 1 = 1 \times 1 = \lambda g_\lambda(x)$

Ainsi $\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$.

* $\lambda \in ]0,1[$. $\forall x \in ]0,1]$, $g_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ et $g_\lambda(0) = 0$.

$\varphi(g_\lambda)(0) = g_\lambda(0) = 0 = \lambda \times 0 = \lambda g_\lambda(x)$

$\forall x \in ]0,1]$, $\varphi(g_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \frac{1}{x}\left[\lambda t^{1/\lambda}\right]_0^x = \frac{1}{x}\lambda x^{1/\lambda} = \lambda x^{1/\lambda - 1} = \lambda g_\lambda(x)$. ← (*)

(*) ceci est quelques chose à méditer ...

Donc $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(g_\lambda)(x) = \lambda g_\lambda(x)$ ; $\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$.

Donc $g_\lambda \in E$, $g_\lambda \neq 0_E$ et $\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$. $\lambda \in Sp(\varphi)$.

Finalement : $Sp(\varphi) = ]0,1]$ et $\forall \lambda \in ]0,1]$, $SEP(\varphi,\lambda) = \text{Vect}(g_\lambda)$.

Rappelons que si $\lambda = 1$ : $\forall x \in [0,1]$, $g_\lambda(x) = 1$

si $\lambda \in ]0,1[$, $g_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \in ]0,1] \end{cases}$ .

R.

EXERCICE 45



**Question 5** **HEC 2012-5-S20** $\boxed{\text{F 2}}$

Soit $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit $T$ l'application qui à toute fonction $f$ de $E$ associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in ]0, +\infty[,\ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Q1. Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$. Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels $\lambda$ et les fonctions $f$ vérifiant $T(f) = \lambda f$.

*Question de cours.* *Théorème de la limite centrée.*

---

Q1 • Soit $f \in E$. Posons $F = T(f)$ et montrons que $F \in E$.

Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $P_f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. $P_f$ est la primitive de $f$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0 ($f$ est continue sur $[0, +\infty[$).

$P_f$ est donc de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$. De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$.

Alors par produit $F = T(f)$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$.

Donc $F$ est largement continue sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{P_f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{P_f(x) - P_f(0)}{x - 0} = P_f'(0) = f(0)$. Ainsi $F$ est continue en 0.

$F$ est donc continue sur $[0, +\infty[$. $F \in E$.

$\forall f \in E$, $T(f) \in E$. <u>$T$ est une application de $E$ dans $E$.</u>

• Montrons que $T$ est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f, g) \in E^2$.

→ $T(\lambda f + g)(0) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0) = (\lambda T(f) + T(g))(0)$.

→ Soit $x \in ]0, +\infty[$. $T(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f + g)(u)\,du = \lambda \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt$.

$T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x)$.

Ainsi $\forall x \in [0, +\infty[$, $T(\lambda f + g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x)$. $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f, g) \in E^2$, $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$. <u>$T$ est linéaire.</u>

Finalement <u>$T$ est un endomorphisme de $E$</u>

• Soit $f \in \operatorname{Ker} T$. $T(f) = 0_E$. $\forall x \in ]0, +\infty[$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = 0$. $\forall x \in ]0, +\infty[$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$.

Mieux $\forall x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$. En dérivant on obtient : $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = 0$. $f = 0$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, T = \{0_E\}$. <u>$T$ est injectif.</u>

<u>Remarque</u>.- Nous avons vu que si $f \in E$, $T(f)$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$. donc les éléments de $\mathrm{Im}\, T$ sont de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$. Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $h(x) = |x-1|$. $h$ est continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1. Ainsi $h \in E$ mais $h \notin \mathrm{Im}\, T$

Alors $T$ n'est pas surjectif.

<u>Exercice</u>.. Montrer que $\mathrm{Im}\, T$ est l'ensemble des éléments $g$ de $E$ tels que :

1) $g$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ ;

2) $\lim_{x \to 0^+} (x\, g'(x)) = 0$.

(Q2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\mathcal{E}_\lambda = \{f \in E \mid T(f) = \lambda f\}$. Notons que $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$.

Si $\lambda = 0$ : $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_0 = \mathrm{Ker}\, T = \{0_E\}$. Donc nous supposerons dans ce qui suit : $\lambda \neq 0$

<u>Analysons un peu</u>. Partons d'un élément $f$ appartenant à $\mathcal{E}_\lambda$.

Notons de nouveau $P_f$ la primitive de $f_\lambda$ sur $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

$T(f)(0) = \lambda f(0)$ donc $f(0) = \lambda f(0)$. $(\lambda - 1) f(0) = 0$. Notons que si $\lambda \neq 1$ : $f(0) = 0$.

$\forall x \in ]0,+\infty[$, $P_f'(x) = f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{\lambda x} P_f(x)$.

$\forall x \in ]0,+\infty[$, $P_f'(x) - \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = 0$.

Notons que $x \mapsto \frac{1}{\lambda} \ln x$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction continue sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{\lambda x}$.

Le cours permet de dire que : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in ]0,+\infty[$, $P_f(x) = C\, e^{\frac{1}{\lambda} \ln x}$.

$\forall x \in ]0,+\infty[$, $f(x) = P_f'(x) = \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = C \frac{1}{\lambda x} e^{\frac{1}{\lambda} \ln x} = C \frac{1}{\lambda x} x^{1/\lambda} = \frac{C}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda} - 1}$.

<u>Donc $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in ]0,+\infty[$, $f(x) = d\, x^{\frac{1}{\lambda} - 1}$ et $f(0) = 0$ si $\lambda \neq 1$</u>. Poursuivons l'analyse.

$f$ est continue en 0 donc $f(0) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left( d\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} \right)$. Notons que cette limite est finie !

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ $\quad \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left( x^{\frac{1}{\lambda}-1} \right) = +\infty$ donc nécessairement $d = 0$.

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ $\quad f(0) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} (d\, x^0) = d$ et $\forall x \in \, ]0, +\infty[$, $f(x) = d\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} = d\, x^0 = d$.

donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = d$. Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_1(x) = 1$. $\underline{f = d\, f_1}$

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$ $\quad$ Alors $f(0) = 0$ car $\lambda \neq 1$ et ainsi $f(0) = d \times 0$.

De plus $\forall x \in \, ]0, +\infty[$, $f(x) = d \times x^{\frac{1}{\lambda}-1}$

Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \in \, ]0, +\infty[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. $\underline{f = d\, f_\lambda}$.

Résumons cette analyse.

Si $\lambda = 0$ : $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ : $\mathcal{S}_\lambda \subset \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ donc si $\lambda = 1$ :

$\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{Vect}(f_1)$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

Notons que $0_E \in \mathcal{S}_\lambda$, que $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda \in \, ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$ et

$\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \, ]0, 1[$.

Alors 1°/ $\forall \lambda \in \, ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[$, $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$.

2°/ $\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{Vect}(f_1)$ où $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_1(x) = 1$.

3°/ $\forall \lambda \in \, ]0, 1[$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Reste à envisager deux réciproques.

Notons que $\mathcal{S}_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$ donc $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $E$ ceci pour tout $\lambda$ dans $\mathbb{R}$.

$f_1$ est continue sur $[0, +\infty[$, $f_1 \in E$. $\quad T(f_1)(0) = f_1(0)$.

$\forall x \in \, ]0, +\infty[$, $T(f_1)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 1\, dt = \frac{1}{x} \times x = 1 = f_1(x)$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $T(f_1)(x) = 1 \times f_1(x)$. $T(f_1) = 1 \times f_1$. $f_1 \in \mathcal{S}_1$.

Donc $\mathrm{Vect}(f_1) \subset \mathcal{S}_1$. Alors $\mathcal{S}_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$.

Soit $\lambda \in ]0,1[$. $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$. Pour montrer que $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{S}_\lambda$ il suffit de montrer que $f_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ car $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

$f_\lambda$ est continue sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x^{\frac{1}{\lambda}-1} \underset{\frac{1}{\lambda}-1>0}{=} 0 = f_\lambda(0)$ donc $f_\lambda$ est continue en $0$.

Ainsi $f_\lambda$ est continue sur $[0,+\infty[$. $f_\lambda \in E$.

$T(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0) = 0 = \lambda f_\lambda(0)$. Soit $x \in ]0,+\infty[$.

Soit $\varepsilon \in ]0,+\infty[$. $\int_\varepsilon^x f_\lambda(t)\,dt = \int_\varepsilon^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \left[\frac{t^{1/\lambda}}{1/\lambda}\right]_\varepsilon^x = \lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]$.

Alors $\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \lim\limits_{\varepsilon\mapsto 0^+}\left(\lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]\right) = \lambda x^{1/\lambda}$ car $\frac{1}{\lambda} > 0$.

Alors $T(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{x}\lambda x^{1/\lambda} = \lambda\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f_\lambda(x)$.

Finalement $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(f_\lambda)(x) = \lambda f_\lambda(x)$. $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ ; $f_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$.

Alors $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{S}_\lambda$ et finalement $\mathcal{S}_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

<u>Conclusion</u>
- $\forall \lambda \in ]-\infty,0] \cup ]1,+\infty[$, $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$
- $\mathcal{S}_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$ où $f_1$ est l'élément de $E$ défini par $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) =$
- Si $\lambda \in ]0,1[$, $\mathcal{S}_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $f_\lambda$ est l'élément de $E$ défini par :

  $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Ainsi $\to$ $\mathrm{Sp}\, T = ]0,1]$

$\to$ $\mathrm{SEP}(T,\lambda) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ pour tout $\lambda \in ]0,1]$.

<u>Remarque</u>. - On aurait sans doute pu poser $\forall \lambda \in ]0,1]$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ ...

R



**EXERCICE 46** **N1+** **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 3. D'après oral ESCP 2000 2-18 et 2011- 2.2.**

$E$ est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $f$ est un élément de $E$, $\varphi(f)$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.

Q2. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'ensemble des fonctions impaires de $E$.

Q3. Soit $\lambda$ un réel non nul. On se propose de trouver $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

a) Soit $f$ un élément de $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$. Montrer que $f$ est paire sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Trouver une relation entre $f$ et $f'$ sur $]0, +\infty[$. En déduire $f$ sur $\mathbb{R}^*$.

Montrer que si $\lambda$ appartient à $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ alors $f$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

b) Utiliser ce qui précède pour déterminer $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

Q4. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\varphi$.

*A noter que dans ESCP 2000 2-18 on demande de montrer que* $\operatorname{Sp}\varphi = \mathbb{R}$ *ce qui est faux...*

---

Q1 • Soit $f$ un élément de E et F une primitive de $f$ sur IR.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi(f)(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \dfrac{1}{2x}\left(F(x) - F(-x)\right).$

F et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur IR. Alors $x \mapsto F(-x)$ et F sont dérivables sur IR.

Par différence $x \mapsto F(x) - F(-x)$ est dérivable sur IR.

Comme $x \mapsto \frac{1}{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par produit <u>$\varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$</u>.

Alors <u>$\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$</u>. Montrons que $\varphi(f)$ est continue en 0.

F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0)$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{F(-x)-F(0)}{(-x)-0} = f(0)$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt\right) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(-x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0} + \frac{F(-x)-F(0)}{(-x)-0}\right)\right] = \frac{1}{2}(f(0)+f(0))$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt\right) = f(0) = \varphi(f)(0)$. <u>$\varphi(f)$ est continue en 0.</u>

Finalement $\varphi(f)$ est continue sur IR. $\varphi(f) \in E$.

$\forall f \in E,\ \varphi(f) \in E$. <u>$\varphi$ est une application de E dans E.</u>

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E^2$

$\rightarrow$ $\varphi(\lambda f+g)(0) = (\lambda f+g)(0) = \lambda f(0)+g(0) = \lambda \varphi(f)(0) + \varphi(g)(0) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(0)$.

$\rightarrow$ soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\varphi(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}(\lambda f+g)(t)\,dt = \lambda \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt + \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} g(t)\,dt = \lambda\varphi(f)(x)+\varphi(g)(x).$$

$\varphi(\lambda f+g)(x) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f+g)(x) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(x)$ ; $\varphi(\lambda f+g) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in E^2$, $\varphi(\lambda f+g) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g)$. $\varphi$ est linéaire.

ce qui achève de montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de E.

(Q2) Soit $f$ un élément de E.

- Supposons que $f$ est impaire sur $\mathbb{R}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(f)(x) = \frac{1}{2x} \times 0 = 0$.

$f(0) = f(-0) = -f(0)$ ; $2f(0)=0$ ; $f(0)=0$. Alors $\varphi(f)(0) = f(0) = 0$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)(x)=0$. $\varphi(f) = 0_E$. $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

- Supposons que $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)(x) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$.

Mieux $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$ car $\int_{-0}^{0} f(t)\,dt = 0$.

Soit F une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) - F(-x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$.

En dérivant il vient $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) - (-F'(-x)) = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ ; $f$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Ker $\varphi$ est l'ensemble des fonctions impaires de E.

(Q3) a) Rappelons qu'ici $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$. $\varphi(f) = \lambda f$. $f = \frac{1}{\lambda}\varphi(f)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\lambda}\varphi(f)(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(-x) = \frac{1}{\lambda}\varphi(f)(-x) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{-2x}\int_{x}^{-x} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\varphi(f)(x) = f(x).$$

De plus $f(-0) = f(0)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. <u>$f$ est paire sur $\mathbb{R}$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\lambda} \varphi(f)(x)$ et nous avons montré que $\varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Alors <u>$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.</u>

Soit $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$. $\qquad f$ est paire donc $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt = 2(F(x)-F(0))$.

$\forall x \in ]0,+\infty[$, $\lambda f(x) = \varphi(f)(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{x}(F(x)-F(0))$.

$\forall x \in ]0,+\infty[$, $\lambda x f(x) = F(x) - F(0)$. En dérivant il vient $\forall x \in ]0,+\infty[$, $\lambda f(x) + \lambda x f'(x) = f(x)$.

Donc $\forall x \in ]0,+\infty[$, $f'(x) + \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{x} f(x) = 0$ ; $\forall x \in ]0,+\infty[$, $f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{1}{x} f(x) = 0$

Or $x \mapsto \frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$. Le cours montre alors

qu'il existe $c$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in ]0,+\infty[$, $f(x) = c\, e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x}$.

$\forall x \in ]0,+\infty[$, $f(x) = c\, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = c\,|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

$\forall x \in ]-\infty,0[$, $f(x) = f(-x) \underset{-x \in ]0,+\infty[}{\overset{\uparrow}{=}} c\,|-x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = c\,|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

<u>Donc $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = c\,|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.</u>

Supposons que $\lambda \in ]-\infty,0[ \cup ]1,+\infty[$. Alors $\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$. Donc $\lim_{x \to 0} |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = +\infty$.

Or $f$ est continue en 0 donc $f$ admet une limite finie en 0. Alors nécessairement

$c = 0$ ($c > 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(c|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0}(c|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}) = -\infty$ si $c < 0$).

<u>Si $\lambda \in ]-\infty,0[ \cup ]1,+\infty[$, $f = 0_E$ ... et $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.</u>

Notons que si $\lambda \in ]0,1[$ $\lim_{x\to 0}(c|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}) = 0$ donc $f(0) = 0$ car $f$ est continue en 0.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} c\,|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Notons que l'on pouvait presque écrire que

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c\,|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ ... si l'on s'écartait.

Si $\lambda = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = c$. Comme $f$ est continue en $0$ : $f(0) = c$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$.

b) Nous venons de voir que si $\lambda \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$, $\underline{\underline{\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{0_E\}}}$.

Supposons que $\lambda = 1$. Nous venons de voir que si $f \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_E)$ alors

$\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$. $\underline{\underline{\text{Posons } \forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = 1}}$. $f = c f_1$.

Ainsi $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Vect}(f_1)$. Montrons l'inclusion inverse. $f_1 \in E$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(f_1)(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} 1 \, dt = \frac{1}{2x}(x - (-x)) = 1 = f_1(x)$.

$\varphi(f_1)(0) = f_1(0)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f_1)(x) = f_1(x)$. Ainsi $\varphi(f_1) = f_1$. $f_1 \in \operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{Id}_E)$.

Donc $\operatorname{Vect}(f_1) \subset \operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{Id}_E)$ car $\operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Finalement $\underline{\underline{\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Vect}(f_1) \text{ si } \lambda = 1}}$. $\underline{\underline{f_1 \neq 0_E \text{ donc } 1 \in \operatorname{Sp}\varphi \text{ et } \operatorname{SEP}(\varphi, 1) = \operatorname{Vect}(f_1)}}$.

Supposons que $\lambda \in ]0, 1[$. Posons $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}}$.

Nous avons vu dans a) que si $f \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_E)$, $\exists c \in \mathbb{R}$, $f = c f_\lambda$. Alors $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Vect}(f_\lambda)$.

Montrons l'inclusion inverse. $f_\lambda$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \to 0} |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \underset{\uparrow}{=} 0 = f_\lambda(0)$.

$\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$

Finalement $f_\lambda$ est continue sur $\mathbb{R}$. $f_\lambda \in E$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_\lambda(-x) = |-x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = f_\lambda(x)$ et $f_\lambda(-0) = f_\lambda(0)$. $f_\lambda$ est paire sur $\mathbb{R}$.

$\varphi(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0) = 0 = \lambda \times 0 = \lambda f_\lambda(0)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f_\lambda(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par parité}}}{=} \frac{1}{x} \int_0^x f_\lambda(t)\,dt$.

$$\int_0^x f_\lambda(u)\,du = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^x |t|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^x t^{\frac{1}{\lambda} - 1}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\lambda t^{\frac{1}{\lambda}}\right]_\varepsilon^x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\lambda x^{\frac{1}{\lambda}} - \lambda \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}\right) \overset{\frac{1}{\lambda} > 0}{\underset{\downarrow}{=}} \lambda x^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Donc $\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x} \times \lambda x^{\frac{1}{\lambda}} = \lambda\, x^{\frac{1}{\lambda} - 1} = \lambda f_\lambda(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$.

$f_\lambda$ est paire.

$$\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{2(-x)} \int_{x}^{-x} f_\lambda(t)\,dt = \varphi(f_\lambda)(-x) \overset{-x \in \mathbb{R}_+^*}{\underset{\downarrow}{=}} \lambda f_\lambda(-x) \underset{\downarrow}{=} \lambda f_\lambda(x).$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f_\lambda)(x) = \lambda f_\lambda(x)$ ; $\varphi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ ; $f_\lambda \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Comme $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ : $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de montrer que si $\lambda \in ]0,1[$, $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

Donc $\forall \lambda \in ]0,1[$, $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\varphi$ et $SEP(\varphi, \lambda) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ (... car $f_\lambda \neq 0_E$).

Q4 Notons que $x \mapsto x$ est une fonction impaire appartenant à $E$ et qui n'est pas la fonction nulle. Alors $\mathrm{Ker}\,\varphi \neq \{0_E\}$. $0$ est valeur propre de $\varphi$.

Ce qui précède montre que :

1) $\mathrm{Sp}\,\varphi = [0,1]$.

2) $SEP(\varphi, 0)$ est l'ensemble des fonctions impaires de $E$.

3) $SEP(\varphi, 1) = \mathrm{Vect}(f_1)$ où $f_1$ est définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1$.

4) Pour tout $\lambda \in ]0,1[$, $SEP(\varphi, \lambda) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $f_\lambda$ est définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

... ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ pour ceux qui osent.

# 1 EXERCICE 47



**Exercice** **Réécriture d'un exercice de l'oral ESCP 2008.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $e_n$ l'application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0,+\infty[,\ e_n(x) = x^n \exp(-x) = x^n\, e^{-x}$.

On donne un entier $N$ non nul. Soit $E$ l'espace vectoriel engendré par $(e_0, e_1, e_2, \ldots, e_N)$.

Q1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, \ldots, e_N)$. est une base de $E$. En déduire la dimension de $E$.

Q2. Les éléments de $E$ sont en particulier des applications dérivables.

On notera $\Delta$ l'opérateur de dérivation dans $E$. Ainsi : $\forall f \in E, \Delta(f) = f'$.

a) Démontrer que $\Delta$ est un endomorphisme de $E$.

b) Écrire la matrice $A$ de $\Delta$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire que $\Delta$ est un automorphisme de $E$.

c) Trouver les ( !) valeurs propres et les sous-espaces propres de $\Delta$. $\Delta$ est-il diagonalisable ? !

Q3. a) Soit $k$ un élément de $[\![0, N]\!]$ et $x$ un élément de $[0,+\infty[$.

Montrer que la série de terme général $w_n = e_k(x+n)$ est convergente.

b) $f$ est un élément de $E$. Démontrer que la série de terme général $u_n = f(n+x)$ est convergente pour tout élément $x$ de $[0,+\infty[$. On note alors $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+x)$.

Vérifier que $F \in E$, et que l'application $\Phi : f \mapsto F$ ainsi définie est un endomorphisme de $E$.

c) Écrire la matrice de $\Phi$ dans la base $\mathcal{B}$ (on pourra poser $\forall j \in [\![0, N]\!],\ A_j = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell^j\, e^{-\ell}$).

d) Démontrer que $\Phi \circ \Delta = \Delta \circ \Phi$.

---

Q1 $\mathcal{B}$ est par définition de $E$ une famille génératrice de $E$. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k e_k = 0_E$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ \sum_{\ell=0}^{N} \alpha_k x^\ell e^{-x} = 0$ et $e^{-x} \neq 0$. Alors :

$\forall x \in [0,+\infty[,\ \sum_{k=0}^{N} \alpha_k x^\ell = 0$. Le polynôme $\sum_{\ell=0}^{N} \alpha_\ell X^k$ a donc une infinité de racines.

C'est donc le polynôme nul. Alors ses coefficients sont nuls. Donc $\forall k \in [\![0, N]\!], \alpha_k = 0$.

Ce qui achève de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Alors $\underline{\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_N) \text{ est une base de } E \text{ et donc } \dim E = N+1}$.

**Exercice..** Retrouver ce résultat en montrant que $E$ et $\mathbb{R}_N[X]$ sont isomorphes.

**Q2** a) • $\forall (f,g)\in E^2, \forall \lambda\in\mathbb{R}, \quad \Delta(\lambda f+g)=(\lambda f+g)'=\lambda f'+g'=\lambda\Delta(f)+\Delta(g)$. <u>$\Delta$ est linéaire.</u>

• Soit $f\in E$. $\exists(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_N)\in\mathbb{R}^{N+1}$, $f=\sum_{k=0}^{N}\alpha_k e_k$.

$\forall x\in[0,+\infty[, \quad f(x)=\sum_{k=0}^{N}\alpha_k x^k e^{-x}$.

$\forall x\in[0,+\infty[, \quad \Delta(f)=f'(x)=\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\left[kx^{k-1}e^{-x}-x^k e^{-x}\right]$ ... à un abus près.

Alors $\Delta(f)=\sum_{k=1}^{N}k\alpha_k e_{k-1}-\sum_{k=0}^{N}\alpha_k e_k=\sum_{k=0}^{N-1}(k+1)\alpha_{k+1}e_k-\sum_{k=0}^{N}\alpha_k e_k$.

donc $\Delta(f)=\sum_{k=0}^{N-1}\left[(k+1)\alpha_{k+1}-\alpha_k\right]e_k-\alpha_N e_N$.

donc $\Delta(f)\in \mathrm{Vect}(e_0,e_1,\dots,e_N)=E$. <u>$\forall f\in E, \ \Delta(f)\in E$.</u>

Ainsi <u>$\Delta$ est un endomorphisme de $E$.</u>

b) $\forall x\in[0,+\infty[, \ e_0(x)=e^{-x}$. $\forall x\in[0,+\infty[, \ \Delta(e_0)(x)=e_0'(x)=-e^{-x}$.

<u>$\Delta(e_0)=-e_0$.</u> Soit $k\in[\![1,N]\!]$.

$\forall x\in[0,+\infty[, \ e_k(x)=x^k e^{-x}$ et $e_k'(x)=kx^{k-1}e^{-x}-x^k e^{-x}=k\,e_{k-1}-e_k$.

donc <u>$\Delta(e_k)=e_k'=k\,e_{k-1}-e_k$</u> pour tout $k\in[\![1,N]\!]$

La matrice de $\Delta$ dans la base $\mathcal{B}$ est $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & & (0)\\ & -1 & 2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ (0) & & -1 & N\\ & & & -1\end{pmatrix}$

A est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale alors A est inversible.

Ainsi <u>$\Delta$ est un automorphisme de $E$.</u>

c) La matrice A étant triangulaire supérieure, son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux. Ainsi $Sp\,A=\{-1\}$

Alors <u>$Sp\,\Delta=\{-1\}$.</u>

Supposons $\Delta$ diagonalisable. Alors $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp\,\Delta} SEP(\Delta, \lambda) = SEP(\Delta, -1)$.

Donc $E = \mathrm{Ker}(\Delta + Id_E)$. Alors $\Delta + Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\Delta = -Id_E$.

Or $N \geqslant 1$. Alors $\Delta(e_1) = -e_1$. Or $\Delta(e_1) = e_0 - e_1$ donc $e_0 = 0_E$ !!

Ainsi <u>$\Delta$ n'est pas diagonalisable.</u>

<u>Remarque</u>.. Si le texte avait autorisé $N=0$, $\Delta$ eût été diagonalisable si et seulement si $N=0$. Que l'on s'en souvienne ....

(Q3) <u>a)</u> Soit $k \in [\![0, N]\!]$ et $x \in [0, +\infty[$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $e_k(x+n) = (x+n)^k e^{-(x+n)} = e^{-x}(x+n)^k e^{-n}$.

Alors $e_k(x+n) \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-x} n^k e^{-n}$ donc $n^2 e_k(x+n) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x} n^{k+2} e^{-n}$.

Or $\lim_{n \to +\infty} (n^{k+2} e^{-n}) = 0$ par croissance comparée.

Donc $\lim_{n \to +\infty} (n^2 e_k(x+n)) = 0$. Alors 1) $e_k(x+n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_k(x+n) = (x+n)^k e^{-(x+n)} \geqslant 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$.

3) La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $w_n = e_k(x+n)$ converge.

<u>Pour tout élément $x$ de $\mathbb{R}^+$ pour tout élément $k$ de $[\![0, N]\!]$ la série de terme général $w_n = e_k(x+n)$ est convergente.</u>

b) $f \in E$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $f = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k e_k$. Soit $x \in [0, +\infty[$

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x+n) = \sum_{\ell=0}^{N} \alpha_\ell e_\ell(x+n)$

2) Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, la série de terme général $e_k(x+n)$ converge.

Alors la série de terme général $f(x+n)$ converge comme combinaison linéaire de $N+1$ séries convergentes.

<u>Pour tout $x$ dans $[0, +\infty[$ la série de terme général $f(x+n)$ converge.</u>

Notons que <u>$\forall x \in [0, +\infty[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_\ell \left( \sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) \right)$.</u>

Soit $x \in [0, +\infty[$. $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{\ell=0}^{N} \alpha_\ell \left( \sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) \right)$.

Soit $k \in [\![0, N]\!]$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-(x+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^j x^{k-j} e^{-x} e^{-n} \right).$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{k} \left( \binom{k}{j} x^{k-j} n^j e^{-n} \right) \right)$$

Soit $j \in \underline{\underline{\mathbb{N}}}$. $\lim_{n \to +\infty} (n^{j+2} e^{-n}) = 0$. Alors 1) $n^j e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
$\uparrow$
$|e^{-1}| < 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^j e^{-n} \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

3) La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $n^j e^{-n}$ converge.

Alors pour tout $j$ dans $[\![0, k]\!]$, la série de terme général $\binom{k}{j} x^{k-j} n^j e^{-n}$ converge.

Ceci permet d'écrire : $\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) = e^{-x} \sum_{j=0}^{k} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k}{j} x^{k-j} n^j e^{-n} \right)$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) = e^{-x} \sum_{j=0}^{k} \left( \binom{k}{j} x^{k-j} \sum_{n=0}^{+\infty} n^j e^{-n} \right)$.

...

Posons pour tout $j$ dans $\mathbb{N}$, $A_j = \sum_{n=0}^{+\infty} n^j e^{-n}$ (nous avons montré que cette série converge).

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) = e^{-x} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A_j \, x^{k-j}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A_j \, e_{k-j}(x).$$

Alors $F(x) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A_j \, e_{k-j}(x)$.

Donc $F = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A_j \, e_{k-j}$.

$F$ est donc combinaison linéaire d'éléments de la famille $(e_0, e_1, \dots, e_N)$.

Donc <u>$F$ appartient à $E$.</u>

<u>Remarque</u>.. <u>plus précisément</u> : $F \overset{i=k-j}{=} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{k-i}}_{\binom{k}{i}} A_{k-i} \, e_i$

$$F = \sum_{i=0}^{N} \left( \sum_{k=i}^{N} \alpha_k \binom{k}{i} A_{k-i} \right) e_i .$$

Donc <u>$\phi$ est une application de $E$ dans $E$.</u>

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f,g) \in E^2$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $\phi(\lambda f+g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda f+g)(x+n) \overset{\text{toutes les séries convergent}}{=} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n)$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $\phi(\lambda f+g)(x) = \lambda \phi(f)(x) + \phi(g)(x) = (\lambda \phi(f) + \phi(g))(x)$.

Ainsi $\phi(\lambda f+g) = \lambda \phi(f) + \phi(g)$.

<u>$\phi$ est linéaire.</u>

<u>$\phi$ est un endomorphisme de $E$.</u>

c) Nous avons vu que $\forall k\in[\![0,N]\!]$, $\forall x\in[0,+\infty[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A_j\,e_{k-j}(x)$

Alors $\forall k\in[\![0,N]\!]$, $\displaystyle\phi(e_k)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A_j\,e_{k-j}\underset{\substack{\uparrow\\ j\leftarrow k-j}}{=}\sum_{j=0}^{k}\underbrace{\binom{k}{k-j}}_{\binom{k}{j}}A_{k-j}\,e_j$.

$\forall k\in[\![0,N]\!]$, $\displaystyle\phi(e_k)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A_{k-j}\,e_j$.

$$M_B(\phi)=\begin{pmatrix} A_0 & A & \cdots & \binom{k}{0}A_k & \cdots & \binom{n}{0}A_n\\ 0 & A_0 & \cdots & \binom{k}{1}A_{k-1} & \cdots & \binom{n}{1}A_{n-1}\\ & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \binom{k}{k}A_0 & & \vdots\\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \binom{n}{n}A_0 \end{pmatrix}.$$

d) Pour prouver que $\phi\circ\Delta=\Delta\circ\phi$ il suffit de montrer que <u>ces deux endomorphismes</u> de E coïncident sur la base $\mathcal{B}=(e_0,e_1,\dots,e_N)$. Soit $k\in[\![0,N]\!]$. Supposons $k\neq 0$.

$\displaystyle\phi(\Delta(e_k))=\phi(e_k')=\phi(k\,e_{k-1}-e_k)=k\,\phi(e_{k-1})-\phi(e_k)=k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}A_{k-1-j}\,e_j-\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A_{k-j}\,e_j$

$\displaystyle\phi(\Delta(e_k))=k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}A_{k-1-j}\,e_j-\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A_{k-j}\,e_j$.

$\displaystyle\Delta(\phi(e_k))=(\phi(e_k))'=\Big(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A_{k-j}\,e_j'\Big)=A_k\,e_0'+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}A_{k-j}\,e_j'$.

$\displaystyle\Delta(\phi(e_k))=-A_k e_0+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}A_{k-j}(j\,e_{j-1}-e_j)=-A_k e_0-\underset{②}{\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}A_{k-j}\,e_j}+\underset{③}{\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}A_{k-j}\,j\,e_{j-1}}$

① et ② ; ③ avec $j\leftarrow j+1$

$\displaystyle\Delta(\phi(e_k))=-\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A_{k-j}\,e_j+\sum_{j=0}^{k-1}\underbrace{\binom{k}{j+1}(j+1)}_{k\binom{k-1}{j}}A_{k-(j+1)}\,e_j$

$\displaystyle\Delta(\phi(e_k))=\sum_{j=0}^{k-1}k\binom{k-1}{j}A_{k-1-j}\,e_j-\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A_{k-j}\,e_j=\phi(\Delta(e_k))$.

$\Delta(\phi(e_0))=(\phi(e_0))'=(A_0e_0)'=A_0e_0'=-A_0e_0$. $\phi(\Delta(e_0))=\phi(-e_0)=-\phi(e_0)=-A_0e_0$.

Donc $\Delta(\phi(e_0))=\phi(\Delta(e_0))$. Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{\phi\circ\Delta=\phi\circ\Delta}}$.

# EXERCICE 48

Exercice N1 **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 1. Contenu dans oral ESCP 2007 2.1**

$E$ est l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ et bornées. $T$ est l'application qui a tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Q1. Montrer que $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et que $T$ est un endomorphisme de $E$.

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $T$.

---

Q1 Notons $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$.

- $E \subset \mathcal{S}$
- La suite nulle appartient donc à $E$ car elle est bornée donc $E$ n'est pas vide.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $E$.

  $\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \exists d \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant c$ et $|v_n| \leqslant d$ car $u$ et $v$ sont bornées.

  Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda u_n + v_n| \leqslant |\lambda|\,|u_n| + |v_n| \leqslant |\lambda| c + d$. Donc la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi $\lambda u + v \in E$.

  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (u,v) \in E^2, \lambda u + v \in E$.

Ceci achève de montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

Alors <u>$E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.</u>

- Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $E$. Posons $T(u)=(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

u est bornée donc $\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant c$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u'_n| = |u_{n+1}| \leqslant c$. Ainsi $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $T(u) \in E$.

$\forall u \in E, T(u) \in E$. <u>T est une application de E dans E.</u>

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $E$.

$T(\lambda u+v) = T\left((\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \lambda (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \lambda T(u) + T(v)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (u,v) \in E^2, T(\lambda u+v) = \lambda T(u) + T(v)$. <u>T est linéaire.</u>

<u>T est un endomorphisme de E.</u>

Q2 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $E$.

$u \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow T(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \lambda^n$.

Alors $\mathrm{Ker}(T-\lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}) \cap E$ !

cherchons cette intersection en distinguant deux cas.

<u>1er cas</u> $|\lambda| \leq 1$. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \lambda^n$. $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = |\alpha||\lambda|^n \leq |\alpha|$.

donc $(u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi $u \in E$.

donc $\mathrm{Ker}(T-\lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}})$. Alors <u>$\lambda$ est valeur propre de $T$ et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}})$.</u>

<u>2ème cas</u>. $|\lambda| > 1$. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \lambda^n$.

si $\alpha = 0$ : $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_E \in E$ ! Supposons $\alpha \neq 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = |\alpha| |\lambda|^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ car $|\lambda| > 1$ et $|\alpha| > 0$

Ainsi $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. $u \notin E$.

Finalement $\mathrm{Ker}(T-\lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}) \cap E = \{0_E\}$.

<u>$\lambda$ n'est pas valeur propre.</u>

conclusion 1°) <u>$\mathrm{Sp}\, T = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$.</u>

2°) <u>Si $\lambda \in \mathrm{Sp}\, T$, $\mathrm{SEP}(T,\lambda) = \mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}})$.</u>

# EXERCICE 49

Exercice | N1 | **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 2.**

$E$ est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

On considère l'application $f$ de $E$ dans $E$ qui à tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ associe la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de $f$.

**Thème abordé dans oral ESCP 2.5 avec des suites périodiques.**

---

Q1 • $f$ est une application de $E$ dans $E$ par définition.

• Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soient $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $E$.

$f(\alpha u+v)=f\big((\alpha u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)=\big((\alpha u_{n+1}+v_{n+1})-(\alpha u_n+v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}=\big(\alpha(u_{n+1}-u_n)+(v_{n+1}-v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

$f(\alpha u+v)=\alpha(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(v_{n+1}-v_n)_{n\in\mathbb{N}}=\alpha f(u)+f(v)$.

$\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $\forall (u,v)\in E^2$, $f(\alpha u+v)=\alpha f(u)+f(v)$. $f$ est linéaire.

Ainsi $f$ est un endomorphisme de $E$.

Q2 Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$.

$u\in \operatorname{Ker}(f-\lambda \operatorname{Id}_E)\iff f(u)=\lambda u\iff (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}=\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\lambda u_n$.

$u\in \operatorname{Ker}(f-\lambda \operatorname{Id}_E)\iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\lambda$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n(\lambda)=\lambda^n$. $(u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\lambda$ et ce n'est pas la suite nulle. Alors $\operatorname{Ker}(f-\lambda \operatorname{Id}_E)\neq\{0_E\}$. $\lambda$ est valeur propre de $f$.

De plus $u\in\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\lambda u_n\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda^n u_0\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0\,u_n(\lambda)$.

Donc si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)$, $u=u_0\,(u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ donc $u\in\operatorname{Vect}\big((u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}\big)^{(*)}$. Or $(u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}\in\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ alors $\operatorname{Vect}\big((u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}\big)\subset\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)$.

Ainsi $\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)=\operatorname{Vect}\big((u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}\big)=\operatorname{Vect}\big((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

Finalement $\operatorname{Sp} f=\mathbb{R}$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\operatorname{SEP}(f,\lambda)=\operatorname{Vect}\big((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

(*) ce qui montre que $\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)\subset\operatorname{Vect}\big((u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}\big)$

R.



**EXERCICE 50** **N1** **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 3.**

$E$ est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

On considère l'application $f$ de $E$ dans $E$ qui à tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{u_{n-1}+u_n}{2}$.

Q1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de $f$.

---

Q1 • Par définition $f$ est une application de $E$ dans $E$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $E$.

Posons $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = f(u)$, $v' = (v'_n)_{n\in\mathbb{N}} = f(u')$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = f(\lambda u + u')$.

$\lambda u + u' = (\lambda u_n + u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors $w_0 = \lambda u_0 + u'_0 = \lambda v_0 + v'_0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{\lambda u_n + u'_n + \lambda u_{n-1} + u'_{n-1}}{2} = \lambda \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} + \dfrac{u'_n + u'_{n-1}}{2} = \lambda v_n + v'_n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \lambda v_n + v'_n$. Donc $w = (\lambda v_n + v'_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v'_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda f(u) + f(u')$.

Ainsi $f(\lambda u + u') = w = \lambda f(u) + f(u')$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (u,u') \in E^2$, $f(\lambda u + u') = \lambda f(u) + f(u')$. $f$ est linéaire.

Donc $f$ est un endomorphisme de $E$.

Q2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $E$.

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \lambda u_0 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \lambda u_0 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (2\lambda - 1) u_n = u_{n-1} \end{cases}$

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda) u_0 = 0 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (2\lambda - 1) u_{n+1} = u_n \end{cases}$.

1er cas. $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2\lambda - 1} u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2\lambda - 1}\right)^n u_0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)=\{0_E\}$.

**2ème cas** .. $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\frac{1}{2})u_0 = 0 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \times u_{n+1} = u_n \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0_E.$$

$\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)=\{0_E\}$.

**3ème cas** .. $\lambda = 1$.

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$.

Soit $t$ la suite constante de $E$ égale à $1$. $t \neq 0_E$ et $t \in \mathrm{Ker}(f-Id_E)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f-Id_E) \neq \{0_E\}$. Alors $1$ est une valeur propre de $f$ et $t$ est un vecteur propre associé. Vect$(t)$ est alors contenu dans $SEP(f,1)$.

Reprenons la suite $u$ et supposons que $u \in \mathrm{Ker}(f-Id_E)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 = u_0 \times 1 = u_0 \times t_n$. $u = u_0 t$. $u \in$ Vect$(t)$.

Par conséquent $\mathrm{Ker}(f-Id_E) \subset$ Vect$(t)$. $SEP(f,1) \subset$ Vect$(t)$.

Finalement $SEP(f,1) =$ Vect$(t)$.

Conclusion .. $Sp\, f = \{1\}$ et $SEP(f,1) =$ Vect$(t)$ où $t$ est la suite constante de $E$ égale à $1$.