R.

# EXERCICE 61



Exercice | N1$^+$ | **Inversion d'une "matrice de passage de vecteurs propres".**

$A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant $n$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

$\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $A$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Notons que $\text{SEP}\,(A, \lambda_j) = \text{Vect}(X_j)$

Soit $P$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$. On pose $P = (p_{i,j})$.

Alors $P$ est inversible et $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $D = \text{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Q1 Montrer que ${}^tA$ a les mêmes valeurs propres que $A$.

En déduire l'existence d'une matrice inversible $Q$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}\,{}^tAQ = D$. On pose $Q = (q_{i,j})$.

Q2. a) Montrer que $A({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1}D$.

En déduire que pour tout $j$ dans $[\![1, n]\!]$ il existe un élément $\delta_j$ de $\mathbb{K}$ tel que $({}^tQ)^{-1}E_j = \delta_j\, PE_j$.

b) On considère la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ : $\Delta = \text{Diag}\,(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.

Montrer que $P^{-1} = \Delta\,{}^tQ$ et que $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \delta_j = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,j}\, q_{k,j}}$.

Q3. On suppose ici que $A$ est inversible. On pose $A^{-1} = (b_{i,j})$. Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ b_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left( \delta_k \dfrac{p_{i,k}\, q_{j,k}}{\lambda_k} \right)$.

---

Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\lambda \in \text{Sp}\,A \iff A - \lambda I_n$ non inversible $\iff {}^t(A - \lambda I_n)$ non inversible. Or ${}^t(A - \lambda I_n) = {}^tA - \lambda\,{}^tI_n = {}^tA - \lambda I_n$.

$\lambda \in \text{Sp}\,A \iff {}^tA - \lambda I_n$ non inversible $\iff \lambda \in \text{Sp}\,{}^tA$.

Ainsi $\text{Sp}\,A = \text{Sp}\,{}^tA$. ${}^tA$ a les mêmes valeurs propres que $A$.

Alors ${}^tA$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes ~~des~~ qui sont : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. ${}^tA$ est diagonalisable.

Notons également que les sous-espaces propres de ${}^tA$ sont de dimension 1.

Pour tout $j$ dans $[\![1, n]\!]$ considérons un vecteur propre $Y_j$ de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\lambda_j$.

1/ Pour tout $j$ dans $[\![1, n]\!]$, $(Y_j)$ est une base de $\text{SEP}({}^tA, \lambda_j)$.

2/ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} \text{SEP}({}^tA, \lambda_j)$ car ${}^tA$ est diagonalisable.

Alors $\hat{\mathcal{B}} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de ${}^tA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Soit $Q$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\hat{\mathcal{B}}$.

$Q$ est inversible comme matrice de passage et $Q^{-1}\,{}^tAQ = \text{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D$.

Il existe une matrice inversible $Q$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}\,{}^tAQ = D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Q2 a) $\varphi^{-1}\,{}^tA\varphi = D$. $D = {}^tD = {}^t(\varphi^{-1}\,{}^tA\varphi) = {}^t\varphi\,{}^t({}^tA)\,{}^t\varphi^{-1} = {}^t\varphi A({}^t\varphi)^{-1}$.

${}^t({}^tA) = A$ et ${}^t\varphi^{-1} = ({}^t\varphi)^{-1}$

($\varphi$ est inversible donc ${}^t\varphi$ l'est également).

En multipliant par $({}^t\varphi)^{-1}$ à gauche il vient $({}^t\varphi)^{-1}D = A({}^t\varphi)^{-1}$.

$A({}^t\varphi)^{-1} = ({}^t\varphi)^{-1}D$.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. $A({}^t\varphi)^{-1}E_j = {}^t\varphi^{-1}DE_j = {}^t\varphi^{-1}(\lambda_j E_j)$

$DE_j$ est la $j^{\text{ième}}$ colonne de $D$ donc $DE_j = \lambda_j E_j$

$A\left(({}^t\varphi)^{-1}E_j\right) = \lambda_j ({}^t\varphi)^{-1}E_j$ donc $({}^t\varphi)^{-1}E_j \in SEP(A,\lambda_j) = \mathrm{Vect}(X_j)$.

Alors $\exists s_j \in \mathbb{K}$, $({}^t\varphi)^{-1}E_j = s_j X_j$. Or $X_j$ est la $j^{\text{ième}}$ colonne de $P$ donc $X_j = PE_j$.

Ainsi $({}^t\varphi)^{-1}E_j = s_j PE_j$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\exists s_j \in \mathbb{K}$, $({}^t\varphi)^{-1}E_j = s_j PE_j$.

b) $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $s_j E_j = \Delta E_j$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $({}^t\varphi)^{-1}E_j = s_j PE_j = P(s_j E_j) = P\Delta E_j$.

Alors pour tout $j$ dans $[\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de $({}^t\varphi)^{-1}$ est égale à la $j^{\text{ième}}$ colonne de $P\Delta$.

Ainsi $({}^t\varphi)^{-1} = P\Delta$. En multipliant à gauche par $P^{-1}$ et droite par ${}^t\varphi$ on obtient :

$P^{-1} = \Delta\,{}^t\varphi$. Alors $I_n = \Delta\,{}^t\varphi P$.

Posons $\Delta = (\delta_{i,j})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} s_j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Posons $S = (s_{i,j}) = {}^t\varphi P$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $s_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} q_{k,i}\, p_{k,j}$.

Posons $L = \Delta\,{}^t\varphi P = (\ell_{i,j})$. $L = I_n$ !!

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $\ell_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\, s_{k,j} \overset{\delta_{i,k} = \begin{cases} s_i & \text{si } k=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}{=} s_i\, s_{i,j}$.

Alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\underset{L = I_n}{1 =} \ell_{j,j} = s_j\, s_{j,j} = s_j \sum_{k=1}^{n} q_{k,j}\, p_{k,j}$. $s_j \sum_{k=1}^{n} q_{k,j}\, p_{k,j} = 1$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

Alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q_{k,j} p_{k,j} \neq 0$ et $s_j = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q_{k,j} p_{k,j}}$.

---

(Q3) A inversible. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$. D est également inversible et $D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

$P^{-1}AP = D$ ; $(P^{-1}AP)^{-1} = D^{-1}$. $P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = D^{-1}$ ; $P^{-1}A^{-1}P = D^{-1}$.

Alors $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PD^{-1}\Delta\, {}^t Q$

Or $D^{-1}\Delta = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)\mathrm{Diag}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \mathrm{Diag}\left(\frac{s_1}{\lambda_1}, \frac{s_2}{\lambda_2}, \dots, \frac{s_n}{\lambda_n}\right)$.

Posons $D^{-1}\Delta = (r_{i,j})$ ; $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $r_{i,j} = \begin{cases} s_i/\lambda_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$PD^{-1}\Delta = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{i,k} r_{k,j}\right) = \left(p_{i,j} \dfrac{s_j}{\lambda_j}\right)$ et $A^{-1} = (PD^{-1}\Delta)\,{}^t Q = (b_{i,j})$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{i,k} \dfrac{s_k}{\lambda_k} q_{j,k}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k \dfrac{p_{i,k} q_{j,k}}{\lambda_k}$.

---

R



**EXERCICE 62** **N2⁺** **Réduction de E défini par sa donnée sur deux supplémentaires de E.**
**ESCP 2005 2.2.**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $E_1, E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, supplémentaires dans $E$ et non réduits au vecteur nul.

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ et $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

On note $u$ l'endomorphisme de $E$ tel que : $\begin{cases} \forall x \in E_1, u(x) = u_1(x) \\ \forall x \in E_2, u(x) = u_2(x) + u_3(x) \end{cases}$.

Q1. Donner la forme de la matrice de $u$ dans une base de $E$ obtenue en mettant "bout à bout" une base de $E_1$ et une base de $E_2$.

Q2. a) Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $x = x_1 + x_2$.

Montrer que : $u(x) = \lambda x \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$.

b) Montrer que si que $\lambda$ est valeur propre de $u$ alors $\lambda$ est valeur propre de $u_1$ ou de $u_2$.

Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $u_1$ alors $\lambda$ est valeur propre de $u$.

Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $u_2$ sans être valeur propre de $u_1$ alors $\lambda$ est valeur propre de $u$.

c) Soit $\lambda$ un réel qui est valeur propre de $u_1$ mais pas de $u_2$. Comparer les sous-espaces propres de $u$ et de $u_1$ associés à $\lambda$.

d) Soit $\lambda$ un réel qui est valeur propre de $u_2$ mais pas de $u_1$. Comparer les dimensions des sous-espaces propres de $u$ et de $u_2$ associés à $\lambda$.

Q3. On suppose dans cette question que $u_1$ et $u_2$ n'ont pas de valeur propre commune. Montrer que $u$ est diagonalisable si et seulement si $u_1$ et $u_2$ le sont.

---

Q1 $E = E_1 \oplus E_2$. Posons $p_1 = \dim E_1$ et $p_2 = \dim E_2$. $p_1 \in \mathbb{N}^*$, $p_2 \in \mathbb{N}^*$, $p_1 + p_2 = n$.

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_{p_1})$ une base de $E_1$ et $\mathcal{B}_2 = (e_{p_1+1}, \dots, e_n)$ une base de $E_2$.

Comme $E = E_1 \oplus E_2$, $\mathcal{B} =$ " $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ " est une base de $E$.

$u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$. Notons $A_1$ la matrice de $u_1$ dans $\mathcal{B}_1$. $A_1 \in \mathcal{M}_{p_1}(\mathbb{R})$.

$u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$. Notons $A_2$ la matrice de $u_2$ dans $\mathcal{B}_2$. $A_2 \in \mathcal{M}_{p_2}(\mathbb{R})$.

$u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$. Notons $A_3$ la matrice de $u_3$ relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$. $A_3 \in \mathcal{M}_{p_1, p_2}(\mathbb{R})$.

Comme $\forall x \in E_1$, $u(x) = u_1(x)$ et $\forall x \in E_2$, $u(x) = u_2(x) + u_3(x)$ la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0_{p_2, p_1} & A_2 \end{pmatrix}$ ($0_{p_2,p_1}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p_2, p_1}(\mathbb{R})$).

Q2 <u>Remarques</u> Soit $x$ un élément de $E$. $\exists\,!\,(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x = x_1 + x_2$.

Alors $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_2)$.

a) Soit $x\in E$. $\exists!\,(x_1,x_2)\in E_1\times E_2$, $x=x_1+x_2$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$u(x)=\lambda x \Leftrightarrow u_1(x_1)+u_2(x_2)+u_3(x_2)=\lambda(x_1+x_2)$

$u(x)=\lambda x \Leftrightarrow (u_1(x_1)+u_3(x_2)) + u_2(x_2)=(\lambda x_1)+(\lambda x_2)$.

Or $E_1$ et $E_2$ sont en somme directe et $u_1(x_1)+u_3(x_2)\in E_1$, $u_2(x_2)\in E_2$, $\lambda x_1\in E_1$ et $\lambda x_2\in E_2$. De l'unicité de l'écriture d'un élément de $E$ comme somme d'un élément de $E_1$ et d'un élément de $E_2$ il résulte que :

$$u(x)=\lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(x_1)+u_3(x_2)=\lambda x_1 \\ u_2(x_2)=\lambda x_2 \end{cases}.$$

b) • Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$. $\exists x\in E$, $x\neq 0_E$ et $u(x)=\lambda x$.

$\exists!\,(x_1,x_2)\in E_1\times E_2$, $x=x_1+x_2$. Comme $u(x)=\lambda x$, a) donne $\begin{cases} u_1(x_1)+u_3(x_2)=\lambda x_1 \\ u_2(x_2)=\lambda x_2 .\end{cases}$

1er cas.. $x_2\neq 0_E$. Alors $\lambda$ est valeur propre de $u_2$.

2e cas.. $x_2=0_E$. Alors 1) $x_1\neq 0_E$ ($x_1=0_E \Rightarrow x=0_E$)

2) $\lambda x_1=u_1(x_1)+u_3(x_2)=u_1(x_1)+u_3(0_E)=u_1(x_1)$

Ainsi $\lambda$ est valeur propre de $u_1$.

Si $\lambda$ est valeur propre de $u$ alors $\lambda$ est valeur propre de $u_1$ ou de $u_2$. $\mathrm{Sp}\,u\subset \mathrm{Sp}\,u_1\cup \mathrm{Sp}\,u_2$

• Supposons que $\lambda$ est valeur propre de $u_1$. $\exists x_1\in E_1$, $x_1\neq 0_E$ et $u_1(x_1)=\lambda x_1$.

Posons $x_2=0_E$ et $x=x_1+x_2$. $x=x_1\neq 0_E$ !

$x_1\in E_1$ et $x_2\in E_2$. De plus $\begin{cases} u_1(x_1)+u_3(x_2)=\lambda x_1+u_3(0_E)=\lambda x_1 \\ \text{et} \\ u_2(x_2)=u_2(0_E)=0_E=\lambda 0_E=\lambda x_2 \end{cases}$. Alors $u(x)=\lambda x$.

$u(x)=\lambda x$ et $x\neq 0_E$ donc $\lambda$ est valeur propre de $u$.

Si $\lambda$ est valeur propre de $u_1$ : $\lambda$ est valeur propre de $u$.

donc $\lambda\in \mathrm{Sp}\,u$

Remarque 2 - Soit $\lambda\in \mathrm{Sp}\,u_1$ ! Nous venons de montrer que si $x_1\in SEP(u_1,\lambda)$ et $x_1\neq 0_E$ alors $x_1\in SEP(u,\lambda)$. Ceci vaut encore pour $x_1=0_E$ donc $SEP(u_1,\lambda)\subset SEP(u,\lambda)$. Ce sera utile pour c)

- Supposons que $\lambda$ soit une valeur propre de $u_2$ sans être une valeur propre de $u_1$. Montrons que $\lambda$ est valeur propre de $u$. Il faut donc prouver l'existence d'un élément non nul $x$ de $E$ tel que $u(x)=\lambda x$.

ce qui revient à montrer l'existence de $(x_1,x_2)\in E_1 \times E_2$ tel que :

→ $x_1+x_2 \neq 0_E$ (ce qui équivaut à $x_1 \neq 0_E$ ou $x_2 \neq 0_E$) — $E_1$ et $E_2$ sont en somme directe.

→ $u_1(x_1)+u_3(x_2)=\lambda x_1$ ou $(u_1-\lambda Id_{E_1})(x_1)=-u_3(x_2)$

→ $u_2(x_2)=\lambda x_2$.

$\lambda$ est valeur propre de $u_2$ donc il existe un élément non nul $x_2$ de $E_2$ tel que $u_2(x_2)=\lambda x_2$

$\lambda$ n'est pas valeur propre de $u_1$. Ainsi $Ker(u_1-\lambda Id_{E_1})=\{0_E\}$.

$u_1-\lambda Id_{E_1}$ est un endomorphisme injectif de $E_1$ qui est un espace vectoriel de dimension finie. Alors $u_1-\lambda Id_{E_1}$ est un endomorphisme bijectif de $E_1$.

Posons alors $x_1=(u_1-\lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x_2))$ ($u_3(x_2)\in E_1$ !) et $x=x_1+x_2$.

Alors 1) $x\in E$ et $\underline{x\neq 0_E}$ car $x_2\neq 0_E$ et $E_1$ et $E_2$ sont en somme directe

($x=x_1+x_2=0_E \Rightarrow x_1=x_2=0_E$).

2) $u_2(x_2)=\lambda x_2$

3) $(u_1-\lambda Id_{E_1})(x_1)=(u_1-\lambda Id_{E_1})\left((u_1-\lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x_2))\right)=-u_3(x_2)$.

Alors $u_1(x_1)-\lambda x_1=-u_3(x_2)$. $u_1(x_1)+u_3(x_2)=\lambda x_1$.

2) et 3) montrent que $u(x)=\lambda x$. Comme $x\neq 0_E$ : $\lambda$ est valeur propre de $u$.

Si $\lambda$ est valeur propre de $u_2$ sans être valeur propre de $u_1$, $\lambda$ est valeur propre de $u$.

__Remarque 3.__ Soit $\lambda$ une valeur propre de $u_2$ qui n'est pas valeur propre de $u_1$.

Alors $\forall x_2\in SEP(u_2,\lambda)$, $x_2\neq 0_E \Rightarrow (u_1-\lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x_2))+x_2\in SEP(u,\lambda)$.

Notons que ceci vaut pour $x_2=0_E$.

Alors $\underline{\forall x_2\in SEP(u_2,\lambda)\ ,\ (u_1-\lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x_2))+x_2\in SEP(u,\lambda)}$. ce sera utile pour c)

<u>Remarque 4.</u> Nous avons déjà $Sp\,u \subset Sp\,u_1 \cup Sp\,u_2$. Montrons l'inclusion inverse.
Soit $\lambda \in Sp\,u_1 \cup Sp\,u_2$. Si $\lambda \in Sp\,u_1$ alors $\lambda \in Sp\,u$. Supposons que $\lambda \notin Sp\,u_1$ alors $\lambda \notin Sp\,u_1$ mais $\lambda \in Sp\,u_2$ donc $\lambda \in Sp\,u$. Ainsi $Sp\,u_1 \cup Sp\,u_2 \subset Sp\,u$.

Alors $\underline{Sp\,u = Sp\,u_1 \cup Sp\,u_2}$.

<u>c) Soit $\lambda$ une valeur propre de $u_1$ qui n'est pas une valeur propre de $u_2$.</u> $\lambda \in Sp\,u$.
La remarque 2 a montré que $SEP(u_1,\lambda) \subset SEP(u,\lambda)$. Montrons l'inclusion inverse.
Soit $x \in SEP(u,\lambda)$. $\exists!\,(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$, $x_1 + x_2 = x$. De plus $\begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$.
Si $x_2 \neq 0_E$ alors $\lambda$ est valeur propre de $u_2$ ce qui n'est pas.
Donc $x_2 = 0_E$. Alors $x = x_1$. Par conséquent $x \in E_1$.
De plus $\lambda x = \lambda x_1 = u_1(x_1) + u_3(x_2) = u_1(x) + u_3(0_E) = u_1(x)$; $u_1(x) = \lambda x$; $x \in SEP(u_1,\lambda)$.
Ceci achève de montrer que $SEP(u,\lambda) \subset SEP(u_1,\lambda)$.
Finalement $\underline{SEP(u,\lambda) = SEP(u_1,\lambda)}$.

<u>d) Soit $\lambda$ une valeur propre de $u_2$ qui n'est pas une valeur propre de $u_1$.</u> $\lambda \in Sp\,u$.
La remarque 3 a montré que $\forall x_2 \in SEP(u_2,\lambda)$, $(u_1 - \lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x_2)) + x_2 \in SEP(u,\lambda)$.
Ce que l'on peut aussi écrire $\forall x \in SEP(u_2,\lambda)$, $(u_1 - \lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x)) + x \in SEP(u,\lambda)$ pour alléger les notations. Nous allons nous servir de cela pour montrer que $SEP(u_2,\lambda)$ est isomorphe à $SEP(u,\lambda)$ ce qui donnera $\dim SEP(u_2,\lambda) = \dim SEP(u,\lambda)$.
Posons $\forall x \in SEP(u_2,\lambda)$, $\varphi(x) = (u_1 - \lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x)) + x$.
Toujours pour alléger les notations posons $v_1 = (u_1 - \lambda Id_{E_1})^{-1}$. $v_1$ est un automorphisme de $E_1$ et $\forall x \in SEP(u_2,\lambda)$, $\varphi(x) = v_1(-u_3(x)) = -v_1(u_3(x)) + x = -(v_1 \circ u_3)(x) + x$.

- 1) $\varphi$ est une application de $SEP(u_2,\lambda)$ dans $SEP(u,\lambda)$.
- 2) Montrons que $\varphi$ est linéaire. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in (SEP(u_2,\lambda))^2$.

Notons que $v_1 \circ u_3$ est une application linéaire de $E_2$ dans $E_1$.

$\varphi(\alpha x+y) = -(v_1\circ u_3)(\alpha x+y)+\alpha x+y = -\alpha\, v_1\circ u_3(x)-(v_1\circ u_3)(y)+\alpha x+y$.

$\varphi(\alpha x+y) = \alpha\left(-(v_1\circ u_3)(x)+x\right)+\left(-(v_1\circ u_3)(y)+y\right) = \alpha\varphi(x)+\varphi(y)$.

$\forall \alpha\in\mathbb{R},\ \forall (x,y)\in (SEP(u_2,\lambda))^2,\ \varphi(\alpha x+y) = \alpha\varphi(x)+\varphi(y)$. $\varphi$ est linéaire.

- 3) Montrons que $\varphi$ est bijective.

  Soit $z\in SEP(u,\lambda)$. Montrons par analyse-synthèse que : $\exists!\, x\in SEP(u_2,\lambda),\ \varphi(x)=z$

  Notons que $\exists!\,(z_1,z_2)\in E_1\times E_2\ /\ z=z_1+z_2$.

<u>Analyse - Unicité</u>. <u>Supposons</u> que $x\in SEP(u_2,\lambda)$ et que $\varphi(x)=z$.

$z_1+z_2=z=\varphi(x)=-(v_1\circ u_3)(x)+x$. De plus $z_1\in E_1, z_2\in E_2$, $-(v_1\circ u_3)(x)\in E_1$ et $x\in E_2$.

Par unicité de la décomposition d'un élément de $E$ comme somme d'un élément de $E_1$ et d'un élément de $E_2$ il vient : $\begin{cases} z_1=-(v_1\circ u_3)(x) \\ \text{et } z_2=x\end{cases}$. Alors $x=z_2$. D'où l'unicité.

<u>Synthèse - Existence</u>. <u>Posons</u> $x=z_2$. Montrons que $x\in SEP(u_2,\lambda)$ et que $\varphi(x)=z$.

$z\in SEP(u,\lambda)$. $u(z)=\lambda z$ et $z=z_1+z_2$ avec $(z_1,z_2)\in E_1\times E_2$.

Alors $\begin{cases} u_1(z_1)+u_3(z_2)=\lambda z_1 \\ \text{et} \\ u_2(z_2)=\lambda z_2\end{cases}$. La seconde ligne donne alors $u_2(x)=\lambda x$ et ainsi $x\in SEP(u_2,\lambda)$. Exploitons la première ligne.

Elle donne $(u_1-\lambda\, Id_{E_1})(z_1)=-u_3(z_2)$. Ainsi $z_1=(u_1-\lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(z_2))$.

Donc $z_1=v_1(-u_3(z_2))=-v_1(u_3(z_2))=-v_1(u_3(x))$ ; $-v_1(u_3(x))=z_1$

Alors $\varphi(x)=-v_1(u_3(x))+x=z_1+x=z_1+z_2=z$.

$x\in SEP(u_2,\lambda)$ et $\varphi(x)=z$. D'où l'existence.

$\forall z\in SEP(u,\lambda),\ \exists!\, x\in SEP(u_2,\lambda),\ \varphi(x)=z$. $\varphi$ est bijective.

Finalement $\varphi$ est un isomorphisme de $SEP(u_2,\lambda)$ sur $SEP(u,\lambda)$. $\dim SEP(u_2,\lambda)=\dim SEP(u,\lambda)$.

<u>Si $\lambda$ est une valeur propre de $u_2$ sans être une valeur propre de $u_1$ alors $\lambda$ est une valeur propre de $u$ et $\dim SEP(u,\lambda)=\dim SEP(u_2,\lambda)$.</u>

(Q3) Ici $Sp\, u_1 \cap Sp\, u_2 = \emptyset$. Notons que l'on a toujours $Sp\, u = Sp\, u_1 \cup Sp\, u_2$.

Soit $\lambda \in Sp\, u$.

1er cas : $\lambda \in Sp\, u_1$. Alors $\lambda \notin Sp\, u_2$. Ainsi d'après Q2 c) $SEP(u,\lambda) = SEP(u_1,\lambda)$.

Donc $\dim SEP(u,\lambda) = \dim SEP(u_1,\lambda)$.

2e cas : $\lambda \in Sp\, u_2$. Alors $\lambda \notin Sp\, u_1$. d'après Q2 a) $\dim SEP(u,\lambda) = \dim SEP(u_2,\lambda)$.

$$\sum_{\lambda \in Sp\, u} \dim SEP(u,\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp\, u_1} \dim SEP(u,\lambda) + \sum_{\lambda \in Sp\, u_2} \dim SEP(u,\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) + \sum_{\lambda \in Sp\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda).$$

$Sp\, u = Sp\, u_1 \cup Sp\, u_2$ et $Sp\, u_1 \cap Sp\, u_2 = \emptyset$

• Supposons que $u_1$ et $u_2$ sont diagonalisables.

$E = E_1 \oplus E$

$$\sum_{\lambda \in Sp\, u} \dim SEP(u,\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) + \sum_{\lambda \in Sp\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda) = \dim E_1 + \dim E_2 = \dim E.$$

Alors $u$ est diagonalisable.

• Supposons que $u$ est diagonalisable.

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E = \sum_{\lambda \in Sp\, u} \dim SEP(u,\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) + \sum_{\lambda \in Sp\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda).$$

Alors $$\Big(\dim E_1 - \sum_{\lambda \in Sp\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda)\Big) + \Big(\dim E_2 - \sum_{\lambda \in Sp\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda)\Big) = 0.$$

Or $\dim E_1 - \sum_{\lambda \in Sp\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) \geq 0$ et $\dim E_2 - \sum_{\lambda \in Sp\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda) \geq 0$.

Alors $\dim E_1 - \sum_{\lambda \in Sp\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) = \dim E_2 - \sum_{\lambda \in Sp\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda) = 0$.

Donc $\sum_{\lambda \in Sp\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) = \dim E_1$ et $\sum_{\lambda \in Sp\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda) = \dim E_2$.

Ainsi $u_1$ et $u_2$ sont diagonalisables.

Finalement <u>$u$ est diagonalisable si et seulement si $u_1$ et $u_2$ sont diagonalisables</u>

<u>lorsque $u_1$ et $u_2$ n'ont pas de valeur propre commune.</u>

R.

# EXERCICE 63



Exercice $p$ est un élément de $[\![1, +\infty[\![$.

On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $i + j = 2p + 2$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Q1. La matrice $A$ est-elle inversible ?

Q2. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

Q3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A$.

---

**Q1..** Soit $(E_1, E_2, \dots, E_{2p+1})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})$.

Notons que $\forall k \in [\![1, 2p+1]\!] - \{p+1\}$, $AE_k = E_k + E_{2p+2-k}$ et $AE_{p+1} = E_{p+1}$.

Ainsi $AE_1 = E_1 + E_{2p+1}$ et $AE_{2p+1} = E_{2p+1} + E_1$.

Donc $AE_1 = AE_{2p+1}$. $A(E_1 - E_{2p+1}) = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$ et

$E_1 - E_{2p+1} \neq 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$. Donc A n'est pas inversible.

**Q2** $A = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 1 \\ (0) & 1 & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{pmatrix}$ ! A est symétrique à coefficients réels donc

A est diagonalisable.

Notons plus précisément la symétrie. Soit $(i,j) \in [\![1, 2p+1]\!]^2$.

1er cas.. $i = j$. Alors $a_{ij} = a_{ii} = a_{ji}$ !

2e cas.. $i + j = 2p+2$. Alors $j + i = 2p+2$. Donc $a_{ij} = 1 = a_{ji}$.

3e cas.. $i \neq j$ et $i + j \neq 2p+2$. Alors $j \neq i$ et $j + i \neq 2p+2$. Donc $a_{ij} = 0 = a_{ji}$.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1, 2p+1]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$. A est symétrique.

**Q3** $\boxed{\text{V1.}}$ $\forall k \in [\![1, 2p+1]\!] - \{p+1\}$, $AE_k = E_k + E_{2p+2-k}$ et $AE_{p+1} = E_{p+1}$.

1% 1 est valeur propre de A et $E_{p+1}$ est un vecteur propre associé.

Donc $1 \in \mathrm{Sp}\, A$ et $\dim \mathrm{SEP}(A, 1) \geqslant 1$.

2) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $A(E_k + E_{2p+2-k}) = AE_k + AE_{2p+2-k} = E_k + E_{2p+2-k} +$

$E_{2p+2-k} + E_{2p+2-(2p+2-k)}) = 2(E_k + E_{2p+2-k})$.

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $A(E_k + E_{2p+2-k}) = 2(E_k + E_{2p+2-k})$ et $E_k + E_{2p+2-k} \neq 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$

donc 2 est valeur propre de A et $(E_1 + E_{2p+1}, E_2 + E_{2p}, \dots, E_p + E_{p+2})$ est une famille de vecteurs propres associés. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k (E_k + E_{2p+2-k}) = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$.

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k E_k + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k E_{2p+2-k} = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}.$$

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k E_k + \sum_{i=p+2}^{2p+1} \alpha_{2p+2-i} E_i = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}.$$

Or $(E_1, E_2, \dots, E_p, E_{p+2}, \dots, E_{2p+1})$ est une famille libre car c'est une sous-famille de la base $(E_1, E_2, \dots, E_{2p+1})$.

Ainsi $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_k = 0$.

Ceci achève de montrer que $(E_1 + E_{2p+1}, E_2 + E_{2p}, \dots, E_p + E_{p+2})$ est libre. Notons que cette famille est de cardinal p.

Donc $\underline{2 \in \mathrm{Sp}\,A \text{ et } \dim \mathrm{SEP}(A, 2) \geq p}$.

3) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $A(E_k - E_{2p+2-k}) = AE_k - AE_{2p+2-k}$.

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $A(E_k - E_{2p+2-k}) = E_k + E_{2p+2-k} - (E_{2p+2-k} + E_{2p+2-(2p+2-k)})$

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $A(E_k - E_{2p+2-k}) = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$ et $E_k - E_{2p+2-k} \neq 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$.

donc 0 est valeur propre de A et $(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+2})$ est une famille de vecteurs propres associés.

On montre comme dans 2) que cette famille est libre et de cardinal p.

Ainsi $\underline{0 \in \mathrm{Sp}\,A \text{ et } \dim \mathrm{SEP}(A, 0) \geq p}$.

Résumons : • $\{0,1,2\} \subset \operatorname{Sp} A$

• $\dim SEP(A,0) \geqslant p$, $\dim SEP(A,1) \geqslant 1$ et $\dim SEP(A,2) \geqslant p$.

$$\underbrace{2p+1 \geqslant \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim SEP(A,\lambda)}_{\text{cours}} \underbrace{\geqslant \dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,1) + \dim SEP(A,2)}_{\{0,1,2\} \subset \operatorname{Sp} A} \geqslant p+1+p = 2p+1$$

Alors $\quad 2p+1 = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim SEP(A,\lambda) = \dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,1) + \dim SEP(A,2)$.

cela permet d'affirmer que :

1°/ A est diagonalisable (ce que nous savions déjà)

2°/ A n'a pas d'autres valeurs propres que 0, 1 et 2. $\underline{\underline{\operatorname{Sp} A = \{0,1,2\}}}$.

3°/ $\dim SEP(A,0) = p$, $\dim SEP(A,1) = 1$ et $\dim SEP(A,2) = p$.

En effet si $\dim SEP(A,0) > p$ ou $\dim SEP(A,1) > 1$ ou $\dim SEP(A,2) > p$ alors $\dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,1) + \dim SEP(A,2) > 2p+1$ !

4°/ • $(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+2})$ est une famille libre de cardinal $p$ de $SEP(A,0)$ qui est de dimension $p$.

Alors $\underline{\underline{(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+2}) \text{ est une base de } SEP(A,0)}}$.

• De même $\underline{\underline{(E_{p+1}) \text{ est une base de } SEP(A,1)}}$ et

$\underline{\underline{(E_1 + E_{2p+1}, E_2 + E_{2p}, \dots, E_p + E_{p+2}) \text{ est une base de } SEP(A,2)}}$.

Fin de la première version

Nous allons retrouver ce résultat "à la main"

$\boxed{V2}$ Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2p+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_1 + x_{2p+1} = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_p + x_{p+2} = \lambda x_p \\ x_{p+1} = \lambda x_{p+1} \\ x_{p+2} + x_p = \lambda x_{p+2} \\ \vdots \\ x_{2p+1} + x_1 = \lambda x_{2p+1} \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, 2p+1]\!] - \{p+1\},\ x_k + x_{2p+2-k} = \lambda x_k \\ x_{p+1} = \lambda x_{p+1} \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_{2p+1} = (\lambda-1)x_1 \\ \vdots \\ x_{p+2} = (\lambda-1)x_p \\ (1-\lambda)x_{p+1} = 0 \\ x_p = (\lambda-1)x_{p+2} \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda-1)x_{2p+1} \end{cases} \iff \begin{cases} x_{2p+1} = (\lambda-1)x_1 \\ \vdots \\ x_{p+2} = (\lambda-1)x_p \end{cases} (1) \quad \begin{cases} (1-\lambda)x_{p+1} = 0 \end{cases} (2) \quad \begin{cases} x_p = (\lambda-1)^2 x_p \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda-1)^2 x_1 \end{cases} (3)$$

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, p]\!],\ (1-(\lambda-1)^2)x_k = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(2-\lambda)x_k = 0 & \leftarrow (3) \\ (1-\lambda)x_{p+1} = 0 & \leftarrow (2) \\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_{2p+2-k} = (\lambda-1)x_k & \leftarrow (1) \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, p]\!],\ \lambda(2-\lambda)x_k = 0 \\ (1-\lambda)x_{p+1} = 0 \\ \forall i \in [\![p+2, 2p+1]\!],\ x_i = (\lambda-1)x_{2p+2-i} \end{cases}$$

<u>1er cas</u>.. $\lambda \notin \{0, 1, 2\}$. Alors $\lambda(2-\lambda) \neq 0$ et $1-\lambda \neq 0$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_k = 0 \\ x_{p+1} = 0 \\ \forall i \in [\![p+2, 2p+1]\!],\ x_i = (\lambda-1) \times 0 = 0 \end{cases} \iff X = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}.$$

<u>$\lambda$ n'est pas valeur propre de A.</u>

__2ième cas..__ $\lambda = 1$. Alors $\lambda(2-\lambda) \neq 0$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k = 0 \\ \forall i \in [\![p+2, 2p+1]\!],\ x_i = (\lambda - 1)\, x_{2p+2-i} = 0 \times 0 = 0 \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \iff x_1 = \dots = x_p = x_{p+2} = \dots = x_{2p+1} = 0.$$

Alors __1 est valeur propre de A et $SEP(A,1) = Vect(E_{2p+1})$.__

__3ième cas..__ $\lambda = 0$. Alors $\lambda(2-\lambda) = 0$ et $1 - \lambda \neq 0$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_{p+1} = 0 \\ \forall i \in [\![p+2, 2p+1]\!],\ x_i = -x_{2p+2-i} \end{cases} \iff \begin{cases} x_{p+1} = 0 \\ x_{p+2} = -x_p \\ x_{p+3} = -x_{p-1} \\ \vdots \\ x_{2p+1} = -x_1 \end{cases}.$$

Alors 0 est valeur propre de A et $SEP(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ -x_p \\ \vdots \\ -x_1 \end{pmatrix} ; (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$

notons que $\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ -x_p \\ \vdots \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1(E_1 - E_{2p+1}) + x_2(E_2 - E_{2p}) + \dots + x_p(E_p - E_{p+2})$.

Alors $SEP(A,0) = Vect(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+2})$.

$(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+2})$ est une famille génératrice de $SEP(A,0)$. Comme dans V1 on montre que cette famille est libre.

Ainsi __$(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots E_p - E_{p+2})$ est une base de $SEP(A,0)$__ de cardinal p.

Alors __$\dim SEP(A,0) = p$.__

R.



4ème Cas. $\lambda = 2$ . Alors $\lambda(2-\lambda)=0$ et $1-\lambda \neq 0$.

$$AX=\lambda X \iff \begin{cases} x_{p+1}=0 \\ \forall i \in [\![p+2,2p+1]\!],\ x_i = x_{2p+2-i} \end{cases} \iff \begin{cases} x_{p+1}=0 \\ x_{p+2}=x_p \\ x_{p+3}=x_{p-1} \\ \vdots \\ x_{2p+1}=x_1 \end{cases}.$$

Alors 2 est valeur propre de A et $SEP(A,2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ x_p \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} ; (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$.

Notons que $\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ x_p \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1(E_1+E_{2p+1}) + x_2(E_2+E_{2p}) + \dots + x_p(E_p+E_{p+2})$.

Alors $SEP(A,2) = Vect(E_1+E_{2p+1}, E_2+E_{2p}, \dots, E_p+E_{p+2})$.

$(E_1+E_{2p+1}, E_2+E_{2p}, \dots, E_p+E_{p+2})$ est une famille génératrice de $SEP(A,2)$. On montre comme dans V1 que cette famille est libre.

Ainsi $\underline{(E_1+E_{2p+1}, E_2+E_{2p}, \dots, E_p+E_{p+2}) \text{ est une base de } SEP(A,2)}$ . de cardinal p.

Alors $\underline{\dim SEP(A,2) = p}$.

Finalement
1°) $Sp\ A = \{0, 1, 2\}$

2°) → $(E_1-E_{2p+1}, E_2-E_{2p}, \dots, E_p-E_{p+2})$ est une base de $SEP(A,0)$.

→ $(E_{p+1})$ est une base de $SEP(A,1)$

→ $(E_1+E_{2p+1}, E_2+E_{2p}, \dots, E_p+E_{p+2})$ est une base de $SEP(A,2)$

3°) $\dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,1) + \dim SEP(A,2) = 2p+1$ donc A est diagonalisable.

EXERCICE 64



**Exercice**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. $E$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $(n-1)$.

Soit $T$ l'application qui à tout polynôme $P \in E$, associe le polynôme $Q = T(P)$ défini par :

$Q(X) = P(X) + \dfrac{1-X}{n} P'(X)$, où $P'$ désigne le polynôme dérivé de $P$.

**Q1** Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$.

**Q2** Donner la matrice associée à $T$ dans la base canonique de $E$.

**Q3** Montrer que $T$ admet $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

*JF Attention à ne pas faire d'erreur sur la valeur de $\lambda_k$...*

**Q4** a) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_n$.

b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $P$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_k$. Montrer que $P(1) = 0$.

On pose alors $P(X) = (X-1)^r R(X)$, avec $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $R(1) \neq 0$. Montrer que $r = n-k$ et que $R$ est constant.

c) En déduire le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_k$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

**Q5** On considère la suite de polynômes définie par $U_1(X) = X^{n-1}$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $U_{j+1}(X) = T(U_j)(X)$.

a) Montrer que : $U_1(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k$.

b) En déduire l'expression de $U_j(X)$ en fonction de $1, X-1, \ldots, (X-1)^{n-1}$, ceci pour tout $j \in [\![2, +\infty[\![$.

---

Q1 * Soit $P \in E$, $P'$ est un polynôme de degré au plus $n-2$. Alors $\frac{1-X}{n} P'$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ donc est un élément de $E$.

Alors $P + \frac{1-X}{n} P'$ appartient à $E$ comme somme de deux éléments de $E$.

Donc $\forall P \in E, T(P) \in E$. <u>$T$ est une application de $E$ dans $E$.</u>

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, \hat{P}) \in E^2$.

$T(\lambda P + \hat{P}) = \lambda P + \hat{P} + \frac{1-X}{n}(\lambda P + \hat{P})' = \lambda P + \hat{P} + \frac{1-X}{n}(\lambda P' + \hat{P}')$.

$T(\lambda P + \hat{P}) = \lambda\left(P + \frac{1-X}{n} P'\right) + \hat{P} + \frac{1-X}{n}\hat{P}' = \lambda T(P) + T(\hat{P})$.

Donc <u>$T$ est linéaire</u>.

Finalement <u>$T$ est un endomorphisme de $E$.</u>

**Q2** • $T(1) = 1 + \frac{1-X}{n} \times 0 = 1$.

• $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $T(X^k) = X^k + \frac{1-X}{n} k X^{k-1} = \left(1 - \frac{k}{n}\right) X^k + \frac{k}{n} X^{k-1}$.

Posons $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\underline{a_k = 1 - \frac{k}{n}}$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\underline{b_k = \frac{k}{n}}$.

<u>la matrice de $T$ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^{n-1})$ de $E$ est</u> $\begin{pmatrix} a_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_1 & b_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & (0) & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} \end{pmatrix}$

**Q3** cette matrice est triangulaire supérieure.

Les valeurs propres sont les éléments de sa diagonale. Son spectre est $\{1 - \frac{k}{n} \,;\, k \in [\![0, n-1]\!]\}$. $\underline{Sp\, T = \{1 - \frac{k}{n} \,;\, k \in [\![0, n-1]\!]\}}$

Rappelons que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = 1 - \frac{k}{n}$.

$\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $a_{k+1} - a_k = 1 - \frac{k+1}{n} - 1 + \frac{k}{n} = -\frac{1}{n} < 0$.

La suite $(a_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ est strictement décroissante.

Posons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = a_{n-k}$ (si $k \in [\![1, n]\!]$, $n-k \in [\![0, n-1]\!]$ !).

Alors $(\lambda_k)_{k \in [\![1, n]\!]}$ est strictement croissante et $Sp\, T = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

Donc <u>$T$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$</u>

<u>telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.</u>

<u>Remarque</u>.. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = a_{n-k} = 1 - \frac{n-k}{n} = \frac{k}{n}$. $\underline{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = \frac{k}{n}}$

<u>Comme $\dim E = n$ : $T$ est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont</u>

<u>des droites vectorielles.</u>

**Q4** a) $\lambda_n = 1$. Or $T(1) = 1$. Donc le polynôme $1$ est un élément non nul de $SEP(T, \lambda_n)$ qui est de dimension $1$. Alors $\underline{SEP(T, \lambda_n) = \mathrm{Vect}(1)}$.

**b)** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. $\lambda_k = \frac{k}{n}$. $T(P) = \frac{k}{n} P$.

Alors $P + \frac{1-X}{n} P' = \frac{k}{n} P$. En évaluant en 1 on obtient :

$P(1) = \frac{k}{n} P(1)$. Or $\frac{k}{n} \neq 1$ car $k \in [\![1, n-1]\!]$. Ainsi $\underline{\underline{P(1) = 0}}$.

$P = (X-1)^r R$ avec $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $R(1) \neq 0$

$r$ n'est autre que l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans $P$.

$\frac{k}{n}(X-1)^r R = \frac{k}{n} P = T(P) = P + \frac{1-X}{n} P' = (X-1)^r R - \frac{X-1}{n}\left[r(X-1)^{r-1} R + (X-1)^r R'\right]$

Donc $\frac{k}{n}(X-1)^r R = (X-1)^r R - \frac{1}{n}(X-1)^r\left[r R + (X-1) R'\right]$

Donc $(X-1)^r \left[\left(\frac{k}{n} - 1\right) R + \frac{1}{n}\left(r R + (X-1) R'\right)\right] = 0_E$.

Comme $(X-1)^r$ n'est pas le polynôme nul il vient :

$\left(\frac{k}{n} - 1 + \frac{r}{n}\right) R + \frac{1}{n}(X-1) R' = 0_E$. (1)

En évaluant en 1 il vient : $\left(\frac{k}{n} - 1 + \frac{r}{n}\right) R(1) = 0$. Or $R(1) \neq 0$

donc $\frac{k}{n} - 1 + \frac{r}{n} = 0$ ; $\frac{r}{n} = 1 - \frac{k}{n}$ ; $\underline{\underline{r = n - k}}$.

Comme $r = n-k$, (1) donne : $0 . R + \frac{1}{n}(X-1) R' = 0_E$.

$\frac{1}{n}(X-1)$ étant un polynôme différent du polynôme nul : $R' = 0_E$.

Alors $\underline{\underline{R \text{ est constant.}}}$ donc $\underline{\underline{\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ (et même } \mathbb{R}^*), \ P = \lambda (X-1)^{n-k}}}$.

**c)** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Nous venons de voir que si $P$ est un élément non nul de $SEP(T, \lambda_k)$ alors $P \in \text{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right)$.

Évidemment $0_E \in \text{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right)$ donc $SEP(T, \lambda_k) \subset \text{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right)$.

Or $\dim SEP(T, \lambda_k) = 1 = \dim \text{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right) < +\infty$. Plus de doute :

$SEP(T,\lambda_k) = \mathrm{Vect}\left(\left((X-1)^{n-k}\right)\right)$.

Observons que ce résultat vaut encore pour $k=n$.

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $SEP(T,\lambda_k) = \mathrm{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right)$.

Remarque.. $\mathcal{B} = \left((X-1)^{n-1}, (X-1)^{n-2}, \dots, (X-1), 1\right)$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $T$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ou $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$ !

Q5 a) $U_1 = X^{n-1} = (X-1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}(X-1)^k$.

$$U_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}(X-1)^k.$$

b) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $U_{j+1} = T(U_j)$.

Alors $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $U_j = T^{j-1}(U_1)$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $U_j = T^{j-1}(U_1) = T^{j-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(X-1)^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} T^{j-1}\left((X-1)^k\right)$.

$\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $T\left((X-1)^k\right) = T\left((X-1)^{n-(n-k)}\right) \overset{\boxed{Q4}\,(*)}{=} \frac{n-k}{n}(X-1)^{n-(n-k)} = \frac{n-k}{n}(X-1)^k$.

Alors $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $T^{j-1}\left((X-1)^k\right) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1}(X-1)^k$.

Donc $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $U_j = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1}(X-1)^k$.

(*) $(X-1)^{n-(n-k)}$ est un vecteur propre de $T$ associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$.