**EXERCICE 16** **N1** **Espace vectoriel des polynômes d'une matrice carrée $A$ diagonalisable.**

$A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de $A$.

On suppose que $A$ est diagonalisable. Ainsi il existe un matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q1. Montrer que si $S$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ alors $S(A) = PS(D)P^{-1}$.

Q2. On pose $T = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$.

a) Montrer que $T(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

b) Montrer que $\mathcal{S} = \{S \in \mathbb{K}[X] \mid S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$ est l'ensemble des multiples de $T$.

Q3. $\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}[X]\}$.

a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qu'il est engendré par $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$.

b) Montrer que $\mathcal{F}$ est de dimension $p$.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$.*

---

**Q1** Soit $S$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. Il existe $r$ dans $\mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ dans $\mathbb{K}^{r+1}$ tel que $S = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.

Notons que $A = PDP^{-1}$ et que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ (récurrence simple).

Alors $S(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k A^k = \sum_{k=0}^{r} a_k (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{r} a_k PD^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{r} a_k D^k\right)P^{-1}$. Alors :

$$\boxed{\forall S \in \mathbb{K}[X],\ S(A) = PS(D)P^{-1}.}$$

**Q2** a) $T(A) = PT(D)P^{-1}$. $D$ est diagonale. Posons $D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Alors $T(D)$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\,\big(T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots, T(\alpha_n)\big)$.

$A$ et $D$ sont semblables donc ont même spectre. Alors $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Par conséquent $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ sont des zéros de $T$ (et même les zéros de $T$).

Donc $T(D) = \mathrm{Diag}\big(T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots, T(\alpha_n)\big) = \mathrm{Diag}\big(0, 0, \ldots, 0\big) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Par conséquent $T(A) = PT(D)P^{-1} = P0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

$$\boxed{T(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.}$$

b) Soit $S$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

$S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \iff PS(D)P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \iff P^{-1}PS(D)P^{-1}P = P^{-1}\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}P \iff S(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

A noter que la seconde équivalence est vraie car $P$ est inversible...

$S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \iff \mathrm{Diag}\big(S(\alpha_1), S(\alpha_2), \ldots, S(\alpha_n)\big) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ S(\alpha_k) = 0$.

Rappelons que $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ et que $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ sont deux à deux distincts. Alors :

$S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \iff \forall k \in [\![1, p]\!],\ S(\lambda_k) = 0 \iff (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\cdots(X - \lambda_p)$ divise $S \iff T$ divise $S$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{S \in \mathbb{K}[X] \mid S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\} \text{ est l'ensemble des multiples de } T.}$$

**Q3** $\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}[X]\}$ contient $\mathcal{F}' = \{S(A); S \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$.

Réciproquement soit $S(A)$ un élément de $\mathcal{F}$ ($S$ est dans $\mathbb{K}[X]$).

La division euclidienne de $S$ par $T$ conduit à $S = QT + R$ avec $Q$ dans $\mathbb{K}[X]$, $R$ dans $\mathbb{K}[X]$ et $\deg R < \deg T = p$.

Ainsi $R \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$. De plus $S(A) = Q(A)T(A) + R(A) = R(A)$ car $T(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Alors $S(A) = R(A)$ avec $R$ dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ donc $S(A)$ est un élément de $\mathcal{F}'$.

Finalement $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. $\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\} = \left\{\sum_{k=0}^{p-1} a_k\, A^k; (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p\right\} = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$.

$$\boxed{\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}[X]\} \text{ est le sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ engendré par } (I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1}).}$$

b) $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{F}$ de cardinal $p$. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est de dimension $p$ il suffit de prouver que cette famille est libre.

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ un élément de $\mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k\, A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Posons $U = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, X^k$.

$U(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donc $T$ divise $U$. Or $U$ est de degré au plus $p-1$ et $T$ est de degré $p$ donc $U$ est nul.

Alors ses coefficients sont nuls. Par conséquent $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$.

Ceci achève de prouver que $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$ est une famille libre. C'est donc une base de $\mathcal{F}$.

$$\boxed{\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}[X]\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ de dimension } p.}$$

---

**EXERCICE 17** **N2** **Endomorphisme cyclique again.**

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n$ ($n \in [\![3, +\infty[\![$).

Un endomorphisme $f$ de $E$ est cyclique s'il existe un vecteur $x_0$ de $E$ tel que $(f_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$.

Q1. Soit $f$ un endomorphisme cyclique de $f$ et $x_0$ un élément de $E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$.

$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est la famille des coordonnées de $f^n(x_0)$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. a) Écrire la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$.

b) Montrer que ce type de matrice caractérise les endomorphismes cycliques.

Q2. a) Montrer que $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

En déduire que tout polynôme annulateur non nul de $f$ a un degré supérieur ou égal à $n$.

b) Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^n\big(f^k(x_0)\big) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, f^i\big(f^k(x_0)\big)$.

En déduire que $P = X^n - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, X^i$ est un polynôme annulateur non nul de $f$.

Q3. a) Soit $\lambda$ une racine de $P$ et $Q$ le quotient de $P$ par $X - \lambda$.

Montrer que si $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$, $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et en déduire une contradiction. Conclusion ?

b) Montrer que les valeurs propres de $f$ sont les racines de $P$. Que dire de $f$ si $P$ admet $n$ racines distinctes ?

c) On suppose que $f$ est diagonalisable et on note $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_p$ ses valeur propres distinctes.

Montrer que $S = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)$ est un polynôme annulateur non nul de $f$ et en déduire que $p = n$.

d) Conclure cette question.

Q4. $g$ est un endomorphisme diagonalisable de $E$ ayant $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1$, ..., $\lambda_n$.

Pour tout $i$ dans $[\![1, n]\!]$, $e_i$ est un vecteur propre de $g$ associé à la valeur propre $\alpha_i$. On pose $x_0 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.

On considère $n$ éléments $\gamma_0$, $\gamma_1$, ..., $\gamma_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k\, g^k(x_0) = 0_E$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k\, \lambda_i^k \right) e_i = 0_E$. En déduire que $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$... et que $g$ est cyclique.

*Thème abordé dans LYON MI 2001 Pb 1, LYON 2006 Pb 2, oral ESCP 1998 2-26, 2000 2-10, 2003 2.20, 2010 2.12, 2012 2.10.*

R.



**Q1** a) $\forall i \in [\![0, n-2]\!]$, $f(f^i(x_0)) = f^{i+1}(x_0)$ et $f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$.

Alors $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$.

b) * Nous venons de voir que si $f$ est un endomorphisme cyclique de $E$ il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$. Montrons la réciproque.

* Soit $g$ un endomorphisme de $E$ tel qu'il existe une base $\hat{\mathcal{B}} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n)$ telle que $M_{\hat{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \hat{a}_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \hat{a}_{n-2} \\ \vdots & \ddots & 1 & \hat{a}_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$. Alors $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $g(\hat{e}_i) = \hat{e}_{i+1}$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\hat{e}_i = g^{i-1}(\hat{e}_1)$. Donc $\hat{\mathcal{B}} = (\hat{e}_1, g(\hat{e}_1), \dots, g^{n-1}(\hat{e}_1))$. Mais $g$ est cyclique.

Ceci achève de prouver la caractérisation proposée.

**Q2** a) Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\forall x \in E$, $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x) = 0_E$.

Alors $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0_E$. Comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Ainsi $(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Soit $\tilde{P}$ un polynôme annulateur non nul de $f$. Soit $r$ son degré.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^{r+1}$, $\tilde{P} = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.

Alors $\sum_{k=0}^{r} a_k f^k = \tilde{P}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Supposons $r < n$. Alors la famille $(Id_E, f, \dots, f^r)$ est libre car $(Id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre. Ainsi $a_0 = a_1 = \dots = a_r = 0$. Alors $\tilde{P} = 0_{\mathbb{K}[X]}$ !!

Tout polynôme annulateur non nul de $f$ a un degré supérieur ou égal à $n$.

b) Soit $\ell \in [\![0, n-1]\!]$. $f^n(f^\ell(x_0)) = f^\ell(f^n(x_0)) = f^\ell\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{\ell+i}(x_0)$.

$f^n(f^\ell(x_0)) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(f^\ell(x_0)) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i\right)(f^\ell(x_0))$. Posons $R = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$.

$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $f^n(f^\ell(x_0)) = R(f)(f^\ell(x_0))$. Alors $f^n$ et $R(f)$ sont deux endomorphismes de $E$ qui coïncident sur la base $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ de $E$.

Alors $f^n = R(f)$. $f^n - R(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $(X^n - R)(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

donc $X^n - R$ est un polynôme annulateur non nul (car de degré $n$) de $f$.

$P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ est un polynôme annulateur non nul de $f$.

Q3 a) Supposons que $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$. Alors $\ker(f - \lambda Id_E) = \{0_E\}$.

$f - \lambda Id_E$ est un endomorphisme de $E$ qui est de dimension finie. Ainsi $f - \lambda Id_E$ est un automorphisme de $E$.

$0_{\mathcal{L}(E)} = P(f) = ((X-\lambda)Q)(f) = (f - \lambda Id_E) \circ Q(f)$.

Donc $0_{\mathcal{L}(E)} = (f - \lambda Id_E)^{-1} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = (f - \lambda Id_E)^{-1} \circ (f - \lambda Id_E) \circ Q(f) = Q(f)$. $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$Q$ est donc un polynôme annulateur de $f$.

Or $P = (X - \lambda)Q$ et $\deg P = n$. Donc $\deg Q = n - 1$.

Alors $Q$ est un polynôme annulateur non nul de $f$ de degré $n-1$. Ceci contredit $Q$ c) j).

Ainsi si $\lambda$ est une racine de $P$, $\lambda$ est une valeur propre de $f$.

b) Ce qui précède montre que toute racine de $P$ est valeur propre de $f$.

Mais $P$ est un polynôme annulateur de $f$ donc toute valeur propre de $f$ est racine de $P$.

Finalement les valeurs propres de $f$ sont les racines de $P$.

Comme $E$ est de dimension $n$ si $P$ admet $n$ racines distinctes, $f$ admet $n$ valeurs propres distinctes donc $f$ est diagonalisable.

Si $P$ admet $n$ racines distinctes, $f$ est diagonalisable. Montrons la réciproque...

c) $f$ est diagonalisable et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont ses valeurs propres distinctes alors

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} SEP(f, \alpha_i)$. Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f, \alpha_1) \times SEP(f, \alpha_2) \times \dots \times SEP(f, \alpha_p)$

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i. \quad S(f)(x) = S(f)\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} S(f)(x_i) \underset{x_i \in SEP(f,\alpha_i)}{=} \sum_{i=1}^{p} S(\alpha_i) x_i \underset{S = \prod_{\ell=1}^{p}(X-\alpha_\ell)}{=} \sum_{i=1}^{p} 0 . x_i = 0_E$$

Ainsi $\forall x \in E$, $S(f)(x) = 0_E$.

$S(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $S$ est donc un polynôme annulateur non nul de $f$ de degré $p$ ainsi $p \geq n$ d'après Q2 c). Or $f$ a au plus $n$ valeurs propres distinctes donc $p \leq n$.

Finalement $p = n$ et $f$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes.

d) Il résulte de ce qui précède que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $f$ est diagonalisable ;

ii) $f$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes ;

iii) $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ admet $n$ racines deux à deux distinctes.

Q4) $x_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et pour tout $i$ dans $[\![1, n]\!]$, $e_i \in SEP(g, \lambda_i)$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^k(x_0) = \sum_{i=1}^{n} g^k(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i$.

Par hypothèse $\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k g^k(x_0) = 0_E$. Alors $0_E = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \lambda_i^k\right) e_i$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \lambda_i^k\right) e_i = 0_E$. Notons $S$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k X^k$.

1) $S \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$

2) $\sum_{i=1}^{n} S(\lambda_i) e_i = 0_E$.

$g$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes donc ses sous-espaces propres sont de dimension 1. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{B}_i = (e_i)$ est une base de $SEP(g, \lambda_i)$ car $e_i$ est un vecteur propre de $g$ associé à la valeur propre $\lambda_i$.

Comme $E = \bigoplus SEP(g, \lambda_i)$, "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_n$" est une base de $E$.

Ainsi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre. Alors $\sum_{i=1}^{n} S(\lambda_i)\, e_i = 0_E$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $S(\lambda_i) = 0$

$S$ a donc au moins $n$ racines distinctes.

Comme $S \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $S$ est le polynôme nul. Alors $\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k X^k = 0_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}$.

donc $\sigma_0 = \sigma_1 = \dots = \sigma_{n-1} = 0$.

Finalement $\forall (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, $\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k\, g^k(x_0) \Rightarrow \sigma_0 = \sigma_1 = \dots = \sigma_{n-1} = 0$.

Alors $(x_0, g(x_0), \dots, g^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de $E$ dont le cardinal coïncide avec la dimension de $E$. $(x_0, g(x_0), \dots, g^{n-1}(x_0))$ est donc une base de $E$.

$g$ est alors cyclique.

**Remarque** : Soit $g$ un endomorphisme de $E$ espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $g$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes ;

ii) $g$ est cyclique et diagonalisable.

**EXERCICE 18** **N2+** **Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire. Application. Oral ESCP 2012 2.11**

Soit $E$ un $\mathbb{C}$−espace vectoriel de dimension finie $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $f$ un endomorphisme de $E$.

Q1. a) Soit $P$ un polynôme annulateur de $f$ de la forme $P = (X - \lambda)Q$. Montrer que si $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$, alors $Q$ est un polynôme annulateur de $f$.

Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de $f$ tel que toute racine de $R$ est une valeur propre de $f$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $f$, montrer qu'il existe un hyperplan $H$ de $E$ contenant $\mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$, où $\mathrm{Id}_E$ désigne l'endomorphisme identité.

c) Montrer que la restriction de $f$ à $H$ est un endomorphisme de $H$.

d) Montrer par récurrence sur $n$, que tout endomorphisme de $E$ admet une base dans laquelle la matrice associée est triangulaire supérieure.

Q2. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $p$ complexes distincts. Soit $i$ un élément de $[\![1, p]\!]$.

Justifier l'existence de polynômes $Q_i$ tels que, pour $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $Q_i(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Q_i(0) = 0$.

Q3. La trace $\mathrm{tr}(M)$ d'une matrice carrée $M$ est par definition la somme de ses coefficients diagonaux. On admet que deux matrices semblables ont la même trace.

On suppose dans la suite que la matrice $M$ de $f$ dans une base $\mathcal{B}$ de $E$ est telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}(M^k) = 0$.

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f$.

Montrer qu'il existe $p$ entiers non nuls $m_1$, $m_2$, ..., $m_p$, indépendants de $P$, tels que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} m_j P(\lambda_j) = 0$.

b) En prenant pour $P$ des polynômes introduits dans la question 2, montrer que $M$ est nilpotente c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $M^m = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

R.



**Q1** a) Supposons que $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$. Alors $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)=\{0_E\}$.

$(f-\lambda Id_E)\circ Q(f)=((X-\lambda)Q)(f)=P(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$.

donc $\forall x\in E$, $((f-\lambda Id_E)\circ Q(f))(x)=0_E$.

$\forall x\in E$, $(f-\lambda Id_E)(Q(f)(x))=0_E$. $\forall x\in E$, $Q(f)(x)\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)$.

Alors $\forall x\in E$, $Q(f)(x)=0_E$. $Q(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Si $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$ alors $Q$ est un polynôme annulateur de $f$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de $f$.

D'après ce cours $\mathcal{S}$ n'est pas vide.

Posons $\mathcal{D}=\{\deg S\,;\,S\in\mathcal{S}\}$. $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Alors $\mathcal{D}$ possède un plus petit élément $r$. $\exists R\in\mathcal{S}$, $\deg R=r$.

$R$ est un polynôme annulateur non nul de $f$ (... de degré minimal).

Soit $\lambda$ une racine de $R$. Supposons que $\lambda$ ne soit pas valeur propre de $f$.

$\exists \hat{R}\in\mathbb{C}[X]$, $R=(X-\lambda)\hat{R}$.

Alors $\deg\hat{R}=r-1$ et, d'après ce qui précède, $\hat{R}$ est un polynôme annulateur non nul de $f$. Alors $\hat{R}\in\mathcal{S}$ et $r-1\in\mathcal{D}$. Or $r=\min_{d\in\mathcal{D}} d$ !

Ainsi toute racine de $R$ est une valeur propre de $f$.

Il existe un polynôme $R$ de $\mathbb{C}[X]$ annulateur de $f$ tel que toute racine de $R$ est une valeur propre de $f$.

Remarques.. 1.. Supposons que $R$ soit constant. $\exists\lambda\in\mathbb{C}^*$, $R=\lambda$ ($R$ n'est pas nul).

Alors $0_{\mathcal{L}(E)}=R(f)=\lambda Id_E$ et $\lambda\neq 0$ donc $Id_E=0_{\mathcal{L}(E)}$ !

Ainsi $\deg R\geq 1$. Donc $R$ admet au moins une racine. $f$ admet donc au moins une valeur propre.

2.. Comme $R$ est un polynôme annulateur de $f$, les valeurs propres de $f$ sont des racines de $R$.

Finalement les valeurs propres de $f$ sont LES racines de $R$.

b) $\lambda$ est une valeur propre de $f$ donc $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \neq \{0_E\}$.

Alors $n = \dim E = \dim \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) + \dim \mathrm{Im}(f-\lambda Id_E) \geq 1 + \dim \mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$.

Donc $\dim \mathrm{Im}(f-\lambda Id_E) \leq n-1$.

1er cas.. $\dim \mathrm{Im}(f-\lambda Id_E) = 0$. Alors $\mathrm{Im}(f-\lambda Id_E) = \{0_E\}$.

Tout hyperplan de $E$ contient $\mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$.

2ème cas.. $\dim \mathrm{Im}(f-\lambda Id_E) = n-1$.

Alors $\mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$ est un hyperplan de $E$ qui contient $\mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$.

3ème cas.. $1 \leq \dim \mathrm{Im}(f-\lambda Id_E) \leq n-2$. Posons $p = \dim \mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$.

Soit $(t_1, t_2, \dots, t_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$. Le théorème de la base incomplète indique que l'on peut compléter la famille libre $(t_1, t_2, \dots, t_p)$ en une base $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de $E$. Posons $H = \mathrm{Vect}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$.

$\dim H = n-1$ car $(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ est une famille libre et génératrice de $H$.

Ainsi $H$ est un hyperplan de $E$. De plus $\mathrm{Vect}(t_1, t_2, \dots, t_p) \subset \mathrm{Vect}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$.
$1 \leq p \leq n-2$

Alors $\mathrm{Im}(f-\lambda Id_E) \subset H$.

Dans tous les cas il existe un hyperplan $H$ de $E$ qui contient $\mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$.

c) Soit $x \in H$. $x = (f-\lambda Id_E)(x) + \lambda x$.

Or $(f-\lambda Id_E)(x) \in \mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$ donc $(f-\lambda Id_E)(x) \in H$ car $H$ contient $\mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$.

De plus $\lambda x \in H$ car $x \in H$.

Alors $f(x)$ est la somme de deux éléments de $H$, c'est donc un élément de $H$.

$\forall x \in H$, $f(x) \in H$. $H$ est stable par $f$.

Soit $h$ l'application de $H$ dans $H$ définie par $\forall x \in H$, $h(x) = f(x)$.

$f$ est linéaire $h$ l'est également. Donc $h$ est un endomorphisme de $H$.

d) * La propriété est vraie pour $n=1$ car toute matrice de $M_1(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure !

* Supposons que $n \in [\![2,+\infty[\![$ et que la propriété soit vraie pour $n-1$.
Montrons la pour $n$.
Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{C}$ et $f$ un endomorphisme de $E$.
Comme nous l'avons dit dans Q1, $f$ admet au moins une valeur propre $\lambda$ (complexe).
Alors il existe un hyperplan $H$ de $E$ qui contient $\mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$. De plus l'application $h$ de $H$ dans $H$ définie par $\forall x \in H$, $h(x)=f(x)$ est un endomorphisme de $H$. $\dim H = n-1 \geq 1$. L'hypothèse de récurrence permet de dire qu'il existe une base $\mathcal{B}_1=(e_1,e_2,\dots,e_{n-1})$ de $H$ telle que $M_{\mathcal{B}_1}(h)$ soit triangulaire supérieure.
Soit $D$ un supplémentaire de $H$ dans $E$. $\dim D = \dim E - \dim H = 1$. Soit $e_n$ un vecteur non nul de $D$. $\mathcal{B}_2=(e_n)$ est une base de $D$.
Comme $E = H \oplus D$, $\mathcal{B} = \text{"}\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2\text{"} = (e_1,e_2,\dots,e_{n-1},e_n)$ est une base de $E$.
$M_{\mathcal{B}_1}(h)$ est triangulaire supérieure donc $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $f(e_i)=h(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)$
De plus $f(e_n) \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_n)$.
Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_i)$. Alors $M_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure.
Ceci achève la récurrence.

<u>Si $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie non nulle et si $f$ est un endomorphisme de $E$, il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ associée est triangulaire supérieure.</u>

Q2 <u>1er cas..</u> $p=1$. Posons $Q_1=X$. $Q_1(\alpha_1)=\alpha_1$ et $Q_1(0)=0$.

<u>2ème cas..</u> $p \geq 2$. Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Posons $Q_i = \left(\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(\alpha_i-\alpha_k)}\right) X \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(X-\alpha_k)$.

Alors $0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p$ sont des racines de $Q_i$.

$$Q_i(\alpha_i) = \frac{1}{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{p}(\alpha_i-\alpha_\ell)}\ \alpha_i \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{p}(\alpha_i-\alpha_\ell) = \alpha_i.$$

Ainsi $Q_i \in \mathbb{C}[X]$, $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $Q_i(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Q_i(0)=0$.

Dans les deux cas : $\forall i \in [\![1,p]\!], \exists Q_i \in \mathbb{C}[X], \forall j \in [\![1,p]\!], Q_i(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Q_i(0)=0$.

---

Q3) a) On cherche une base $\mathcal{B}'$ de $E$ telle que la matrice $M'$ de $f$ dans cette base soit triangulaire supérieure. $M'$ est semblable à $M$. Soit $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $M' = M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}MP$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M'^k = (P^{-1}MP)^k = P^{-1}M^kP$.

Donc pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $tr(M'^k) = tr(M^k) = 0$.

Posons $M' = (a_{i,j})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M'^k = (a_{i,j}(k))$.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i}(k) = a_{i,i}^k$ et que $M'^k$ est triangulaire supérieure

* la propriété est vraie pour $k=1$ car $M' = (a_{i,j})$ et $M' = (a_{i,j}(1))$.
  De plus $M'$ est triangulaire supérieure.

* Supposons la propriété vraie pour $k$ dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.
  L'hypothèse de récurrence indique que $M'^k$ est triangulaire supérieure et
  $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i}(k) = a_{i,i}^k$. Notons que $M'^{k+1} = M'M'^k$. Alors :
  $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}(k+1) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}\, a_{\ell,j}(k)$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i>j$.

$$a_{i,j}(k+1) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}\, a_{\ell,j}(k) \underset{\uparrow}{=} \sum_{\ell=i}^{n} a_{i,\ell}\, a_{\ell,j}(k) \overset{\downarrow}{=} 0$$

$a_{\ell,j}(k) = 0$ si $\ell > j$ donc si $\ell \in [\![i,n]\!]$ car $i>j$ et $A^k$ est triangulaire supérieure.

$A$ est triangulaire $\rightarrow a_{i,\ell} = 0$ si $i > \ell$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i>j \Rightarrow a_{i,j}(k+1) = 0$. $M'^{k+1}$ est triangulaire supérieure.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i}(k+1) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}\, a_{\ell,i}(k) \underset{a_{i,\ell}=0 \text{ si } i>\ell}{=} \sum_{\ell=i}^{n} a_{i,\ell}\, a_{\ell,i}(k) \underset{a_{\ell,i}(k)=0 \text{ si } \ell>i}{=} a_{i,i}\, a_{i,i}(k) \underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} a_{i,i}\, a_{i,i}^{k} = a_{i,i}^{k+1}$.

Ainsi $M'^{k+1}$ est triangulaire supérieure et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i}(k+1) = a_{i,i}^{k+1}$.

Ceci achève la récurrence.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 = tr(M'^{k}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^{k}$.

$M'$ est triangulaire supérieure donc $Sp\, M' = \{a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}\}$ de plus $M'$ est semblable à $M$, donc $Sp\, M' = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. Alors $\{a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. Posons :

$\forall j \in [\![1,p]\!]$, $S_j = \{i \in [\![1,n]\!] \mid a_{i,i} = \lambda_j\}$.

$S_1, S_2, \dots, S_p$ sont non vides et deux à deux disjoints. De plus $\bigcup_{j=1}^{p} S_j = [\![1,n]\!]$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$0 = tr(M'^{k}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^{k} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i \in S_j} a_{i,i}^{k} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i \in S_j} \lambda_j^{k} = \sum_{j=1}^{p} (\text{card } S_j)\, \lambda_j^{k}$.

Posons pour tout $j$ dans $[\![1,p]\!]$, $m_j = \text{card } S_j$.

Alors $m_1, m_2, \dots, m_p$ sont des entiers non nuls indépendants du polynôme $P$.

De plus $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j=1}^{p} m_j \lambda_j^{k} = 0$.

$P \in \mathbb{C}[X]$ et $P(0) = 0$. Alors $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists (b_1, b_2, \dots, b_r) \in \mathbb{C}^r$, $P = \sum_{\ell=1}^{r} b_\ell X^{\ell}$.

$\sum_{j=1}^{p} m_j P(\lambda_j) = \sum_{j=1}^{p} m_j \sum_{\ell=1}^{r} b_\ell \lambda_j^{\ell} = \sum_{\ell=1}^{r} \left( b_\ell \left( \sum_{j=1}^{p} m_j \lambda_j^{\ell} \right) \right) = \sum_{\ell=1}^{r} b_\ell \times 0 = 0$. $\sum_{j=1}^{p} m_j P(\lambda_j) = 0$

Ainsi il existe $p$ entiers non nuls $m_1, m_2, \dots, m_p$ indépendants de $P$ tels que :

$\sum_{j=1}^{p} m_j P(\lambda_j) = 0$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. $\exists Q_i \in \mathbb{C}[X]$, $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $Q_i(\lambda_j) = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Q_i(0) = 0$ (d'après Q2).

Alors $0 = \sum_{j=1}^{p} m_j Q_i(\lambda_j) = m_i \lambda_i$ et $m_i \neq 0$. Donc $\lambda_i = 0$.

Ainsi $\underline{\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0}}$.

Nous avons vu que $f$ possède un polynôme annulateur non nul $R$ tel que les valeurs propres de $f$ soient les zéros de $R$.

Comme $Sp\, f = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} = \{0\}$, $0$ est le seul zéro de $R$ et $R \in \mathbb{C}[X]$.

Alors $\exists\, C \in \mathbb{R}^*$, $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$, $R = C X^m$. $\quad 0_{\mathcal{L}(E)} = R(f) = C f^m$ et $C \neq 0$.

Alors $f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi $M^m = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. $\underline{\underline{M \text{ est nilpotente.}}}$

Ancienne correction

**Exercice 19** .. Q1.. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $Sp(A) \neq \emptyset$

Q2.. Montrer par récurrence sur $n$ que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

---

(Q1) $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = n^2$. Alors $(I, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est nécessairement une famille liée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2+1}$, $\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k A^k = 0$ et $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{C}^{n^2+1}}$.

Posons $P = \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$, $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ et $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Supposons $P$ constant. $\exists c \in \mathbb{C}$, $P = c$.
$P(A) = c I_n$ et $P(A) = 0$. Ainsi $c = 0$. $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ !

Alors $\deg P \geq 1$. $P$ est scindé. $\exists b \in \mathbb{C}^*$, $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$,
$P = b \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)$. $P(A) = 0$ donc $b \prod_{k=1}^{r} (A - \lambda_k I_n) = 0$, $\prod_{k=1}^{r} (A - \lambda_k I_n) = 0$.

La matrice nulle $\prod_{k=1}^{r} (A - \lambda_k I_n)$ n'étant pas inversible il existe $k_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $(A - \lambda_{k_0} I_n)$ soit non inversible (un produit de $r$ matrices inversibles est inversible..)

Alors $\lambda_{k_0} \in Sp(A)$, $\underline{Sp(A) \neq \emptyset}$.

(Q2) . La propriété est claire pour $n = 1$ (toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure et semblable à elle même).

. Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de $E = \mathbb{C}^{n+1}$ et $f$ l'endomorphisme de $E$ de matrice $A$ dans $\mathcal{B}$.

$Sp(A) \neq \emptyset$ donc $Sp(f) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in Sp(f)$. $\exists u_1 \in E$, $u_1 \neq 0_E$ et $f(u_1) = \lambda u_1$.
Soit $D$ la droite vectorielle de $E$ engendrée par $u_1$ et $H$ un supplémentaire de $D$.
$\dim H = n$. Notons $p$ la projection sur $H$ parallèlement à $D$.
Définissons pour $x \in H$, $h(x) = p(f(x))$. Clairement $h \in \mathcal{L}(H)$.

Soit $\hat{\mathcal{B}}$ une base de $H$. $\hat{A} = M_{\hat{\mathcal{B}}}(h) \in M_n(\mathbb{C})$.
Donc $\hat{A}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure $\hat{A}'$.
Ainsi il existe une base $\hat{\mathcal{B}}' = (u_2, \dots, u_{n+1})$ de $H$ telle que $M_{\hat{\mathcal{B}}'}(h) = \hat{A}'$.

$(u_1)$ est une base de $D$, $(u_2, \dots, u_{n+1})$ est une base de $H$ et $E = D \oplus H$.

Alors $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ est une base de $E$. Posons $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ et montrons que $A'$ est triangulaire supérieure.
Il suffit pour cela de prouver que : $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $f(u_k) \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.
C'est clair pour $k = 1$ car $f(u_1) = \lambda u_1$.
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. $f(u_k) = p(f(u_k)) + v_k$ où $v_k \in D$ car $p$ est la projection sur $H$ parallèlement à $D = \mathrm{Vect}(u_1)$.
Alors $\exists \alpha_k \in \mathbb{C}$, $f(u_k) = h(u_k) + \alpha_k u_1$.
La matrice de $h$ dans $(u_2, \dots, u_{n+1})$ est triangulaire supérieure donc $h(u_k) \in \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_k)$.
Ainsi $f(u_k) = h(u_k) + \alpha_k u_1 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.
Ceci achève de prouver que $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ est triangulaire supérieure.

$A = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ donc $A$ est semblable à $A'$.

Ainsi $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
Ainsi s'achève la récurrence.

<u>Remarque</u>.. Ceci est faux dans $M_n(\mathbb{R})$.
On peut montrer que si $A \in M_n(K)$, $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure si et seulement si $A$ possède un polynôme annulateur scindé.

**Exercice 20** **N1$^+$** **Disques de Gerschgorin.**

*À savoir faire par cœur.*

$n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $i$ élément de $[\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leqslant r_i\}$.

Montrer que $\operatorname{Sp} A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ (partir de $AX = \lambda X$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul et considérer $|x_\ell| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$).

*Thème abordé dans oral ESCP 1999 2-7, ESSEC 2009*

---

Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Soit $\ell$ un éléments de $[\![1, n]\!]$ tel que $|x_\ell| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

La $\ell^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\ell,k}\, x_k = \lambda\, x_\ell$. Alors $(\lambda - a_{\ell,\ell})\, x_\ell = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} a_{\ell,k}\, x_k$. Ainsi :

$$|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |x_\ell| = |(\lambda - a_{\ell,\ell})\, x_\ell| = \Big| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} a_{\ell,k}\, x_k \Big| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}\, x_k| = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\, |x_k|.$$

Or $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k| \leqslant |x_\ell|$ et $|a_{\ell,k}| \geqslant 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |a_{\ell,k}|\, |x_k| \leqslant |a_{\ell,k}|\, |x_\ell|$. Alors :

$$|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |x_\ell| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\, |x_k| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\, |x_\ell| = |x_\ell| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}| = |x_\ell|\, r_\ell. \text{ Donc } |\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |x_\ell| \leqslant |x_\ell|\, r_\ell.$$

Supposons que $|x_\ell| = 0$. Alors $\displaystyle\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| = 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k| = 0$ ou $\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0$.

Ainsi $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, ce qui contredit le fait que $X$ est un vecteur propre de $A$. Donc $|x_\ell| \neq 0$

Alors $|x_\ell| > 0$ et $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |x_\ell| \leqslant |x_\ell|\, r_\ell$. En divisant par $|x_\ell|$ il vient donc $|\lambda - a_{\ell,\ell}| \leqslant r_\ell$.

Par conséquent $\lambda$ appartient à $D_\ell$ donc à $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Ceci étant vrai pour toute valeur propre $\lambda$ de $A$, on peut affirmer que :

$$\boxed{\operatorname{Sp} A \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i.}$$

---

**Exercice 21** **N2** **Ovales de Cassini.**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $i$ élément de $[\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Pour tout $(i, j)$ élément de $[\![1, n]\!]^2$ on pose : $C_{ij} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}|\,|z - a_{jj}| \leqslant r_i\, r_j\}$.

Montrer que $\operatorname{Sp} A \subset \displaystyle\bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} C_{ij}$.

---

Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Soit $\ell$ un éléments de $[\![1, n]\!]$ tel que $|x_\ell| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.

Soit $\ell'$ un éléments de $[\![1, n]\!]$ tel que $|x_{\ell'}| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq \ell}} |x_k|$.

La $\ell^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\ell,k}\, x_k = \lambda\, x_\ell$. Alors $(\lambda - a_{\ell,\ell})\, x_\ell = \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{n} a_{\ell,k}\, x_k$. Ainsi :

$$|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|x_\ell| = |(\lambda - a_{\ell,\ell})\, x_\ell| = \Big|\sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{n} a_{\ell,k}\, x_k\Big| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{n} |a_{\ell,k}\, x_k| = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\,|x_k|.$$

Or $\forall k \in [\![1, n]\!] - \{\ell\},\ |x_k| \leqslant |x_{\ell'}|$ et $|a_{\ell,k}| \geqslant 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!] - \{\ell\},\ |a_{\ell,k}|\,|x_k| \leqslant |a_{\ell,k}|\,|x_{\ell'}|$. Alors :

$$|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|x_\ell| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\,|x_k| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\,|x_{\ell'}| = |x_{\ell'}| \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell}}^{n} |a_{\ell,k}| = |x_{\ell'}|\, r_\ell.$$ Donc $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|x_\ell| \leqslant |x_{\ell'}|\, r_\ell$.

La $\ell'^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\ell',k}\, x_k = \lambda\, x_{\ell'}$. Alors $(\lambda - a_{\ell',\ell'})\, x_{\ell'} = \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell'}}^{n} a_{\ell',k}\, x_k$. Ainsi :

$$|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| = |(\lambda - a_{\ell',\ell'})\, x_{\ell'}| = \Big|\sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell'}}^{n} a_{\ell',k}\, x_k\Big| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell'}}^{n} |a_{\ell',k}\, x_k| = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell'}}^{n} |a_{\ell',k}|\,|x_k|.$$

Or $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k| \leqslant |x_\ell|$ et $|a_{\ell',k}| \geqslant 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |a_{\ell',k}|\,|x_k| \leqslant |a_{\ell',k}|\,|x_\ell|$. Alors :

$$|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell'}}^{n} |a_{\ell',k}|\,|x_k| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell'}}^{n} |a_{\ell',k}|\,|x_\ell| = |x_\ell| \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\ell'}}^{n} |a_{\ell',k}| = |x_\ell|\, r_{\ell'}.$$ Donc $|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_\ell|\, r_{\ell'}$.

Alors $0 \leqslant |\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|x_\ell| \leqslant |x_{\ell'}|\, r_\ell$ et $0 \leqslant |\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_\ell|\, r_{\ell'}$.

Par produit $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_\ell|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_\ell|\,|x_{\ell'}|\, r_\ell\, r_{\ell'}$.

Supposons que $|x_\ell| = 0$. Alors $\displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| = 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k| = 0$ ou $\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0$.

Ainsi $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, ce qui contredit le fait que $X$ est un vecteur propre de $A$. Donc $|x_\ell| \neq 0$

Alors $|x_\ell| > 0$ et $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_\ell|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_\ell|\,|x_{\ell'}|\, r_\ell\, r_{\ell'}$.

En divisant par $|x_\ell|$ il vient $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_{\ell'}|\, r_\ell\, r_{\ell'}$.

*Premier cas :* $x_{\ell'} \neq 0$.

Alors $|x_{\ell'}| > 0$ et $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_{\ell'}|\,r_\ell\,r_{\ell'}$.

En divisant par $|x_{\ell'}|$ il vient $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|\lambda - a_{\ell',\ell'}| \leqslant r_\ell\,r_{\ell'}$. Donc $\lambda \in C_{\ell,\ell'}$.

*Deuxième cas :* $x_{\ell'} = 0$.

Alors $0 \leqslant |\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|x_\ell| \leqslant |x_{\ell'}|\,r_\ell = 0$. Ainsi $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|x_\ell| = 0$. Mais $|x_\ell|$ n'est pas nul donc $|\lambda - a_{\ell,\ell}|$ est nul.

Alors $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|\lambda - a_{\ell',\ell'}| = 0 \leqslant r_\ell\,r_{\ell'}$. On a encore : $\lambda \in C_{\ell,\ell'}$.

Dans les deux cas $\lambda \in C_{\ell,\ell'}$ donc $\lambda \in \displaystyle\bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} C_{ij}$.

Ceci étant vrai pour toute valeur propre $\lambda$ de $A$, on peut affirmer que :

$$\boxed{\operatorname{Sp} A \subset \bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} C_{ij}.}$$

---

**Exercice 22** **N1** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 1.**

*À savoir faire par cœur.*

Soit $A = (a_{k,\ell})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} \geqslant 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$.

$A$ est une matrice **stochastique**.

Q1. Montrer que 1 est valeur propre de $A$.

Q2. Soit $\lambda$ un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de $A$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ et soit $k$ est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. Notons que $X$ est un éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

En considérant la $k^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

---

*Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.1 et 2.16, 2010 2.6, 2011 2.18, LYON 2010 Pb1, HEC 1993 (qui traite de la limite de la suite des puissances d'une matrice stochastique ; on retrouve la seconde partie de ce problème dans oral ESCP 2010 2.9). On parle encore de matrice stochastique dans oral ESCP 2004 2.20, 2007 2.5, 2011 2.8 dans ESCP MI 1996 et elles sont très présentes dans les problèmes de probabilité.*

---

**Q1** Considérons l'élément $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et posons $Y_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX_0$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ y_k = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} (a_{k,\ell} \times 1) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$. $Y_0 = X_0$.

Par conséquent $X_0$ n'est pas nulle et $AX_0 = X_0$. Finalement :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A}.$$

**Q2** Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ et $k$ un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que

$|x_k| = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. $AX = \lambda X$. En particulier : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell = \lambda\, x_k$.

$$|\lambda|\,|x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|\,|x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_\ell|.$$

Or $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ |x_\ell| \leqslant |x_k|$ et $a_{k,\ell} \geqslant 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell}\,|x_\ell| \leqslant a_{k,\ell}\,|x_k|$. Alors

$$|\lambda|\,|x_k| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_\ell| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_k| = |x_k| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = |x_k| \times 1 = |x_k|. \text{ Ainsi } |\lambda|\,|x_k| \leqslant |x_k|.$$

Supposons que $|x_k| = 0$. Alors $\mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ |x_\ell| = 0$ ou $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = 0$.

Par conséquent $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ ce qui contredit le fait que $X$ est un vecteur propre de $A$.

Finalement $|x_k| \neq 0$. Alors $|\lambda|\,|x_k| \leqslant |x_k|$ et $|x_k| > 0$. En divisant par $|x_k|$ il vient : $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ dans } \mathbb{C},\ |\lambda| \leqslant 1}.$$

---

**Exercice 23** **N2** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 2.**

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des éléments $A = (a_{k,\ell})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} \geqslant 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1.$$

Les éléments de $\mathcal{S}$ sont des matrices **stochastiques**.

Q1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour le produit matriciel.

Q2. a) Montrer que 1 est valeur propre de $A$.

b) Soit $\lambda$ un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de $A$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ et soit $k$ est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. Notons que $X$ est un éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

En considérant la $k^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

★ Dans Q3 et Q4 $A$ un élément de $\mathcal{S}$ tel que : $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} > 0$.

Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ de module 1. On se propose de montrer que $\lambda = 1$ et que $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = 1$.

Q3 et Q4 donnent deux preuves de ce résultat.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$. $k$ est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \underset{1 \leqslant \ell \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_\ell|$.

Ici encore $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

**Au choix Q3 ou Q4**.

Q3. a) Montrer que $|x_k| = \left| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell \right|$. en déduire qu'il existe un réel $\theta$ tel que : $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \left( \frac{x_\ell}{x_k} e^{-i\theta} - 1 \right) = 0$.

b) Montrer que : $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = e^{i\theta}\, x_k$ (prendre la partie réelle au niveau de l'égalité précédente et remarquer que $\frac{x_\ell}{x_k} e^{-i\theta}$ a une partie réelle inférieure ou égale à 1).

c) Conclure.

Q4. a) Soient $r$ un éléments de $[\![2, +\infty[\![$ et $z_1$, $z_2$, ..., $z_r$ $r$ complexes.

Montrer que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r|$ si et seulement si il existe un réel $\theta$ et des réels positifs ou nuls $\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_r$ tels que $\forall k \in [\![1,r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$.

b) Montrer que $|x_k| = \left| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell \right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant |x_k|$. Conséquence ?

c) Montrer que $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n|$, puis que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

d) Conclure.

*Remarque Si $A$ est stochastique (et donc si on ne suppose plus que les coefficients de $A$ sont strictement positifs), toute valeur propre de $A$ de module 1 distincte de 1 est une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité avec $1 \leqslant q \leqslant n$. Voir l'exercice suivant.*

Q5. On suppose ici que $A$ appartient à $\mathcal{S}$ est que l'une des puissances de $A$ à des coefficients strictement positifs.

Montrer que le résultat précédent vaut encore.

*Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.1. et 2.16, 2011 2.18.*

---

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Soient $A = (a_{k,\ell})$ et $B = (b_{k,\ell})$ deux éléments de $\mathcal{S}$. Posons $C = AB = (c_{k,\ell})$.

$\forall (k,\ell,r) \in [\![1,n]\!]^3,\ a_{k,r} \geqslant 0$ et $b_{r,\ell} \geqslant 0$ donc $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{k,\ell} = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} a_{k,r}\, b_{r,\ell} \geqslant 0$.

De plus $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} c_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{k,r}\, b_{r,\ell} = \sum_{r=1}^{n}\left(a_{k,r}\sum_{\ell=1}^{n} b_{r,\ell}\right) = \sum_{r=1}^{n}(a_{k,r}\times 1) = \sum_{r=1}^{n} a_{k,r} = 1$.

Ceci achève de montrer que $C$ appartient à $\mathcal{S}$. $AB \in \mathcal{S}$

$$\boxed{\text{Le produit de deux éléments de } \mathcal{S} \text{ est un élément de } \mathcal{S}.}$$

$\boxed{\textbf{Q2}}$ a) Considérons l'élément $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et posons $Y_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX_0$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ y_k = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}(a_{k,\ell}\times 1) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$. $Y_0 = X_0$.

Par conséquent $X_0$ n'est pas nulle et $AX_0 = X_0$. Finalement :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A.}$$

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ et $k$ un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que

$|x_k| = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. $AX = \lambda X$. La "$k^{\text{ème}}$ ligne de cette égalité" donne : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell = \lambda\, x_k$.

$|\lambda|\,|x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|\,|x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_\ell|$.

Or $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ |x_\ell| \leqslant |x_k|$ et $a_{k,\ell} \geqslant 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell}\,|x_\ell| \leqslant a_{k,\ell}\,|x_k|$. Alors

$|\lambda|\,|x_k| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_\ell| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_k| = |x_k| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = |x_k|\times 1 = |x_k|$. Ainsi $|\lambda|\,|x_k| \leqslant |x_k|$.

Supposons que $|x_k| = 0$. Alors $\mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ |x_\ell| = 0$ ou $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = 0$.

Par conséquent $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ ce qui contredit le fait que $X$ est un vecteur propre de $A$.

Finalement $|x_k| \neq 0$. Alors $|\lambda|\,|x_k| \leqslant |x_k|$ et $|x_k| > 0$. En divisant par $|x_k|$ il vient : $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ dans } \mathbb{C},\ |\lambda| \leqslant 1.}$$

$\boxed{\textbf{Q3}}$ $AX = \lambda\, X$ donne en particulier $\lambda\, x_k = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell$. Rappelons que $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ |x_\ell| \leqslant |x_k|$ et $a_{k,\ell} \geqslant 0$.

Comme $|\lambda| = 1$, $|x_k| = |\lambda|\,|x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant |x_k| \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = |x_k|$.

Ce qui donne : $|x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right|$. Alors $\left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, \frac{x_\ell}{x_k}\right| = 1$ car $x_k$ n'est pas nul ($x_k$=0 donne $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ car $|x_k| = \underset{1\leqslant \ell \leqslant n}{\text{Max}}\, |x_\ell|$).

Le complexe $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, \frac{x_\ell}{x_k}$ a donc pour module 1. $\exists \theta \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, \frac{x_\ell}{x_k} = e^{i\theta}$.

$\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, \frac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta} = 1 = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}$. Par conséquent : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \left(\frac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta} - 1\right) = 0$.

En prenant la partie réelle on obtient : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \left(\Re e\left(\frac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}\right) - 1\right) = 0$ (les coefficients de $A$ sont réels).

Pour tout $\ell$ dans $[\![1, n]\!]$, notons $t_\ell$ la partie réelle de $\dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}$. Alors $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, (t_\ell - 1) = 0$.

Rappelons que la partie réelle d'un complexe est inférieure ou égale à son module ($x \leqslant |x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$...).

$\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ \left|\dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}\right| = \dfrac{|x_\ell|}{|x_k|} \leqslant 1$. Par conséquent $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ t_\ell \leqslant 1$ et $a_{k,\ell} > 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ a_{k,\ell}\, (t_\ell - 1) \leqslant 0$.

Comme $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, (t_k - 1) = 0 : \forall \ell \in [\![1, n]\!],\ a_{k,\ell}\, (t_\ell - 1) = 0$. Ainsi $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ t_\ell - 1 = 0$ car les coefficients de $A$ sont strictement positifs. Par conséquent $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ t_\ell = 1$.

Fixons $\ell$ dans $[\![1, n]\!]$. $\dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}$ est un nombre complexe de module au plus 1 dont la partie réelle $t_\ell$ vaut 1. Nécessairement ce complexe vaut 1.

$\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta} = 1$. Alors $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ x_\ell = e^{i\theta}\, x_k$ (en faisant $k = 1$ on obtient $e^{i\theta} = 1$...).

Donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Alors $X$ appartient à SEP $(A, 1)$ et donc $\lambda = 1$. Mieux nous avons montré que tout vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ donc à la valeur propre 1 est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi SEP $(A, 1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

| |
|---|
| Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ de module $1 : \lambda = 1$, $\dim \text{SEP}\ (A, \lambda) = 1$ et SEP $(A, \lambda) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. |

**Q4** a) • Montrons d'abord que la condition est suffisante.

Soient $r$ un éléments de $[\![2, +\infty[\![$ et $z_1$, $z_2$, ..., $z_r$ $r$ complexes.

Supposons qu'il existe un réel $\theta$ et des réels positifs ou nuls $\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_r$ tels que $\forall k \in [\![1, r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$ et montrons que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r|$.

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = \left|\sum_{k=1}^{r} \rho_k\, e^{i\theta}\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right) e^{i\theta}\right| = \left|\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right| \left|e^{i\theta}\right| = \left|\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right| \times 1 = \left|\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right| = \sum_{k=1}^{r} \rho_k.$$

$$\sum_{k=1}^{r} |z_k| = \sum_{k=1}^{r} \left|\rho_k\, e^{i\theta}\right| = \sum_{k=1}^{r} |\rho_k|\, \left|e^{i\theta}\right| = \sum_{k=1}^{r} |\rho_k| \times 1 = \sum_{k=1}^{r} |\rho_k| = \sum_{k=1}^{r} \rho_k.$$

Ainsi $|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r|$.

• Montrons par récurrence sur $r$ que la condition est nécessaire.

⋆ Montrons que la propriété est vraie pour $r = 2$.

Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes tels que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

On peut trouver deux réels $\theta_1$ et $\theta_2$, et deux réels positifs ou nuls $\rho_1$ et $\rho_2$ tels que $z_1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2\, e^{i\theta_2}$ non ? ?

Alors $\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right| = |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| = \rho_1 + \rho_2$.

$\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = \left(\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right)\left(\overline{\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}}\right) = \left(\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right)\left(\rho_1\, e^{-i\theta_1} + \rho_2\, e^{-i\theta_2}\right)$.

$\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = \rho_1^2 + \rho_1\,\rho_2\, e^{i(\theta_1-\theta_2)} + \rho_2\,\rho_1\, e^{i(\theta_2-\theta_1)} + \rho_2^2 = \rho_1^2 + \left(e^{i(\theta_1-\theta_2)} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\right)\rho_1\,\rho_2 + \rho_2^2$.

$\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = \rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1 - \theta_2) + \rho_2^2$.

De plus $(\rho_1 + \rho_2)^2 = \rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2 + \rho_2^2$.

Alors $\rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1 - \theta_2) + \rho_2^2 = \left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 = \rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2 + \rho_2^2$.

Donc $2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1 - \theta_2) = 2\,\rho_1\,\rho_2$. Ou $\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1 - \theta_2) = \rho_1\,\rho_2$.

*Premier cas* $\rho_1 = 0$.

Alors $z_1 = 0 = 0 \times e^{i\theta_2} = \rho_1\, e^{i\theta_2}$ et $z_2 = \rho_2\, e^{i\theta_2}$. Le résultats est montré car $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$.

*Deuxième cas* $\rho_2 = 0$.

Alors $z_2 = 0 = 0 \times e^{i\theta_1} = \rho_2\, e^{i\theta_1}$ et $z_1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}$. Le résultats est montré car $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$.

*Troisième cas* $\rho_1 \neq 0$ *et* $\rho_2 \neq 0$.

Alors $\rho_1\,\rho_2 \neq 0$. Comme $\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1 - \theta_2) = \rho_1\,\rho_2$ on obtient en divisant par $\rho_1\,\rho_2 : \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$.

Donc il existe $k$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 - \theta_2 = k\,2\pi$. Alors $\theta_1 = \theta_2 + k\,2\pi$ donc $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$.

Ainsi $z_1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2\, e^{i\theta_1}$. Le résultats est montré car $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$.

Ceci achève de montrer la propriété pour $r = 2$.

⋆ Supposons que la propriété est vraie pour un élément $r$ de $[\![2, +\infty[\![$ et montrons la pour $r + 1$.

Soient $z_1$, $z_2$, ..., $z_{r+1}$ $r+1$ complexes tels que $|z_1+z_2+\cdots+z_{r+1}| = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_{r+1}|$. Posons $s = z_1+z_2+\cdots+z_r$.

Alors $|z_1 + z_2 + \cdots + z_r + z_{r+1}| = |s + z_{r+1}| \leqslant |s| + |z_{r+1}| = |z_1 + z_2 + \cdots + z_r| + |z_{r+1}| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r| + |z_{r+1}|$.

Or $|z_1 + z_2 + \cdots + z_{r+1}| = |z_1 + z_2 + \cdots + z_r + z_{r+1}|$. Alors toutes les inégalités précédentes sont des égalités.

Ce qui permet d'écrire que $|s + z_{r+1}| = |s| + |z_{r+1}|$ et $|s| + |z_{r+1}| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r| + |z_{r+1}|$.

Donc $|s + z_{r+1}| = |s| + |z_{r+1}|$ et $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |s| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r|$.

La première égalité donne l'existence d'un réel $\theta'$ et de deux réels positifs ou nuls $\rho$ et $\rho'$ tels que $s = \rho\, e^{i\theta'}$ et $z_{n+1} = \rho'\, e^{i\theta'}$ car la propriété est vraie pour 2.

L'hypothèse de récurrence et la seconde égalité montrent qu'il existe un réel $\theta$ et des réels positifs ou nuls

$\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_r$ tels que $\forall k \in [\![1, r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$.

$\rho\, e^{i\theta'} = s = z_1 + z_2 + \cdots + z_r = (\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_r)\, e^{i\theta}$.

Alors $\rho = |\rho| = |\rho|\,|e^{i\theta}| = |\rho\, e^{i\theta}| = |(\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_r)\, e^{i\theta}| = |\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_r|\,|\, e^{i\theta}| = |\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_r|$.

Finalement $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_r$ car $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_r \geqslant 0$

Alors $\rho\, e^{i\theta'} = s = z_1 + z_2 + \cdots + z_r = (\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_r)\, e^{i\theta} = \rho\, e^{i\theta}$. Donc $\rho\, e^{i\theta'} = \rho\, e^{i\theta}$.

*Premier cas* $\rho \neq 0$.

Alors $e^{i\theta'} = e^{i\theta}$. Donc $z_{r+1} = \rho'\, e^{i\theta'} = \rho'\, e^{i\theta}$. Posons $\rho_{r+1} = \rho'$.

Alors $\theta \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ \rho_k \in \mathbb{R}^+$ et $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$. La récurence s'achève !

*Deuxième cas* $\rho = 0$.

Alors $\rho_1 + \rho_2 + \cdots \rho_r = 0$. Comme $\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_r$ sont des réels positifs ou nuls : $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_r = 0$.

Donc $\forall k \in [\![1, r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta} = 0 = 0 \times e^{i\theta'} = \rho_k\, e^{i\theta'}$. Posons $\rho_{r+1} = \rho'$. Alors $z_{r+1} = \rho'\, e^{i\theta'} = \rho_{r+1}\, e^{i\theta'}$.

Ainsi $\theta' \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ \rho_k \in \mathbb{R}^+$ et $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta'}$. La récurence s'achève non ?

b) $AX = \lambda\, X$ donne en particulier $\lambda\, x_k = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell$. Rappelons que $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ |x_\ell| \leqslant |x_k|$ et $a_{k,\ell} \geqslant 0$.

Comme $|\lambda| = 1$, $|x_k| = |\lambda|\, |x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum\limits_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant |x_k| \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = |x_k|$.

Ce qui précède donne alors : $|x_k| = \left|\sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| = \sum\limits_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell|$.

c) Supposons qu'il existe un élément $\ell_0$ tel que $|x_{\ell_0}| < |x_k|$. Alors $a_{k\ell_0}\, |x_\ell| < a_{k\ell_0}\, |x_k|$ car $a_{k\ell_0} > 0$.

Ainsi $\sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| < \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_k| = |x_k|$ ce qui n'est pas. Par conséquent $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n|$.

Dans la suite nous poserons $\rho = |x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n|$.

Rappelons que $\left|\sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum\limits_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell|$. Alors a) permet alors de dire qu'il existe un réel $\theta$ et des réels positifs ou nuls $\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_n$ tels que $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ a_{k,\ell}\, x_\ell = \rho_\ell\, e^{i\theta}$. Donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ x_\ell = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\, e^{i\theta}$.

Comme $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}} \geqslant 0$, $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ |x_\ell| = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\cdot$ Or $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ |x_\ell| = \rho$. Donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}} = \rho$.

Par conséquent $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ x_\ell = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\, e^{i\theta} = \rho\, e^{i\theta}$. Finalement $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

d) Ce qui précède prouve alors que SEP $(A, \lambda) \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donc $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \leqslant \dim \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$.

SEP $(A, \lambda)$ étant un sous espace vectoriel de dimension au moins 1 nécessairement $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = 1$.

Donc SEP $(A, \lambda) \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \dim \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Alors SEP $(A, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Or $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent $\lambda = 1$.

| |
|---|
| Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ de module $1 : \lambda = 1$, $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = 1$ et SEP $(A, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. |

$\boxed{\textbf{Q5}}$ Ici $A$ appartient à $\mathcal{S}$ et l'une des ses puissances à des coefficients strictement positifs.

Donc il existe $s$ dans $\mathbb{N}$ tel que les coefficients de $A^s$ soient strictement positifs.

Nécessairement $s$ appartient $\mathbb{N}^*$ car $A^0 = I_n$ et les coefficients de $I_n$ ne sont pas tous strictement positifs.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k \in \mathcal{S}$.

C'est clair pour $k = 1$ car $A$ est un élément de $\mathcal{S}$.

Supposons que pour un $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $A^k$ appartienne à $\mathcal{S}$. Alors $A$ et $A^k$ sont deux éléments de $\mathcal{S}$. Q1 permet d'affirmer que leur produit appartient à $\mathcal{S}$. Alors $A^{k+1}$ appartient à $\mathcal{S}$. Ce qui achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k \in \mathcal{S}$ donc $A^r$ est un éléments de $\mathcal{S}$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Nous pouvons donc lui appliquer le résultats de Q3 (et Q4...).

Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ de module un. Il existe un éléments non nul $X$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$.

Alors $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $A^r X = \lambda^r X$. De plus $|\lambda^r| = |\lambda|^r = 1$. $\lambda$ est donc une valeur propre de $\lambda^r$ de module 1.

Q3 donne alors $\lambda^r = 1$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (A^r, \lambda^r) = 1$.

Mieux $\mathrm{SEP}\ (A^r, \lambda^r) = \mathrm{SEP}\ (A^r, 1)$, est la droite vectorielle engendrée par l'élément $X_0$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Si $X$ est dans $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$, $AX = \lambda X$ donc $A^r X = \lambda^r X = X$ et ainsi $X$ appartient à $\mathrm{SEP}\ (A^r, 1)$.

Donc $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \subset \mathrm{SEP}\ (A^r, 1)$. Alors $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \leqslant \dim \mathrm{SEP}\ (A^r, 1) = 1$.

Mais $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \geqslant 1$ car $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$.

Alors $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = 1 = \dim \mathrm{SEP}\ (A^r, 1) = 1$. Comme $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \subset \mathrm{SEP}\ (A^r, 1) : \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \mathrm{SEP}\ (A^r, 1)$.

Ainsi $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$ est la droite vectorielle engendrée par $X_0$. $X_0$ est alors un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$. Mais comme $A$ appartient à $\mathcal{S}$ c'est aussi un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 1.

Ainsi $\lambda = 1$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (A, 1) = 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ de module } 1 : \lambda = 1,\ \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = 1 \text{ et } \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

---

**Exercice 24** **N2$^+$** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau $2^+$. ESCP 2011 2.18.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices $A$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) si $A = (a_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, alors $a_{k,\ell} \geqslant 0$, pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$ ;

ii) si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$. *Formulation ESCP ! !*

Les éléments de $\mathcal{S}$ sont des matrices **stochastiques**.

Q1. a) Montrer que le produit de deux élément de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$. *Question ajoutée*

b) $\mathcal{S}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

Q2. Soit $A = (a_{k,\ell})$ un élément de $\mathcal{S}$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de $A$.

b) Soit $\lambda$ une valeur propre (réelle ou complexe) de $A$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

En considérant une coordonnée de module maximal de $X$, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

Q3. Soit $z_1, \ldots, z_p$, $p$ nombres complexes ($p \geqslant 2$) vérifiant : $\left|\sum_{k=1}^{p} z_k\right| = \sum_{k=1}^{p} |z_k|$.

Montrer qu'il existe des réels positifs ou nuls $\rho_1, \ldots, \rho_p$ et un réel $\theta$, tels que pour tout $k$ de $[\![1,p]\!]$, on a : $z_k = \rho_j\, e^{i\theta}$.

*Question légèrement modifiée pour obtenir un résultat plus standard.*

Q4. Soit $\lambda$ une valeur propre complexe de $A$ telle que $|\lambda| = 1$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On pose :

$|x_k| = \underset{\ell\in[\![1,n]\!]}{\text{Max}} |x_\ell|$

a) Montrer qu'il existe $r \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_r = \lambda x_k$.

b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul $q$ tel que $\lambda^q = 1$.

---

*Remarque* *Soit $A = (a_{k,\ell})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $U' = \begin{pmatrix} {u'}_1 \\ {u'}_2 \\ \vdots \\ {u'}_n \end{pmatrix} = AU$.*

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ u'_k = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \times 1 = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}$. *Ainsi :*

$$\boxed{AU = U \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1.}$$

*Ce résultat est essentiel dans la suite.*

**Q1** a) Soient $A = (a_{k,\ell})$ et $B = (b_{k,\ell})$ deux éléments de $\mathcal{S}$. Posons $C = AB = (c_{k,\ell})$.

$\forall (k,\ell,r) \in [\![1,n]\!]^3,\ a_{k,r} \geqslant 0$ et $b_{r,\ell} \geqslant 0$ donc $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{k,\ell} = \sum_{r=1}^{n} a_{k,r}\, b_{r,\ell} \geqslant 0$.

De plus $CU = ABU = AU = U$. Ceci achève de montrer que $C$ appartient à $\mathcal{S}$.

$$\boxed{\text{Le produit de deux éléments de } \mathcal{S} \text{ est un élément de } \mathcal{S}.}$$

b) $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\, U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \neq U$. Ainsi $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ n'appartient pas à $\mathcal{S}$. Alors :

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

**Q2** a) $AU = U$ et $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ donc :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A \text{ et } U \text{ est un vecteur propre associé.}}$$

b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ dans $\mathbb{C}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$ et $k$ un élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \text{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. $AX = \lambda X$. La "$k^{\text{ème}}$ ligne de cette égalité" donne : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell = \lambda\, x_k$.

$$|\lambda|\, |x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|\, |x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell|.$$

Or $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ |x_\ell| \leqslant |x_k|$ et $a_{k,\ell} \geqslant 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant a_{k,\ell}\, |x_k|$. Alors

$$|\lambda|\, |x_k| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_k| = |x_k| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = |x_k| \times 1 = |x_k|. \text{ Ainsi } |\lambda|\, |x_k| \leqslant |x_k|.$$

Supposons que $|x_k| = 0$. Alors $\text{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ |x_\ell| = 0$ ou $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ x_\ell = 0$.

Par conséquent $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ ce qui contredit le fait que $X$ est un vecteur propre de $A$.

Finalement $|x_k| \neq 0$. Alors $|\lambda|\, |x_k| \leqslant |x_k|$ et $|x_k| > 0$. En divisant par $|x_k|$ il vient : $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ dans } \mathbb{C},\ |\lambda| \leqslant 1}.$$

**Q3** • Montrons d'abord que la condition est suffisante.

Soient $r$ un éléments de $[\![2, +\infty[\![$ et $z_1$, $z_2$, ..., $z_r$ $r$ complexes.

Supposons qu'il existe un réel $\theta$ et des réels positifs ou nuls $\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_r$ tels que $\forall k \in [\![1, r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$ et montrons que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r|$.

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = \left|\sum_{k=1}^{r} \rho_k\, e^{i\theta}\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right) e^{i\theta}\right| = \left|\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right| \left|e^{i\theta}\right| = \left|\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right| \times 1 = \left|\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right| = \sum_{k=1}^{r} \rho_k.$$

$$\sum_{k=1}^{r} |z_k| = \sum_{k=1}^{r} \left|\rho_k\, e^{i\theta}\right| = \sum_{k=1}^{r} |\rho_k|\, \left|e^{i\theta}\right| = \sum_{k=1}^{r} |\rho_k| \times 1 = \sum_{k=1}^{r} |\rho_k| = \sum_{k=1}^{r} \rho_k.$$

Ainsi $|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r|$.

• Montrons par récurrence sur $r$ que la condition est nécessaire.

⋆ Montrons que la propriété est vraie pour $r = 2$.

Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes tels que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

On peut trouver deux réels $\theta_1$ et $\theta_2$, et deux réels positifs ou nuls $\rho_1$ et $\rho_2$ tels que $z_1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2\, e^{i\theta_2}$ non ? ?

Alors $\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right| = |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| = \rho_1 + \rho_2$.

$\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = \left(\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right)\left(\overline{\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}}\right) = \left(\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right)\left(\rho_1\, e^{-i\theta_1} + \rho_2\, e^{-i\theta_2}\right)$.

$\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = \rho_1^2 + \rho_1\,\rho_2\, e^{i(\theta_1-\theta_2)} + \rho_2\,\rho_1\, e^{i(\theta_2-\theta_1)} + \rho_2^2 = \rho_1^2 + \left(e^{i(\theta_1-\theta_2)} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\right)\rho_1\,\rho_2 + \rho_2^2$.

$\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = \rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2) + \rho_2^2$.

De plus $(\rho_1+\rho_2)^2 = \rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2 + \rho_2^2$.

Alors $\rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2) + \rho_2^2 = \left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = (\rho_1+\rho_2)^2 = \rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2 + \rho_2^2$.

Donc $2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2) = 2\,\rho_1\,\rho_2$. Ou $\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2) = \rho_1\,\rho_2$.

*Premier cas* $\rho_1 = 0$.

Alors $z_1 = 0 = 0\times e^{i\theta_2} = \rho_1\, e^{i\theta_2}$ et $z_2 = \rho_2\, e^{i\theta_2}$. Le résultats est montré car $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$.

*Deuxième cas* $\rho_2 = 0$.

Alors $z_2 = 0 = 0\times e^{i\theta_1} = \rho_2\, e^{i\theta_1}$ et $z_1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}$. Le résultats est montré car $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$.

*Troisième cas* $\rho_1 \neq 0$ *et* $\rho_2 \neq 0$.

Alors $\rho_1\,\rho_2 \neq 0$. Comme $\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2) = \rho_1\,\rho_2$ on obtient en divisant par $\rho_1\,\rho_2 : \cos(\theta_1-\theta_2) = 1$.

Donc il existe $k$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 - \theta_2 = k\,2\pi$. Alors $\theta_1 = \theta_2 + k\,2\pi$ donc $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$.

Ainsi $z_1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2\, e^{i\theta_1}$. Le résultats est montré car $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$.

Ceci achève de montrer la propriété pour $r = 2$.

⋆ Supposons que la propriété est vraie pour un élément $r$ de $[\![2, +\infty[\![$ et montrons la pour $r+1$.

Soient $z_1$, $z_2$, ..., $z_{r+1}$ $r+1$ complexes tels que $|z_1+z_2+\cdots+z_{r+1}| = |z_1|+z_2|+\cdots+|z_{r+1}|$. Posons $s = z_1+z_2+\cdots+z_r$.

Alors $|z_1+z_2+\cdots+z_r+z_{r+1}| = |s+z_{r+1}| \leqslant |s|+|z_{r+1}| = |z_1+z_2+\cdots+z_r|+|z_{r+1}| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|+|z_{r+1}|$.

Or $|z_1+z_2+\cdots+z_{r+1}| = |z_1+z_2+\cdots+z_r+z_{r+1}|$. Alors toutes les inégalités précédentes sont des égalités.

Ce qui permet d'écrire que $|s+z_{r+1}| = |s|+|z_{r+1}|$ et $|s|+|z_{r+1}| = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|+|z_{r+1}|$.

Donc $|s+z_{r+1}| = |s|+|z_{r+1}|$ et $|z_1+z_2+\cdots+z_n| = |s| = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|$.

La première égalité donne l'existence d'un réel $\theta'$ et de deux réels positifs ou nuls $\rho$ et $\rho'$ tels que $s = \rho\, e^{i\theta'}$ et $z_{n+1} = \rho'\, e^{i\theta'}$ car la propriété est vraie pour 2.

L'hypothèse de récurrence et la seconde égalité montrent qu'il existe un réel $\theta$ et des réels positifs ou nuls

$\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_r$ tels que $\forall k \in [\![1, r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$.

$\rho\, e^{i\theta'} = s = z_1+z_2+\cdots+z_r = (\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r)\, e^{i\theta}$.

Alors $\rho = |\rho| = |\rho|\,|e^{i\theta}| = |\rho\, e^{i\theta}| = |(\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r)\, e^{i\theta}| = |\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r|\,|\,e^{i\theta}| = |\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r|$.

Finalement $\rho = \rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r$ car $\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r$ est positif ou nul.

Alors $\rho\, e^{i\theta'} = s = z_1+z_2+\cdots+z_r = (\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r)\, e^{i\theta} = \rho\, e^{i\theta}$. Donc $\rho\, e^{i\theta'} = \rho\, e^{i\theta}$.

*Premier cas* $\rho \neq 0$.

Alors $e^{i\theta'} = e^{i\theta}$. Donc $z_{r+1} = \rho'\, e^{i\theta'} = \rho'\, e^{i\theta}$. Posons $\rho_{r+1} = \rho'$.

Alors $\theta \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ \rho_k \in \mathbb{R}^+$ et $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$. La récurence s'achève !

*Deuxième cas* $\rho = 0$.

Alors $\rho_1+\rho_2+\cdots\rho_r = 0$. Comme $\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_r$ sont des réels positifs ou nuls : $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_r = 0$.

Donc $\forall k \in [\![1,r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta} = 0 = 0 \times e^{i\theta'} = \rho_k\, e^{i\theta'}$. Posons $\rho_{r+1} = \rho'$. Alors $z_{r+1} = \rho'\, e^{i\theta'} = \rho_{r+1}\, e^{i\theta'}$.

Ainsi $\theta' \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![1,r+1]\!],\ \rho_k \in \mathbb{R}^+$ et $\forall k \in [\![1,r+1]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta'}$. La récurence s'achève non ?

$\boxed{\textbf{Q4}}$ a) Posons $L = \{\ell \in [\![1,n]\!] \mid a_{k,\ell} \neq 0\}$. Comme $\sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$, il est impossible que $L$ soit vide.

Soit $r$ un éléments de $L$.

Nous allons montrer que $\forall \ell \in L,\ |x_\ell| = |x_k|$ et que $\forall \ell \in L,\ x_\ell = x_r$, puis nous montrerons que $x_r = \lambda\, x_k$.

$$|x_k| = |\lambda|\,|x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|\,|x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_\ell| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_k| = |x_k| \times 1 = |x_k|.$$

Alors les inégalité précédentes sont des égalités.

Nous retiendrons que $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_k|$ et $\displaystyle\left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell|$ et nous allons exploiter successivement ces deux égalités.

$\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_k|$ donne $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \Big(a_{k,\ell}\,\big(|x_k| - |x_\ell|\big)\Big) = 0$.

De plus $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell} \geqslant 0$ et $|x_k| - |x_\ell| \geqslant 0$ donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell}\,\big(|x_k| - |x_\ell|\big) \geqslant 0$.

Alors $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \Big(a_{k,\ell}\,\big(|x_k| - |x_\ell|\big)\Big) = 0$ donne $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell}\,\big(|x_k| - |x_\ell|\big) = 0$.

Comme $\forall \ell \in L,\ a_{k,\ell} \neq 0 : \forall \ell \in L,\ |x_k| - |x_\ell| = 0$. Ainsi $\forall \ell \in L,\ |x_\ell| = |x_k|$.

Notons que l'on a également $\forall \ell \in L,\ |x_\ell| = |x_r|$. Rappelons que $\displaystyle\left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell|$.

La question 3 permet de dire qu'il existe un réels $\theta$ et $n$ réels positifs ou nuls $\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_n$ tels que :

$\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell}\, x_\ell = \rho_\ell\, e^{i\theta}$.

Soit $\ell$ un élément de $L$. $x_\ell = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\, e^{i\theta}$. Ainsi $|x_\ell| = \left|\dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\, e^{i\theta}\right| = \left|\dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\right| \left|\, e^{i\theta}\right| = \left|\dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\right| = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\cdot$

Comme $r$ est dans $L$ et que $|x_\ell| = |x_r|$ on a $\dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}} = \dfrac{\rho_r}{a_{k,r}}\cdot$ Alors $x_\ell = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\, e^{i\theta} = \dfrac{\rho_r}{a_{k,r}}\, e^{i\theta} = x_r$.

Ainsi $\forall \ell \in L,\ x_\ell = x_r$. Rappelons que si $\ell$ est un élément de $[\![1,n]\!]$ n'appartenant pas à $L : a_{k,\ell} = 0$.

Alors $\displaystyle\lambda\, x_k = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell = \sum_{\ell \in L} a_{k,\ell}\, x_\ell = \sum_{\ell \in L} a_{k,\ell}\, x_r = x_r \sum_{\ell \in L} a_{k,\ell} = x_r \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = x_r \times 1 = x_r$

$$\boxed{\text{Il existe un élément } r \text{ de } [\![1,n]\!] \text{ tel que } x_r = \lambda\, x_k.}$$

b) Montrons qu'il existe un élément $q$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $\lambda^q = 1$.

*Remarque* *Dans le principe c'est assez simple. Comme $x_r$ est encore une composante de $X$ de module maximal on peut, comme pour $x_k$ trouver $x_{r'}$ tel que $x_{r'} = \lambda\, x_r = \lambda^2\, x_k$. Et on recommence. Comme $X$ un a un nombre fini de coordonnées, on finira par retomber sur une coordonnée $x_s$ déjà obtenue et nécessairement non nulle. Alors il existera $q$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que $x_s = \lambda^q\, x_s$ ce qui donnera $\lambda^q = 1$. C'est ce qu'on lit "partout". Le "on finira" me gêne un peu d'où la tentative qui suit pour faire une "vraie" démonstration...*

Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^q \neq 1$.

Montrons par récurrence que pour tout élément $q$ de $\mathbb{N}^*$, il existe un élément $k_q$ de $[\![1,n]\!]$ tel que $x_{k_q} = \lambda^q\, x_k$.

• La propriété est vraie pour $q = 1$ d'après ce qui précède (il suffit de poser $k_1 = r$).

• Supposons que la propriété est vraie pour un élélément $q$ de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $q+1$.

L'hypothèse de récurrence montre qu'il existe un élément $k_q$ de $[\![1,n]\!]$ tel que $x_{k_q} = \lambda^q\, x_k$.

$|x_{k_q}| = |\lambda^q\, x_k| = |\lambda^q|\,|x_k| = |\lambda|^q\,|x_k| = 1 \times |x_k| = |x_k|$. Alors $|x_{k_q}| = \underset{1\leqslant \ell \leqslant n}{\mathrm{Max}}\, |x_\ell|$.

Alors comme nous l'avons vu dans a) pour $x_k$, on peut trouver un élément $k_{q+1}$ de $[\![1,n]\!]$ tel que $x_{k_{q+1}} = \lambda\, x_{k_q}$.

Ainsi $x_{k_{q+1}} = \lambda\, x_{k_q} = \lambda\, \lambda^q\, x_k = \lambda^{q+1}\, x_k$ Ce qui achève la récurrence.

Montrons alors que les éléments de la suite $(k_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux distincts.

Supposons qu'il existe deux éléments $q$ et $q'$ de $\mathbb{N}^*$ tels que $q < q'$ et $k_q = k_{q'}$

Alors $x_{k_q} = x_{k_{q'}}$. Donc $\lambda^{k_q}\, x_k = \lambda^{k_{q'}}\, x_k$. Comme $x_k$ n'est pas nul, $\lambda^{k_q} = \lambda^{k_{q'}}$.

Alors $\lambda^{k_{q'}-k_q} = 1$ et $k_{q'} - k_q \in \mathbb{N}^*$. Ceci contredit l'hypothèse.

Alors la suite $(k_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ est une suite indexée par $\mathbb{N}^*$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$ qui est un ensemble fini !

Ceci est donc impossible et l'hypothès $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^q \neq 1$ tombe.

Donc il existe un élément $q$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $\lambda^q = 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur popre de } A \text{ de module 1, il existe un élément } q \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ tel que } \lambda^q = 1.}$$

---