R.

EXERCICE 35

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

HEC E 2011

1. a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Vérifier que 1 est une valeur propre de A et déterminer un vecteur-colonne propre associé.

c) Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$;
- A admet la valeur propre 1 et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur-colonne propre associé à cette valeur propre.

2. L'ensemble $\mathcal{S}_n$, muni des lois usuelles sur les matrices, est-il un espace vectoriel ?

3. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n$ est une matrice de $\mathcal{S}_n$.

4. Soit A un élément de $\mathcal{S}_n$ et λ une valeur propre de A.

a) Montrer qu'il existe un vecteur-colonne propre $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ, pour lequel il existe un entier k de $[\![1, n]\!]$, vérifiant $v_k = 1$ et pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $|v_i| \leqslant 1$.

b) En déduire que l'on a : $|\lambda| \leqslant 1$ et $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant 1 - a_{k,k}$.

5. Montrer que si les éléments diagonaux d'une matrice A de $\mathcal{S}_n$ sont tous strictement supérieurs à $1/2$, la matrice A est inversible.

Q1 a) A est une matrice symétrique à coefficients réels donc A est diagonalisable.

b) Posons $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $AX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_0$.

$AX_0 = 1.X_0$ et $X_0 \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc <u>1 est valeur propre de A et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé</u>.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AX = \lambda X \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \lambda x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = \lambda y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y+z) = x(\lambda + \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}(x+y+z) = y(\lambda+\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}(x+y+z) = z(\lambda+\frac{1}{2}) \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z = 2x(\lambda+\frac{1}{2}) \\ x(\lambda+\frac{1}{2}) = y(\lambda+\frac{1}{2}) \\ x(\lambda+\frac{1}{2}) = z(\lambda+\frac{1}{2}) \end{cases}$

<u>1er cas</u> : $\lambda = -\frac{1}{2}$. $\lambda + \frac{1}{2} = 0$.

$AX = \lambda X \iff x+y+z = 0$. Alors <u>$-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A</u> et le sous-espace propre associé est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x+y+z=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Notons que $\dim SEP(A,-\frac{1}{2}) = 2$ et que $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de deux éléments de $SEP(A,-\frac{1}{2})$ évidemment libre.

$\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,-\frac{1}{2})$.

2ème cas !! Mais on peut s'arrêter là. A est diagonalisable donc A admet une seconde valeur propre α et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle. Montrer que nécessairement $\alpha = 1$ comme $\dim SEP(A,\alpha) = 1$ alors $\dim SEP(A,1) = 1$. Or X_0 est est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. Ainsi (X_0) est une base de $SEP(A,1)$.

Finalement
- $Sp\,A = \{-\frac{1}{2}, 1\}$.
- $B_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,-\frac{1}{2})$.
- $B_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,1)$.
- $M_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,-\frac{1}{2}) \oplus SEP(A,1)$ (A est diagonalisable)

Dans ces conditions $B = B_1 \cup B_2$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

$B = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$.

Remarque : Soit P la matrice de passage de la base canonique B_0 de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base B. $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, P est inversible et $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.

R.

Exercice 1. Calculer P^{-1} (R. $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$).

Exercice 2. Trouver une base orthonormée de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

(R. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Q2 I_n est de toute évidence un élément de S_n, mais $-2I_n$ n'appartient pas à S_n car ses coefficients ne sont pas tous positifs ou nuls.

Ainsi <u>S_n n'est pas un espace vectoriel pour les lois usuelles sur les matrices.</u>

<u>Remarque</u>.- $I_n + I_n \notin S_n$. Ainsi S_n n'est pas stable pour $+$ ce qui confirme le résultat précédent ! $O_{M_n(\mathbb{R})}$ n'appartient pas à S_n ce qui reconfirme le résultat précédent.

Q3 Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de S_n. Posons $C = AB = (c_{ij})$ et montrons que $C \in S_n$.

- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_{ik} \geqslant 0$ et $b_{kj} \geqslant 0$.

  donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_{ik} b_{kj} \geqslant 0$. Alors $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \geqslant 0$.

  <u>$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} \geqslant 0$.</u>

- $CX_0 = (AB)X_0 = A(BX_0) \overset{B \in S_n}{=} AX_0 \overset{A \in S_n}{=} X_0$ et $X_0 \neq O_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

<u>1 est valeur propre de C et X_0 est un vecteur propre associé.</u>

Ceci achève de montrer que $C \in S_n$. $AB \in S_n$. Ainsi :

<u>le produit de deux matrices de S_n est une matrice de S_n.</u>

Q4 <u>a)</u> Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Posons $m = \max_{1\leq i\leq n} |w_i|$. Notons que $\exists k \in [\![1,n]\!]$, $m = |w_k|$ (k n'est pas nécessairement unique... pensez à X_0 !)

Posons alors $m' = m$ si $w_k \geq 0$ et $m' = -m$ si $w_k < 0$. ← On pouvait directement poser $V = \frac{1}{w_k} W$!!

Notons alors que $m' = w_k$!!

Supposons que m' vaut 0. Alors $m = |w_k| = |m'| = 0$.

donc $\max_{1\leq i\leq n} |w_i| = 0$. Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|w_i| = 0$. Ce qui donne $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $w_i = 0$.

W est alors nul. Ceci est impossible car W est un vecteur propre.

donc m' n'est pas nul. Posons alors $V = \frac{1}{m'} W$.

V est encore un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Posons $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = \frac{1}{m'} w_i$.

Alors 1) $v_k = \frac{1}{m'} w_k = \frac{1}{m'} m' = 1$.

2) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|v_i| = \frac{1}{|m'|} |w_i| = \frac{1}{m} |w_i| \leq 1$. ($m = \max_{1\leq j\leq n} |w_j|$)

Ceci achève de montrer qu'il existe un vecteur propre $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ de A associé à la valeur propre λ tel qu'il existe un entier k de $[\![1,n]\!]$, vérifiant $v_k = 1$ et pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $|v_i| \leq 1$.

b) $AX_0 = X_0$. Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times 1 = 1$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

$AV = \lambda V$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i$.

En particulier $\underset{\uparrow \, v_k = 1}{\lambda} = \lambda v_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j = a_{kk} v_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj} v_j$.

R.

Donc $\lambda \overset{v_\ell = 1}{=} a_{\ell\ell} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq \ell}}^{n} a_{\ell j} v_j$.

Alors $|\lambda - a_{\ell\ell}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq \ell}}^{n} a_{\ell j} v_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq \ell}}^{n} |a_{\ell j}||v_j| \overset{a_{\ell j} \geq 0}{=} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq \ell}}^{n} a_{\ell j} |v_j| \overset{|v_j| \leq 1 \text{ et } a_{\ell j} \geq 0}{\leq} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq \ell}}^{n} a_{\ell j}$.

$|\lambda - a_{\ell\ell}| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} - a_{\ell\ell} = 1 - a_{\ell\ell}$.

car $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

$|\lambda - a_{\ell\ell}| \leq 1 - a_{\ell\ell}$.   (*) Voir $|\lambda| \leq 1$ à la fin de la page.

(Q5) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de S_n. Supposons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ii} > \frac{1}{2}$.

Soit λ une valeur propre de A.

D'après Q4 il existe un entier k de $[\![1,n]\!]$ tel que $|\lambda - a_{\ell\ell}| \leq 1 - a_{\ell\ell}$

Alors $-(1 - a_{\ell\ell}) \leq \lambda - a_{\ell\ell}$ $(\leq 1 - a_{\ell\ell})$.

Donc $\lambda \geq -1 + a_{\ell\ell} + a_{\ell\ell} = 2a_{\ell\ell} - 1 > 0$. Donc $\lambda \neq 0$.

0 n'est pas valeur propre de A. A est inversible.

Si les éléments diagonaux d'une matrice A de S_n sont tous strictement supérieurs à $1/2$ la matrice A est inversible.

Montrons que $|\lambda| \leq 1$.

(V1) Comme nous l'avons vu à la fin de la page 4 : $\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{\ell,j} v_j$.

$|\lambda| = \left|\sum^{n} a_{\ell,j} v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell,j} v_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell,j}||v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell,j}| \times 1 = \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell,j}| = \sum_{j=1}^{n} a_{\ell,j} = 1$; $|\lambda| \leq 1$.

(V2) On le déduit de $|\lambda - a_{\ell\ell}| \leq 1 - a_{\ell,\ell}$.

$|\lambda| = |\lambda - a_{\ell,\ell} + a_{\ell,\ell}| \leq |\lambda - a_{\ell,\ell}| + |a_{\ell,\ell}| = |\lambda - a_{\ell,\ell}| + a_{\ell,\ell} \leq 1 - a_{\ell,\ell} + a_{\ell,\ell} = 1$; $|\lambda| \leq 1$.

EXERCICE 26 **N2$^+$** **Rayon spectral.**

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Si A une matrice de E, on rappelle que A possède au moins une valeur propre et on appelle **rayon spectral** de A le réel noté $\rho(A)$ et égal à $\underset{\lambda \in \operatorname{Sp} A}{\operatorname{Max}} |\lambda|$.

On appelle norme sous-multiplicative sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

A1 $\quad \forall A \in E,\ N(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0_E$.

A2 $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall A \in E,\ N(\lambda A) = |\lambda|\, N(A)$.

A3 $\quad \forall (A, B) \in E^2,\ N(A + B) \leqslant N(A) + N(B)$.

A4 $\quad \forall (A, B) \in E^2,\ N(AB) \leqslant N(A)\, N(B)$.

Q1. a) Pour tout élément $A = (a_{i,j})$ de E on pose $\|A\| = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\operatorname{Max}} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.

Montrer que $\|.\|$ est une norme sous-multiplicative sur E.

b) Pour tout élément $A = (a_{i,j})$ de E on pose $N_1(A) = \underset{1 \leqslant j \leqslant n}{\operatorname{Max}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.

Déduire de a) que N_1 est une norme sous-multiplicative sur E.

▶ Dans toute la suite $A = (a_{i,j})$ est une matrice de E.

Q2. Ici N est une norme sous-multiplicative quelconque sur E.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

Montrer que $|\lambda| \leqslant N(A)$ (on pourra considérer la matrice B de E dont toutes les colonnes sont égales à X).

En déduire que $\rho(A) \leqslant N(A)$.

b) k un éléments de $[\![2, +\infty[\![$. Soit μ une valeur propre de A^k.

Montrer qu'il existe k éléments λ_1, λ_2, ..., λ_k de $\mathbb{C}$ tels que $X^k - \mu = (X - \lambda_2)(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k)$.

En remarquant que $A^k - \mu\, I_n$ n'est pas inversible montrer que $\mu \in \{\lambda^k\,;\, \lambda \in \operatorname{Sp} A\}$.

Montrer que $\operatorname{Sp} A^k = \{\lambda^k\,;\, \lambda \in \operatorname{Sp} A\}$.

c) Soit k dans $[\![2, +\infty[\![$. Déduire de ce qui précède que $\rho(A^k) = \big(\rho(A)\big)^k$ et que $0 \leqslant \rho(A) \leqslant \big(N(A^k)\big)^{\frac{1}{k}}$.

Q3. On "rappelle" qu'une suite complexe $(z_k)_{k \geqslant k_0}$ converge vers 0 si et seulement si la suite réelle $(|z_k|)_{k \geqslant k_0}$ converge vers 0.

$(M_k)_{k \geqslant k_0}$ est une suite d'éléments de E. On pose $\forall k \in [\![k_0, +\infty[\![,\ M_k = (m_{i,j}(k))$.

On dit que la suite $(M_k)_{k \geqslant k_0}$ converge vers la matrice nulle de E si, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$: $\lim_{k \to +\infty} m_{i,j}(k) = 0$.

Il est clair que si S est une matrice quelconque de E et si la suite $(M_k)_{k \geqslant k_0}$ converge vers la matrice nulle de E alors les suites $(S\, M_k)_{k \geqslant k_0}$ et $(M_k\, S)_{k \geqslant k_0}$ convergent vers la matrice nulle de E.

a) Montrer que la suite $(M_k)_{k \geqslant k_0}$ converge vers la matrice nulle de E si et seulement si $\lim_{k \to +\infty} \|M_k\| = 0$.

b) En déduire que si la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de E : $\rho(A) < 1$.

Q4. On se propose de montrer la réciproque de Q3 b). On suppose $\rho(A) < 1$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{1 - \rho(A)}{2}$.

Ainsi ε est un réel strictement positif et $\rho(A)+\varepsilon<1$.

On "rappelle" que comme A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est elle semblable à une matrice triangulaire $T=(t_{i,j})$ de E (ce résultat est proposé dans un des exercices précédents).

Donc il existe une matrice inversible P de E telle que $P^{-1}AP=T$ ou $T=PAP^{-1}$.

Soit d un réel strictement positif et D la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\,(d,d^2,\dots,d^n)$ de E.

Notons que D est inversible et que $D^{-1}=\mathrm{Diag}\,(d^{-1},d^{-2},\dots,d^{-n})$.

a) Calculer $D^{-1}TD$. Montrer que l'on peut trouver d dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}|d^{i-j}\,t_{i,j}|\leqslant\varepsilon$.

Dans la suite nous supposerons que d est tel que l'inégalité précédente soit vraie.

En déduire alors que $\|DTD^{-1}\|\leqslant\rho(A)+\varepsilon$.

b) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \|DP^{-1}A^kPD^{-1}\|\leqslant\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^k$. Conclure.

Q5. N est une norme sous-multiplicative sur E. On se propose de montrer que $\rho(A)=\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\big(N(A^k)\big)^{\frac{1}{k}}$.

a) $(M_k)_{k\geqslant k_0}$ est une suite d'éléments de E. On pose $\forall k\in[\![k_0,+\infty[\![,\ M_k=(m_{i,j}(k))$.

$(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On rappelle que : $\forall(p,q,r,s)\in[\![1,n]\!]^4,\ E_{p,q}\,E_{r,s}=\begin{cases}E_{p,s} & \text{si } q=r\\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} & \text{sinon}\end{cases}$.

Montrer que $\forall k\in[\![k_0,+\infty[\![,\ N(M_k)\leqslant\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|m_{i,k}(k)|\,N(E_{i,j})$.

En déduire que si $(M_k)_{k\geqslant k_0}$ converge vers 0_E : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}N(M_k)=0$.

Établir la réciproque (on pourra considérer $N(E_{p,q}\,M_k\,E_{p,q})$).

b) Soit ε un réel strictement positif. On pose $A_\varepsilon=\dfrac{1}{\rho(a)+\varepsilon}\,A$.

Montrer que $\rho(A_\varepsilon)<1$ et en déduire qu'il existe un élément k_1 de $\mathbb{N}^*$ tel que $\forall k\in[\![k_1,+\infty[\![,\ N\big(A_\varepsilon^k\big)<1$.

En déduire que $\forall k\in[\![k_1,+\infty[\![,\ \rho(A)\leqslant\big(N(A^k)\big)^{\frac{1}{k}}<\rho(A)+\varepsilon$ et conclure.

Ce thème est abordé dans HEC MI 2011 mais les résultats importants sont établis pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A diagonalisable...

(Q1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soient $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ deux éléments de E.

- Supposons que $\|A\|=0$.

Alors $\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)=0$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|=0$ et $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}|\geq 0$

donc $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}|=0$. Ainsi $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}=0$. Par conséquent $A=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Réciproquement supposons que $A=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. $\|A\|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|0|=0$.

Finalement $\underline{\|A\|=0 \iff A=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}}$ ... ou $A=0_E$.

- $\|\lambda A\|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|\lambda a_{i,j}| = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}(|\lambda||a_{i,j}|)=\max_{1\leq i\leq n}\left(|\lambda|\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)=|\lambda|\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$.

donc $\underline{\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|}$.

- $\|A+B\|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\leq \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|\leq \|A\|+\|B\|$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\leq\|A\|+\|B\|$ donc $\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\leq\|A\|+\|B\|$.

donc $\underline{\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|}$.

- Posons $C=(c_{i,j})$. Soit $i\in[\![1,n]\!]$.

$\sum_{j=1}^{n}|c_{i,j}|=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right|\leq\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(|a_{i,\ell}|\,|b_{\ell,j}|)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}|a_{i,\ell}||b_{\ell,j}|$.

$\sum_{j=1}^{n}|c_{i,j}|\leq\sum_{\ell=1}^{n}\left(|a_{i,\ell}|\sum_{j=1}^{n}|b_{\ell,j}|\right)\leq\sum_{\ell=1}^{n}(|a_{i,\ell}|\,\|B\|)=\|B\|\sum_{\ell=1}^{n}|a_{i,\ell}|\leq\|B\|\,\|A\|$.

car $|a_{i,\ell}|\geq 0$ et $\sum_{j=1}^{n}|b_{\ell,j}|\leq\|B\|$

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}|c_{i,j}|\leq\|A\|\,\|B\|$.

Alors $\|C\|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|c_{i,j}|\leq\|A\|\,\|B\|$. Donc $\underline{\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|}$.

Ceci achève de montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative sur E.

b) Soit $A=(a_{i,j})$ un élément de E. Posons ${}^tA=(a'_{i,j})$. $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a'_{i,j}=a_{j,i}$.

R.

$N_1(A) = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a'_{j,i}| \underset{i \leftrightarrow j}{=} \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a'_{i,j}| = \|{}^tA\|.$

↳ permutation des deux indices

$\forall A\in E,\ N_1(A) = \|{}^tA\|.$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $(A,B)\in E^2$

- $N_1(A)=0 \Leftrightarrow \|{}^tA\|=0 \Leftrightarrow {}^tA = 0_E \Leftrightarrow A=0_E$. $N_1(A)=0 \Leftrightarrow A=0_E$.
- $N_1(\lambda A) = \|{}^t(\lambda A)\| = \|\lambda\,{}^tA\| = |\lambda|\,\|{}^tA\| = |\lambda|\,N_1(A)$. $N_1(\lambda A) = |\lambda|\,N_1(A)$.
- $N_1(A+B) = \|{}^t(A+B)\| = \|{}^tA+{}^tB\| \le \|{}^tA\|+\|{}^tB\| = N_1(A)+N_1(B)$. $N_1(A+B)\le N_1(A)+N_1(B)$.
- $N_1(AB) = \|{}^t(AB)\| = \|{}^tB\,{}^tA\| \le \|{}^tB\|\,\|{}^tA\| = N_1(B)N_1(A) = N_1(A)N_1(B)$. $N_1(AB)\le N_1(A)\,N_1(B)$.

Ainsi N_1 est une norme sous-multiplicative sur E.

Q2 a) $X \ne 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $AX=\lambda X$. Soit B la matrice de E dont toutes les colonnes sont égales à X.
Soit $(E_1,E_2,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Soit $j\in[\![1,n]\!]$.

BE_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de B donc $BE_j = X$. Alors $ABE_j = AX = \lambda X = \lambda BE_j = (\lambda B)E_j$.

Ainsi la $j^{\text{ème}}$ colonne de AB est égale à la $j^{\text{ème}}$ colonne de λB et ceci pour tout j dans $[\![1,n]\!]$.
Par conséquent $AB=\lambda B$.

$|\lambda|\,N(B) = N(\lambda B) = N(AB) \le N(A)N(B)$. De plus B n'est pas la matrice nulle car $X \ne 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$
donc $N(B)\ne 0$. Mieux $N(B)>0$. Alors $|\lambda|\,N(B)\le N(A)N(B)$ donne $|\lambda|\le N(A)$ en divisant par $N(B)$.

$\forall \lambda\in \mathrm{Sp}\,A,\ |\lambda|\le N(A)$. Alors $\max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}A} |\lambda| \le N(A)$ et ainsi $\rho(A)\le N(A)$.

b) 1er cas : $\mu = 0$. Posons $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $\lambda_k = 0$. Alors :

$X^p - \mu = X^p = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$.

2ème cas : $\mu \ne 0$. Soit $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ les racines $p^{\text{ème}}$ de μ. Alors :

$X^p-\mu = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$.

Dans les deux cas : $\exists(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{C}^p,\ X^p-\mu = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$.

Ainsi $A^\ell - \mu I_n = (A-\lambda_1 I_n)(A-\lambda_2 I_n)\cdots(A-\lambda_\ell I_n)$.

μ est une valeur propre de A^ℓ donc $A^\ell - \mu I_n$ n'est pas inversible.

donc $(A-\lambda_1 I_n)(A-\lambda_2 I_n)\cdots(A-\lambda_\ell I_n)$ n'est pas inversible. Comme le produit de matrices inversibles est inversible nécessairement l'une des matrices $A-\lambda_1 I_n, A-\lambda_2 I_n, \dots, A-\lambda_\ell I_n$ n'est pas inversible.

Il existe donc ℓ_0 dans $[\![1,\ell]\!]$ tel que $A-\lambda_{\ell_0} I_n$ ne soit pas inversible.

donc λ_{ℓ_0} est une valeur propre de A. Or λ_{ℓ_0} est une racine de $X^\ell-\mu$ donc $\lambda_{\ell_0}^\ell-\mu=0$.

Alors $\mu = \lambda_{\ell_0}^\ell$ avec λ_{ℓ_0} valeur propre de A. donc $\mu \in \{\lambda^\ell ; \lambda \in Sp\,A\}$.

Nous venons de voir que $Sp\,A^\ell \subset \{\lambda^\ell ; \lambda\in Sp\,A\}$ montrons l'inclusion contraire.

Soit $\lambda \in Sp\,A$. $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $AX=\lambda X$.

Alors $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $A^\ell X = \lambda^\ell X$. Ainsi $\lambda^\ell \in Sp\,A^\ell$ et ceci pour tout $\lambda \in Sp\,A$.

donc $\{\lambda^\ell ; \lambda\in Sp\,A\} \subset Sp\,A^\ell$. Finalement $Sp\,A^\ell = \{\lambda^\ell ; \lambda \in Sp\,A\}$.

c) $\rho(A^\ell) = \max_{\mu\in Sp\,A^\ell} |\mu| = \max_{\lambda\in Sp\,A} |\lambda^\ell| = \max_{\lambda\in Sp\,A} |\lambda|^\ell = \left(\max_{\lambda\in Sp\,A} |\lambda|\right)^\ell = (\rho(A))^\ell$.

$\rho(A^\ell) = (\rho(A))^\ell$.

$0 \leq \rho(A^\ell) \leq N(A^\ell)$ d'après Q2 c), donc $0 \leq (\rho(A))^\ell \leq N(A^\ell)$.

Alors $0 \leq \rho(A) \leq (N(A^\ell))^{1/\ell}$ et ceci pour tout ℓ dans $[\![1,+\infty[\![$ et même dans $\mathbb{N}^*$, non ?

(Q3) a) * Supposons que la suite $(M_\ell)_{\ell\geq \ell_0}$ converge vers 0_E. Montrons que $\lim_{\ell\to+\infty} \|M_\ell\| = 0$.

Par hypothèse $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim_{\ell\to+\infty} m_{i,j}(\ell) = 0$.

Remarque : $\forall (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, $\max_{1\leq i\leq n} |b_i| \leq |b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n| = \sum_{i=1}^n |b_i|$.

Soit $\ell \in [\![\ell_0,+\infty[\![$

$0 \leq \|M_\ell\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}(\ell)| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{i,j}(\ell)|$. De plus $\lim_{\ell\to+\infty} \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |m_{i,j}(\ell)| = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n 0 = 0$

Alors par encadrement on obtient $\lim_{k\to+\infty} \|M_k\| = 0$.

* Réciproquement supposons que $\lim_{k\to+\infty} \|M_k\| = 0$ et montrons que $(M_k)_{k\geq k_0}$ converge vers 0_E.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$\forall k \in [\![k_0,+\infty[\![$, $0 \leq |m_{i,j}(k)| \leq \sum_{\ell=1}^{n} |m_{i,\ell}(k)| \leq \max_{1\leq i'\leq n} \sum_{\ell=1}^{n} |m_{i',\ell}(k)| = \|M_k\|$.

De plus $\lim_{k\to+\infty} \|M_k\| = 0$. Alors, par encadrement, on obtient $\lim_{k\to+\infty} |m_{i,j}(k)| = 0$.

Donc $\lim_{k\to+\infty} m_{i,j}(k) = 0$ et ceci pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$. Alors $(M_k)_{k\geq k_0}$ converge vers 0_E.

<u>$(M_k)_{k\geq k_0}$ converge vers la matrice nulle de E si et seulement si $\lim_{k\to+\infty} \|M_k\| = 0$.</u>

b) Supposons que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de E.

$\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative sur E.

Alors $\forall k \in [\![1,+\infty[\![$, $0 \leq \rho(A) \leq (\|A^k\|)^{1/k}$ d'après Q2 c)

Donc $\forall k \in [\![1,+\infty[\![$, $0 \leq (\rho(A))^k \leq \|A^k\|$. De plus $\lim_{k\to+\infty} \|A^k\| = 0$ puisque $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E.

Alors $\lim_{k\to+\infty} (\rho(A))^k = 0$, comme $\rho(A) \in \mathbb{R}^+$ ceci entraîne que $\rho(A) < 1$.

<u>Si $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E : $\rho(A) < 1$.</u>

Q4 a) Posons $D = (d_{i,j})$ et $D^{-1} = (d'_{i,j})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $d_{i,j} = \begin{cases} d^i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $d'_{i,j} = \begin{cases} d^{-i} & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$TD^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} t_{i,k} d'_{k,j}\right) = (t_{i,j} d^{-j})$. $DTD^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} d_{i,k} t_{k,j} d^{-j}\right)$.

$DTD^{-1} = (d^i t_{i,j} d^{-j}) = (d^{i-j} t_{i,j})$. <u>$DTD^{-1} = (d^{i-j} t_{i,j})$.</u>

Rappelons que T est triangulaire supérieure donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i > j \Rightarrow t_{i,j} = 0$.

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $\forall j \in [\![i+1,n]\!]$, $i-j>0$ donc $\forall i \in [\![1,n-1]\!], \forall j \in [\![i+1,n]\!]$ $\lim\limits_{d\to+\infty} |d^{i-j} t_{i,j}| = 0$.

Alors $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $\lim\limits_{d\to+\infty} \sum\limits_{j=i+1}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}| = 0$.

Donc $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $\exists B_i \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall d \in]B_i,+\infty[$, $\sum\limits_{j=i+1}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}| < \varepsilon$.

Choisissons un réel d strictement supérieur à $\max\limits_{1\leq i\leq n-1} B_i$. $d \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $\sum\limits_{j=i+1}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}| < \varepsilon$.

Donc il existe un élément d de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $\sum\limits_{j=i+1}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}| < \varepsilon$.

Dans la suite nous supposons que cette inégalité est vérifiée.

$DTD^{-1} = (d^{i-j} t_{i,j})$. $\|DTD^{-1}\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=i}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}|$.

$t_{i,j} = 0$ si $i>j$ ... ou $j<i$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

<u>1er Cas</u>.. $i \leq n-1$. $\sum\limits_{j=i}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}| \leq |d^{i-i} t_{i,i}| + \sum\limits_{j=i+1}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}| < |t_{i,i}| + \varepsilon$.

<u>2ème Cas</u> $i = n$ $\sum\limits_{j=i}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}| = |d^{n-n} t_{n,n}| = |t_{n,n}| < |t_{n,n}| + \varepsilon$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{j=i}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}| < |t_{i,i}| + \varepsilon$.

donc $\|DTD^{-1}\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=i}^{n} |d^{i-j} t_{i,j}| < \max\limits_{1\leq i\leq n} (|t_{i,i}| + \varepsilon) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |t_{i,i}| + \varepsilon$.

A et T sont semblables et T est triangulaire supérieure.

Alors $Sp A = Sp T = \{t_{1,1}, t_{2,2}, \dots, t_{n,n}\}$. donc $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in Sp A} |\lambda| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |t_{i,i}|$.

Ainsi $\|DTD^{-1}\| < \rho(A) + \varepsilon$.

ce qui donne également $\|DTD^{-1}\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

b) <u>Lemme</u>.. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|M^k\| \leq \|M\|^k$.

Montrons ce résultat par récurrence. soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

C'est évident pour $k=1$. Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $k+1$.

hypothèse de récurrence.

$\|M^{k+1}\| = \|M^k M\| \le \|M^k\|\,\|M\| \le \|M\|^k\,\|M\| = \|M\|^{k+1}$, ce qui achève la récurrence et la preuve du lemme.

$\|.\|$ est une norme sous-multiplicative.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $DP^{-1}A^kPD^{-1} = D(P^{-1}AP)^kD^{-1} = DT^kD^{-1} = (DTD^{-1})^k$.

$\|DP^{-1}A^kPD^{-1}\| = \|(DTD^{-1})^k\| \le \|DTD^{-1}\|^k \le (\rho(A)+\varepsilon)^k$.

$0\le \|DTD^{-1}\| \le \rho(A)+\varepsilon$

<u>$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \|DP^{-1}A^kPD^{-1}\| \le (\rho(A)+\varepsilon)^k$.</u>

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ 0\le\|DP^{-1}A^kPD^{-1}\| \le (\rho(A)+\varepsilon)^k$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}(\rho(A)+\varepsilon)^k$ car $0<\rho(A)+\varepsilon<1$.

Alors par encadrement : $\lim\limits_{k\to+\infty}\|DP^{-1}A^kPD^{-1}\| = 0$. Q3c) montre alors que la suite $(DP^{-1}A^kPD^{-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E. Alors :

$((DP^{-1})^{-1}(DP^{-1})A^kPD^{-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E (DP^{-1} est inversible car D et P^{-1} le sont).

Donc $(A^kPD^{-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E. Ainsi $(A^kPD^{-1}(PD^{-1})^{-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E (PD^{-1} est également inversible car P et D^{-1} sont inversibles). Alors $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E.

Finalement <u>$(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E si $\rho(A)<1$.</u> La réciproque a été montrée dans Q3b).

Donc <u>$(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E si et seulement si $\rho(A)<1$.</u>

<u>Exercice.</u> — $\mathcal{N}$ est l'ensemble des normes sous-multiplicatives de E. $A\in E$.

Q1. — $N\in\mathcal{N}$ et P est une matrice inversible de E.
On pose $\forall C\in E$, $\hat{N}_P(C) = N(P^{-1}CP)$. Montrer que $\hat{N}_P\in\mathcal{N}$.

Q2. — Montrer que $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists N_\varepsilon\in\mathcal{N}$, $N_\varepsilon(A)\le\rho(A)+\varepsilon$ (on pourra s'inspirer de Q4).

En déduire que $\rho(A) = \inf\limits_{N\in\mathcal{N}}(N(A))$.

Q5 a) Soit $k \in [\![k_0, +\infty[\![$. $M_k = (m_{i,j}(k)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(k)\, E_{i,j}$.

Alors $N(M_k) = N\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(k) E_{i,j}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} N\left(m_{i,j}(k)\, E_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}(k)|\, N(E_{i,j})$.

$\forall k \in [\![k_0, +\infty[\![,\ N(M_k) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}(k)|\, N(E_{i,j})$.

$\forall k \in [\![k_0, +\infty[\![,\ 0 \leq N(M_k) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}(k)|\, N(E_{i,j})$. Supposons que $(M_k)_{k \geq k_0}$ converge vers 0_E.

On a : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim_{k\to+\infty} m_{i,j}(k) = 0$.

Alors $\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}(k)|\, N(E_{i,j})\right) = 0$. Donc par encadrement il vient $\lim_{k\to+\infty} N(M_k) = 0$.

Réciproquement supposons que $\lim_{k\to+\infty} N(M_k) = 0$ et montrons que la suite $(M_k)_{k \geq k_0}$ converge vers 0_E.

Soit $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$. Soit $k \in [\![k_0, +\infty[\![$.

$E_{p,q} M_k E_{p,q} = E_{p,q}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(k) E_{i,j}\right) E_{p,q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(k)\, E_{p,q} \underbrace{E_{i,j}\, E_{p,q}}_{= \begin{cases} 0_{M_n(\mathbb{C})} & \text{si } j \neq p \\ E_{i,q} & \text{si } j = p \end{cases}}$

$E_{p,q} M_k E_{p,q} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,p}(k)\, E_{p,q} E_{i,q} = m_{q,p}(k)\, E_{p,q}$.

$E_{p,q} E_{i,q} = \begin{cases} 0_{M_n(\mathbb{C})} & \text{si } i \neq q \\ E_{p,q} & \text{si } i = q \end{cases}$

Alors $|m_{q,p}(k)|\, N(E_{p,q}) = N(m_{q,p}(k) E_{p,q}) = N(E_{p,q} M_k E_{p,q}) \leq N(E_{p,q})\, N(M_k)\, N(E_{p,q})$.

De plus $N(E_{p,q}) \neq 0$ car $E_{p,q} \neq 0_E$. Donc $N(E_{p,q}) > 0$. Ainsi $|m_{q,p}(k)| \leq N(M_k) N(E_{p,q})$

Alors $\forall k \in [\![k_0, +\infty[\![$, $0 \leq |m_{q,p}(k)| \leq N(M_k) N(E_{p,q})$ et $\lim_{k\to+\infty} (N(M_k) N(E_{p,q})) = 0$.

Par encadrement on obtient : $\lim_{k\to+\infty} |m_{q,p}(k)| = 0$. Donc $\lim_{k\to+\infty} m_{q,p}(k) = 0$ et ceci pour tout (p,q) dans $[\![1,n]\!]^2$.

Par conséquent $(M_k)_{k \geq k_0}$ converge vers 0_E.

Finalement $(M_k)_{k \geq k_0}$ converge vers 0_E si et seulement si $\lim_{k\to+\infty} N(M_k) = 0$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $\lambda \in Sp A_\varepsilon \Leftrightarrow A_\varepsilon - \lambda I_n$ non inversible $\Leftrightarrow \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} A - \lambda I_n$ non inversible.

$\lambda \in Sp A_\varepsilon \underset{\rho(A)+\varepsilon \neq 0}{\Leftrightarrow} A - (\rho(A)+\varepsilon)\lambda I_n$ non inversible $\Leftrightarrow (\rho(A)+\varepsilon)\lambda \in Sp A \Leftrightarrow \exists \alpha \in Sp A, (\rho(A)+\varepsilon)\lambda = \alpha$.

$\lambda \in Sp A_\varepsilon \Leftrightarrow \exists \alpha \in Sp A, \lambda = \frac{\alpha}{\rho(A)+\varepsilon}$. $Sp A_\varepsilon = \{ \frac{\alpha}{\rho(A)+\varepsilon} ; \alpha \in Sp A \}$.

$$\rho(A_\varepsilon) = \max_{\alpha \in Sp A} \left| \frac{\alpha}{\rho(A)+\varepsilon} \right| = \max_{\alpha \in Sp A} \frac{|\alpha|}{\rho(A)+\varepsilon} = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} \max_{\alpha \in Sp A} |\alpha| = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}.$$

Alors $\rho(A_\varepsilon) = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}$ donc $0 < \rho(A_\varepsilon) < 1$. Alors $(A_\varepsilon^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E

d'après Q4. Q5 b) montre alors que $\lim_{\ell \to +\infty} N(A_\varepsilon^\ell) = 0$.

Alors $\exists \ell_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\ell \geq \ell_1 \Rightarrow N(A_\varepsilon^\ell) < 1$. $\exists \ell_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall \ell \in [\![\ell_1, +\infty [\![, N(A_\varepsilon^\ell) < 1$.

Soit $k \in [\![\ell_1, +\infty [\![$. D'après Q2 : $\rho(A) \leq (N(A^k))^{1/k}$.

$$1 > N(A_\varepsilon^k) = N\left(\left(\frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} A\right)^k\right) = N\left(\frac{1}{(\rho(A)+\varepsilon)^k} A^k\right) = \left|\frac{1}{(\rho(A)+\varepsilon)^k}\right| N(A^k) = \frac{1}{(\rho(A)+\varepsilon)^k} N(A^k).$$

Or $(\rho(A)+\varepsilon)^k > 0$ donc $(\rho(A)+\varepsilon)^k > N(A^k) \geq 0$. Ainsi $\rho(A)+\varepsilon > (N(A^k))^{1/k}$ car $\rho(A)+\varepsilon > 0$.

Finalement $\forall k \in [\![\ell_1, +\infty [\![$, $\rho(A) \leq (N(A^k))^{1/k} < \rho(A)+\varepsilon$.

Alors $\forall k \in [\![\ell_1, +\infty [\![$, $\rho(A) - \varepsilon < (N(A^k))^{1/k} < \rho(A)+\varepsilon$.

donc $\forall k \in [\![\ell_1, +\infty [\![$, $|(N(A^k))^{1/k} - \rho(A)| < \varepsilon$.

Nous avons donc montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \ell_1 \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, k \geq \ell_1 \Rightarrow |(N(A^k))^{1/k} - \rho(A)| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim_{k \to +\infty} (N(A^k))^{1/k} = \rho(A)$ et ceci pour toute norme sous-multiplicative N sur E.

R. EXERCICE 37

Exercice $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.

ORAL HEC 1996 P1

f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1 Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Q2 Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?

On pose $u_1 = e_2 - e_3$ et $u_2 = e_1 + e_2 - e_3$.

Q3 On se propose de déterminer les sous-espaces vectoriels F de E stables par f ($f(F) \subset F$).

a) Déterminer les droites vectorielles de E stables par f.

b) On pose $P_1 = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ et $P_2 = \operatorname{Im} f$. Montrer que P_1 et P_2 sont stables par f.

c) Soit P un plan de E stable par f différent de P_2. Montrer que $P \cap P_2$ est une droite vectorielle de E stable par f. En déduire que u_2 appartient à P.

Montrer que $f(P) \neq P$. En déduire que u_1 appartient à P.

d) Donner tous les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Q1 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}(-e_1 - e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_1 - e_2)$.

Ainsi $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(-e_1 - e_2 + e_3, e_1 - e_2)$ ou $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$.

$(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Notons que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(e_1 + e_2 - e_3) + \beta(e_1 - e_2) = 0_E$.

$(\alpha + \beta)e_1 + (\alpha - \beta)e_2 - \alpha e_3 = 0_E$. Comme (e_1, e_2, e_3) est libre : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \end{cases}$; ainsi $\alpha = \beta = 0$.

ceci achève de montrer que $(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$.

Finalement $(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$ est une base de $\operatorname{Im} f$. $\dim \operatorname{Im} f = 2$ ou $\operatorname{rg} f = 2$.

le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$. $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle.

Observons que $f(e_2) = f(e_3)$. Alors $f(e_2 - e_3) = 0_E$. $e_2 - e_3$ est donc un élément non nul de la droite vectorielle $\operatorname{Ker} f$.

Ainsi $(e_2 - e_3)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

$(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et $(e_2 - e_3)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ donc pour montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E il suffit de prouver que la famille $\mathcal{B} = (e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2, e_2 - e_3)$ est une base de E.

B était une famille de cardinal 3 et E étant de dimension 3, pour montrer que B est une base de E il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(e_1+e_2-e_3)+\beta(e_1-e_2)+\gamma(e_2-e_3)=0_E$.

Alors $(\alpha+\beta)e_1+(\alpha-\beta+\gamma)e_2+(-\alpha-\gamma)e_3=0_E$.

(e_1,e_2,e_3) étant libre : $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta+\gamma=0\\ -\alpha-\gamma=0\end{cases}$; $\begin{cases}\beta=-\alpha\\ \gamma=-\alpha\\ \alpha+\alpha-\alpha=0\end{cases}$; donc $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Ceci achève de montrer que
1) B est libre
2) B est une base de E
3) $\underline{\underline{\text{Im} f \text{ et } \text{Ker} f \text{ sont supplémentaires dans } E}}$.

Q2 $\text{Ker} f=\text{Vect}(e_2+e_3)$ donc 0 est valeur propre de f et $SEP(f,0)=\text{Vect}(e_2+e_3)$.
Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $u=xe_1+ye_2+ze_3$ un élément de E.

$f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}(-1-\lambda)x+y+z=0\\ -x-(1+\lambda)y-z=0\\ x-\lambda z=0\end{cases}$.

$f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda z\\ 0=-(1+\lambda)\lambda z+y+z=y+(-\lambda^2-\lambda+1)z\\ -(1+\lambda)z-(1+\lambda)y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda z\\ (1+\lambda)(z+y)=0\\ y=(\lambda^2+\lambda-1)z\end{cases}$.

$\underline{1^{er}\text{ cas}}$.. $\lambda=-1$. $f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases}x=-z\\ y=-z\end{cases}$.

Alors -1 est valeur propre de f et $SEP(f,-1)=\text{Vect}(e_1+e_2-e_3)$

$\underline{2^{e}\text{ cas}}$.. $\lambda\neq-1$ $f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda z\\ z+y=0\\ y=(\lambda^2+\lambda-1)z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda z\\ y=-z\\ -z=+(\lambda^2+\lambda-1)z\end{cases}$

$f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda z\\ y=-z\\ (\lambda+1)\lambda z=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$. $\uparrow \begin{cases}\lambda\neq0\\ \lambda\neq-1\end{cases}$

Alors λ n'est pas valeur propre de f.

Finalement f admet deux valeurs propres 0 et -1.

De plus $SEP(f,0) = Vect(e_2 - e_3)$ et $SEP(f,-1) = Vect(e_1 + e_2 - e_3)$.

$\dim SEP(f,0) + \dim SEP(f,-1) = 2 \neq 3$! f n'est pas diagonalisable.

Q3 a) Notons que $SEP(f,0) = Vect(u_1)$ et $SEP(f,-1) = Vect(u_2)$.

- Posons $D_1 = Vect(u_1)$ et $D_2 = Vect(u_2)$. D_1 et D_2 sont deux droites vectorielles de E.

  De plus $f(D_1) = f(Vect(u_1)) = Vect(f(u_1)) = Vect(0_E) = \{0_E\} \subset D_1$ et

  $f(D_2) = f(Vect(u_2)) = Vect(f(u_2)) = Vect(-u_2) = Vect(u_2) = D_2$.

  Ainsi D_1 et D_2 sont deux droites vectorielles de E stables par f. (1)

- Réciproquement soit D une droite vectorielle de E stable par f.

  $\exists u \in E$, $u \neq 0_E$ et $D = Vect(u)$.

  $u \in D$ (!) donc $f(u) \in D = Vect(u)$; $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f(u) = \lambda u$.

  Or u n'est pas nul donc λ est une valeur propre de f et u est un vecteur propre associé.

  1er cas.. $\lambda = 0$. Alors $u \in SEP(f,0) = D_1$. Comme u n'est pas nul et que D_1 est une droite vectorielle : $D_1 = Vect(u)$.

  Ainsi $D_1 = D$ .. ou $D = D_1$!

  2ème cas.. $\lambda = -1$ Alors $u \in SEP(f,-1) = D_2$. Comme u n'est pas nul et que D_2 est une droite vectorielle : $D_2 = Vect(u)$.

  Alors $D = D_2$.

  Donc si D est une droite vectorielle stable par f : $D = D_1$ ou $D = D_2$ (2).

(1) et (2) montrent que LES droites vectorielles de E stables par f sont

$D_1 = Vect(u_1) = Vect(e_2 - e_3)$ et $D_2 = Vect(u_2) = Vect(e_1 + e_2 - e_3)$.

b) $f(P_1) = f(\mathrm{Vect}(u_1, u_2)) = \mathrm{Vect}(f(u_1), f(u_2)) = \mathrm{Vect}(0_E, -u_2) = \mathrm{Vect}(-u_2) = \mathrm{Vect}(u_2) \subset P_1$.
P_1 est stable par f.

$f(\mathrm{Im} f) = f(f(E))$. Or $f(E) \subset E$ donc $f(f(E)) \subset f(E)$; $f(\mathrm{Im} f) \subset \mathrm{Im} f$.

$\mathrm{Im} f$ est stable par f ! Normal car plus simplement : $\forall x \in \mathrm{Im} f$, $f(x) \in \mathrm{Im} f$!!!

<u>P_1 et $\mathrm{Im} f$ sont stables par f.</u>

<u>Remarque</u>.. (u_1, u_2) est libre car u_1 et u_2 sont deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes. Ainsi P_1 est un plan vectoriel.

Nous avons également vu plus haut que $\mathrm{Im} f$ est un plan vectoriel.

<u>P_1 et $\mathrm{Im} f$ sont deux plans vectoriels stables par f.</u>

Ici c'est plus délicat mais c'est à bien comprendre.

c) $P \cap P_2 \subset P_2$ donc $\dim P \cap P_2 \leqslant \dim P_2 = 2$.

Supposons $\dim P \cap P_2 = 0$. Alors $P \cap P_2 = \{0_E\}$. P et P_2 sont donc en somme directe. Ainsi $\dim(P + P_2) = \dim P + \dim P_2 = 4$ et $P + P_2$ est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension 3 !!

Ainsi $\dim P \cap P_2 \neq 0$

Supposons $\dim(P \cap P_2) = 2$.

Alors $P \cap P_2 \subset P_2$, $P \cap P_2 \subset P$, $\dim(P \cap P_2) = \dim P_2$ et $\dim(P \cap P_2) = \dim P$.

Ainsi $P \cap P_2 = P_2$ et $P \cap P_2 = P$. Alors $P_2 = P$!!

donc $\dim(P \cap P_2) \neq 2$

$\dim(P \cap P_2) \leqslant 2$, $\dim(P \cap P_2) \neq 0$ et $\dim(P \cap P_2) \neq 2$. Alors $\dim(P \cap P_2) = 1$.

<u>$P \cap P_2$ est une droite vectorielle.</u>

$P \cap P_2 \subset P$ et $P \cap P_2 \subset P_2$ donc $f(P \cap P_2) \subset f(P) \subset P$ et $f(P \cap P_2) \subset f(P_2) \subset P_2$. Alors $f(P \cap P_2) \subset P \cap P_2$.

<u>$P \cap P_2$ est une droite vectorielle stable par f.</u>

Alors $P \cap P_2 = D_1$ ou D_2.

R.

Supposons $P \cap P_2 = D_1$. Alors $\mathrm{Ker} f = D_1 = P \cap P_2 \subset P = \mathrm{Im} f$. Ceci est impossible car $\mathrm{Ker} f \neq \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.

Finalement $P \cap P_2 = D_2$. $u_2 \in D_2 = P \cap P_2$; $\underline{\underline{u_2 \text{ appartient à } P}}$.

Montrons que $f(P) \neq P$.

Supposons $f(P) = P$. Alors $P = f(P) \subset f(E) = \mathrm{Im} f = P_2$.

Donc $P \subset P_2$ et $\dim P = \dim P_2 = 2$. Ainsi $P = P_2$!!

Par conséquent $\underline{\underline{f(P) \neq P}}$ ou $f(P) \subsetneq P$.

$f(P)$ est un sous-espace de P, distinct de P et P est de dimension 2.

Alors $\dim f(P) = 1$ ou 0.

Si $\dim f(P) = 0$ alors $f(P) = \{0_E\}$ donc $P \subset \mathrm{Ker} f$ et ainsi $2 = \dim P \leq \dim \mathrm{Ker} f$.

Or $\dim \mathrm{Ker} f = 1$. Ainsi $\dim f(P) \neq 0$. Alors $\dim f(P) = 1$.

$f(P)$ est une droite vectorielle que nous noterons Δ.

Soit (u, v) une base de P. $f(u) \in \Delta$, $f(v) \in \Delta$ et Δ est une droite vectorielle.

Par conséquent $(f(u), f(v))$ est nécessairement liée.

Ainsi $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f(u) + \beta f(v) = 0_E$ $\underline{\underline{\text{et}}}$ $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Posons $w = \alpha u + \beta v$.

w n'est pas nul ($w = 0_E \Rightarrow \alpha u + \beta v = 0_E \overset{(u,v)\text{ libre}}{\Rightarrow} \alpha = \beta = 0$!) et

$f(w) = f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = 0_E$.

w est donc un vecteur non nul de la droite vectorielle $\mathrm{Ker} f$. Alors $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(w)$.

De plus $w = \alpha u + \beta v \in P$ car (u, v) est une base de P.

Ainsi $\mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(w) \subset P$, par conséquent $\underline{\underline{u_1 \in P}}$.

$u_1 \in P$, $u_2 \in P$ et (u_1, u_2) est libre (... vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes). Comme P est de dimension 2, (u_1, u_2) est une base de P. Ainsi $P = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Par conséquent $\underline{\underline{P = P_1}}$.

▲ <u>Remarque</u>.. Nous venons de voir que :

1°/ P_1 et P_2 sont stables par f ;

2°/ si P est un plan de E stable par f et distinct de P_2 alors $P = P_1$.

Ainsi <u>les plans de E stables par f sont exactement P_1 et P_2</u>, c'est à dire $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $\mathrm{Im} f$. ▲

d) Notons que le seul sous-espace vectoriel de dimension 0 (resp. 3) de E est $\{0_E\}$ (resp. E) et il est stable par f.

Ainsi un sous-espace vectoriel de E est soit $\{0_E\}$, soit E, soit une droite vectorielle soit un plan vectoriel.

Il résulte de ce qui précède que <u>les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont : $\{0_E\}$, D_1, D_2, P_1, P_2 et E.</u>

Rappelons que : $D_1 = \mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$, $D_2 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$, $P_1 = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3)$ et $P_2 = \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$.

EXERCICE 98

Exercice **Q1** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si $f(F) \subset F$.

a) $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\operatorname{Ker} P(f)$ et $\operatorname{Im} P(f)$ sont des sous-espaces stables par f. En déduire que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces stables par f.

b) Soit k est un réel quelconque ; montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f si et seulement si F est stable par $f - kI$, où I représente l'endomorphisme identité de E.

Dans la suite E désigne un espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini dans la base $\mathcal{E}$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $g = f - 2I$.

Q2 a) Calculer g^3.

b) Déterminer $\operatorname{Im}(g), \operatorname{Ker}(g), \operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Ker}(g), \operatorname{Im}(g^2)$ et $\operatorname{Ker}(g^2)$.

Q3 Déterminer toutes les droites vectorielles stables par f.

Q4 a) Soit P un plan tel que $\operatorname{Im}(g^2) \subset P \subset \operatorname{Ker}(g^2)$. Montrer que P est stable par g.

b) Soit F un plan stable par g et v l'endomorphisme induit par g sur F.

i) Montrer que $v^2 = 0$.

ii) Si $v = 0$, montrer que $F = \operatorname{Ker} g$.

iii) Si $v \neq 0$ et si x est un vecteur de F tel que $v(x) \neq 0$, montrer que $v(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(v) \cap \operatorname{Ker}(v)$.

c) En déduire une caractérisation des plans vectoriels de E stables par f.

Q1 a) Posons $Q = X$. Soit $u \in \operatorname{Ker} P(f)$. $P(f)(u) = 0_E$. Notons que $f(u) \in \operatorname{Ker} P(f)$.

$P(f)(f(u)) = (P(f) \circ f)(u) = (P(f) \circ Q(f))(u) = (PQ)(f)(u) = (QP)(f)(u)$.

$P(f)(f(u)) = (Q(f) \circ P(f))(u) = (f \circ P(f))(u) = f(P(f)(u)) = f(0_E) = 0_E$.

$\forall u \in \operatorname{Ker} P(f)$, $f(u) \in \operatorname{Ker} P(f)$. <u>$\operatorname{Ker} P(f)$ est stable par f.</u>

Soit $u \in \operatorname{Im} P(f)$. $\exists t \in E$, $u = P(f)(t)$.

$f(u) = f(P(f)(t)) = (f \circ P(f))(t) \underset{\uparrow}{=} (P(f) \circ f)(t) = (P(f))(f(t)) \in \operatorname{Im} P(f)$.

Voir plus haut.

$\forall u \in \operatorname{Im} P(f)$, $f(u) \in \operatorname{Im} P(f)$. <u>$\operatorname{Im} P(f)$ est stable par f.</u>

Alors $\operatorname{Ker} Q(f)$ et $\operatorname{Im} Q(f)$ sont stables par f d'après ce qui précède (faire $P = Q$!).

Donc <u>$\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par f.</u>

b) * Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Soit $x \in F$. $f(x) \in F$ et $-kx \in F$ donc $f(x) - kx \in F$. $(f - kI)(x) \in F$.

Alors $\forall x \in F$, $(f - kI)(x) \in F$. F est stable par $f - kI$.

* Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par $f - kI$.

En appliquant ce qui précède à l'endomorphisme $f - kI$ et au réel $-k$ on peut dire que F est stable par $(f - kI) - (-kI)$ donc par f.

<u>Ainsi F est un sous-espace vectoriel stable par f si et seulement si F est stable par $f - kI$ et ceci pour tout réel k.</u>

Q2) a) Soit B la matrice de g dans la base $\mathcal{E}$. $B = A - 2I_4$.

Alors $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $B^3 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{K})}$.

Alors $\underline{g^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

b) $\operatorname{Im} g = g(E) = g(\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)) = \operatorname{Vect}(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$.

$\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(0_E, -e_1, -2e_1 - e_2, -3e_1 - 2e_2) = \operatorname{Vect}(e_1, 2e_1 + e_2, 3e_1 + 2e_2)$.

$\underline{\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)}$.

$\operatorname{Im} g^2 = g(g(E)) = g(\operatorname{Im} g) = g(\operatorname{Vect}(e_1, e_2)) = \operatorname{Vect}(g(e_1), g(e_2)) = \operatorname{Vect}(0_E, -e_1)$.

$\underline{\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Vect}(e_1)}$.

(e_1, e_2) est libre

$\dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Vect}(e_1, e_2) = 2$. Alors $\dim \operatorname{Ker} g = 4 - 2 = 2$.

notons que $e_1 \in \operatorname{Ker} g$ et $g(e_2) + g(e_4) = -4e_1 - 2e_2 = 2g(e_3)$.

Alors $g(e_2) + g(e_4) - 2g(e_3) = 0_E$, $g(e_2 - 2e_3 + e_4) = 0_E$, $e_2 - 2e_3 + e_4 \in \operatorname{Ker} g$.

Alors $(e_1, e_2-2e_3+e_4)$ est une famille d'éléments de $\ker g$ de cardinal 2 clairement libre et $\dim \ker g = 2$. $(e_1, e_2-2e_3+e_4)$ est une base de $\ker g$.

$\dim \operatorname{Im} g^2 = 1$ donc $\dim \ker g^2 = 3$. $e_1 \in \ker g^2$, $e_2 \in \ker g^2$ et $2g^2(e_3) = 2e_1 = g^2(e_4)$. Ainsi $g^2(2e_3-e_4) = 0_E$. $2e_3-e_4 \in \ker g^2$.

$(e_1, e_2, 2e_3-e_4)$ est une famille de cardinal 3 d'éléments de g^2, clairement libre et $\dim \ker g^2 = 3$. Alors $(e_1, e_2, 2e_3-e_4)$ est une base de $\ker g^2$.

Soit $u = xe_1+ye_2 \in \operatorname{Im} g$.

$u \in \ker g \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ u = \alpha(e_1)+\beta(e_2-2e_3+e_4)$.

$u \in \ker g \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ xe_1+ye_2 = \alpha e_1+\beta e_2-2\beta e_3+\beta e_4$

$u \in \ker g \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ 0=-2\beta \\ 0=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}\alpha = x \\ \beta=0 \\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow y=0.$

A rédiger

Alors $\operatorname{Im} g \cap \ker g = \{xe_1+ye_2 \in E \mid y=0\} = \operatorname{Vect}(e_1)$.

$\operatorname{Im} g \cap \ker g = \operatorname{Vect}(e_1)$.

Q3 * Soit D une droite vectorielle stable par f. $\exists a \in E$, $D = \operatorname{Vect}(a)$.

Nécessairement a n'est pas nul car D est une droite.

D est stable par f donc par $g = f-2I$ d'après Q1 b)

$a \in D$ donc $g(a) \in D = \operatorname{Vect}(a)$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, g(a) = \lambda a$.

Alors a est un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ.

Or $g^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. X^3 est un polynôme annulateur de g.

Ainsi $\operatorname{Sp} g \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 0\} = \{0\}$. Alors $\lambda = 0$ et $a \in \ker g$.

Donc $D = \mathrm{Vect}(a) \subset \ker g$.

* Réciproquement supposons que D soit une droite vectorielle contenue dans $\ker g$.

$g(D) = \{0_E\} \subset D$. D est stable par $g = f - 2I$. D est stable par f.

<u>Les droites de E stables par f sont les droites contenues dans $\ker g = \mathrm{Vect}(e_1, e_2 - 2e_3 + e_4)$</u>

(Q4) a) Soit P un plan de E tel que $\mathrm{Im}\, g^2 \subset P \subset \ker g^2$.

Soit $x \in P$. Alors $x \in \ker g^2$. $g^2(x) = 0_E$. $g(x) \in \ker g$.

Mieux $g(x) \in \ker g \cap \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Im}\, g^2 \subset P$; $g(x) \in P$.

$\forall x \in P$, $g(x) \in P$. <u>P est stable par g donc par f.</u>

<u>b)</u> i) Supposons que $v^2 \neq 0_{\mathcal{L}(F)}$. $\exists x \in F$, $v^2(x) \neq 0_E$

x, $v(x)$ et $v^2(x)$ sont trois éléments de F.

Montrons que la famille $(x, v(x), v^2(x))$ est libre ce qui donnera une contradiction car $\dim F = 2$.

Notons que $v^3 = 0_{\mathcal{L}(F)}$ car $g^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$\alpha x + \beta v(x) + \gamma v^2(x) = 0_E$.

Alors $0_E = v^2(0_E) = v^2(\alpha x + \beta v(x) + \gamma v^2(x)) = \alpha v^2(x) + \beta v^3(x) + \gamma v^4(x) \overset{v^3 = v^4 = 0_{\mathcal{L}(F)}}{=} \alpha v^2(x)$.

$\alpha v^2(x) = 0_E$ et $v^2(x) \neq 0_E$. <u>$\alpha = 0$</u>. Donc $\beta v(x) + \gamma v^2(x) = 0_E$.

$0_E = v(0_E) = v(\beta v(x) + \gamma v^2(x)) = \beta v^2(x) + \gamma v^3(x) = \beta v^2(x)$.

$\beta v^2(x) = 0_E$ et $v^2(x) \neq 0_E$. <u>$\beta = 0$</u>.

Alors $\gamma v^2(x) = 0_E$ et $v^2(x) \neq 0_E$. <u>$\gamma = 0$</u>.

Donc $(x, v(x), v^2(x))$ est une famille libre de cardinal 3 de F qui est de dimension 2.

Ceci est impossible. Donc nécessairement <u>$v^2 = 0_{\mathcal{L}(F)}$</u>.

ii) Si $v = 0_{\mathcal{L}(F)}$ alors $\operatorname{Ker} v = F$. Alors $F = \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} g_1$ (g_1 restriction de g à F)

Or $\dim F = 2 = \dim \operatorname{Ker} g$. Donc $\underline{F = \operatorname{Ker} g}$.

Notons que $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g^2$ et que $\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Vect}(e_1) \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2 - 2e_3 + e_4) = \operatorname{Ker} g$.

Alors $\operatorname{Im} g^2 \subset \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g^2$. Donc $\underline{\operatorname{Im} g^2 \subset F \subset \operatorname{Ker} g^2}$.

iii) Supposons $v \neq 0_{\mathcal{L}(F)}$. Alors $\exists x \in F$, $v(x) \neq 0_E$.

$v(x) \in \operatorname{Im} v$! $v(v(x)) = v^2(x) = 0_E$; $x \in \operatorname{Ker} v$.

Donc $\underline{\underline{v(x) \in \operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} v}}$.

Notons également ici que $\operatorname{Im} g^2 \subset F \subset \operatorname{Ker} g^2$.

$\forall \hat{x} \in F$, $v^2(\hat{x}) = 0_E$; $\forall \hat{x} \in F$, $g^2(\hat{x}) = 0_E$. $\forall \hat{x} \in F$, $\hat{x} \in \operatorname{Ker} g^2$. $\underline{F \subset \operatorname{Ker} g^2}$.

Rappelons que $x \in F$, $v(x) \neq 0_E$ et $v(x) \in \operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} v$.

Alors $v(x) \neq 0_E$, $v(x) \in F$ ($v \in \mathcal{L}(F)$) et $v(x) \in \operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} g$.

Donc $v(x)$ appartient à F et est un élément non nul de la droite vectorielle $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} g$ ($\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}(e_1)$). Alors $v(x) \in F$ et $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}(v(x))$

Donc $\operatorname{Vect}(e_1) = \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} g \subset F$. Or $\operatorname{Vect}(e_1) = \operatorname{Im} g^2$. Ainsi $\underline{\operatorname{Im} g^2 \subset F}$.

Finalement $\underline{\underline{\operatorname{Im} g^2 \subset F \subset \operatorname{Ker} g^2}}$

c) Soit P un plan de E. Ce qui précède (a) + b)) montre que P est stable par g si et seulement si $\operatorname{Im} g^2 \subset P \subset \operatorname{Ker} g^2$. Comme $g = f - 2I$, Q1 b) permet de dire que P est stable par f si et seulement si $\operatorname{Im} g^2 \subset P \subset \operatorname{Ker} g^2$ ou si et seulement si $\operatorname{Vect}(e_1) \subset P \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2, 2e_3 - e_4)$.

<u>Les plans vectoriels de E stables par f sont les plans vectoriels de E contenant $\operatorname{Vect}(e_1)$ et contenus dans $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, 2e_3 - e_4)$.</u>

R,

EXERCICE 29 **N1** **Caractérisation des droites et des hyperplans stables par un endomorphisme. Énoncé 1.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

Q1. a) Soit u un vecteur propre de f. Montrer que la droite vectorielle D engendrée par u est stable par f.

b) Réciproquement soit D une droite vectorielle de E stable par f. Montrer qu'elle engendrée par un vecteur propre de f.

On se propose maintenant de caractériser les hyperplans de E stables par f.

On rappelle que deux hyperplans sont égaux si et seulement si leurs équations dans une même base sont proportionnelles.

Q2. A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

Soit H un hyperplan de E d'équation $a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

On pose $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $W = {}^tAV = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On pose encore $H' = \{x_1\,e_1 + x_2\,e_2 + \cdots + x_n\,e_n \in E \mid b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + \cdots + b_n\,x_n = 0\}$

a) Préciser la dimension de H' (deux cas).

b) Montrer qu'un élément u de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ appartient à H si et seulement si ${}^tXV = 0$. Donner un résultat analogue pour H'.

c) On suppose que V est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre λ. Montrer que H est stable par f (on pourra utiliser b))

d) Réciproquement on suppose que H est stable par f. Montrer alors que $H \subset H'$. En déduire, en faisant deux cas que V est un vecteur propre de ${}^tA$.

Q3. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les sous-espaces de E stables par f.

Thème abordé dans oral ESCP 2003 2.3 (avec $n = 3$), ESCP MI 2001.

Q1 a) u est un vecteur propre de f. Donc u est non nul et il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda\,u$.

Soit D la droite vectorielle de E engendrée par u. $f(D) = f\big(\text{Vect}(u)\big) = \text{Vect}\,\big(f(u)\big) = \text{Vect}(\lambda\,u) \subset \text{Vect}(u) = D$.

Ainsi D est stable par f.

b) Il existe un vecteur non nul u qui engendre D. Comme D est stable par f, $f(u)$ appartient à D ; ainsi il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda\,u$.

u étant non nul, u est vecteur propre de f. Donc D est engendrée par un vecteur propre de f.

Une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

Q2 a) Si $(b_1, b_2, \dots, b_n) \neq 0_{K^n}$, H' est un hyperplan donc H' est de dimension $n - 1$.

Si $(b_1, b_2, \dots, b_n) = 0_{K^n}$, H' est égal à E et H' est de dimension n.

R.

$\boxed{H' \text{ est de dimension } n-1 \text{ si } (b_1, b_2, \ldots, b_n) \neq 0_{K^n} \text{ et de dimension } n \text{ sinon}}$

b) Soit u un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$u \in H \Longleftrightarrow a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0 \Longleftrightarrow (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow {}^tXV = 0.$$

Donc u appartient à H si et seulement si ${}^tXV = 0$.

De même u appartient à H' si et seulement si ${}^tXW = 0$.

$\boxed{\text{Un élément } u \text{ de } E \text{ de matrice } X \text{ dans } \mathcal{B} \text{ appartient à } H \text{ (resp. } H'\text{) si et seulement si } {}^tXV = 0 \text{ (resp. } {}^tXW = 0\text{).}}$

c) Supposons que $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre λ. V n'est pas nul et ${}^tAV = \lambda V$.

Soit u un élément de H de matrice X dans la base $\mathcal{B}$.

${}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ car u appartient à H. Alors ${}^t(AX)V = {}^tX({}^tAV) = {}^tX(\lambda\, V) = \lambda {}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Ainsi $f(u)$ qui a pour matrice AX dans la base $\mathcal{B}$ appartient à H.

H est stable par f.

d) H est stable par f. Soit u un élément de H de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. ${}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Comme $f(u)$ appartient à H et que la matrice de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$ est AX : ${}^t(AX)V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ donc ${}^tX({}^tAV) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Alors ${}^tXW = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et ainsi u est dans H'.

Ainsi H est contenu dans $H' = \{x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_n\, e_n \in E \mid b_1\, x_1 + b_1\, x_1 + \cdots + b_1\, x_1 = 0\}$.

Premier cas W est nul.

On a ${}^tAV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et V non nul donc V est un vecteur propre de ${}^tA$ (associé à la valeur propre 0).

Deuxième cas W n'est pas nul.

Alors $\dim H' = n - 1 = \dim H$. Comme $H \subset H' : H = H'$.

Alors $a_1\, x_1 + a_1\, x_1 + \cdots + a_1\, x_1 = 0$ et $b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \cdots + b_n\, x_n = 0$ sont deux équations de l'hyperplan H dans la base $\mathcal{B}$.

Ces équations sont donc proportionnelles. Autrement dit il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ (et même de $\mathbb{K}^*$) tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ b_k = \lambda\, a_k$.

Alors $W = \lambda\, V$. Ainsi V n'est pas nul (H est un hyperplan) et ${}^tAV = \lambda\, V$. V est encore est un vecteur propre de ${}^tA$ (associé à la valeur propre λ).

Un hyperplan de E d'équation $a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Notons qu'un sous-espace vectoriel de E est de dimension 0, 1, 2 ou 3.

$\{0_E\}$ est le seul sous-espaces vectoriel de E de dimension 0 et il est stable par f.

E est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 3 et il est stable par f.

Les sous-espaces vectoriels de dimension 1 (resp. 2) de E sont les droites (resp. hyperplans ou plans) de E.

Pour trouver les droites (resp. hyperplans ou plans) de E stables par f nous allons chercher les sous-espaces propres de f (resp. ${}^tA$).

Soit λ un réel et $u = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ un élément de E.

$$u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \iff (f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)(x) = 0_e \iff (A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1-\lambda)\,x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)\,y + z = 0 \\ -x + y + (1-\lambda)\,z = 0 \end{cases}.$$

En faisant $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$ il vient $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} (1-\lambda)\,x + y + z = 0 \\ \lambda\,(x - y) = 0 \\ (2-\lambda)\,(y + z) = 0 \end{cases}$.

Si $\lambda = 0$, $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$.

Alors 0 est valeur propre de f et SEP $(f, 0) = \operatorname{Vect}(e_2 - e_3)$.

Si $\lambda = 2$, $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$.

Alors 2 est valeur propre de f et SEP $(f, 2) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2)$.

Supposons que $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 2$. Alors $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} x = y \\ z = -y \\ (1-\lambda)\,x = 0 \end{cases}$.

Si $\lambda \neq 1$ alors $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \iff x = y = z = 0$ et λ n'est pas valeur propre de f.

Si $\lambda = 1$ alors $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \iff x = y$ et $z = -y$.

Alors 1 est valeur propre de f et SEP $(f, 1) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$.

Ainsi $\operatorname{Sp} f = \{0, 1, 2\}$, SEP $(f, 0)\,\operatorname{Vect}(e_2 - e_3)$, SEP $(f, 1) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$ et SEP $(f, 2) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2)$.

Rappelons que les droites vectorielles de E stables par f sont les droites vectorielles de E engendrées par un vecteur propre de f. Notons que les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles ; alors deux vecteurs propres associés à la même valeur propre engendrent la même droite vectorielle.

Alors les droites vectorielles de E stables par f sont les trois sous-espaces propres de f.

$\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} f = \{0, 1, 2\}$. Montrons que A et ${}^tA$ ont mêmes valeurs propres. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in \operatorname{Sp} A \iff A - \lambda\,I_3$ non inversible $\iff {}^t(A - \lambda\,I_3)$ non inversible $\iff {}^tA - \lambda\,I_3$ non inversible $\iff \lambda \in \operatorname{Sp} {}^tA$.

Ainsi $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} {}^tA$ donc $\operatorname{Sp} {}^tA = \{0, 1, 2\}$. Cherchons les sous-espaces propres de ${}^tA$.

R.

Notons que ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{SEP }({}^tA, 0) \iff {}^tAX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Alors SEP $({}^tA, 0) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

$$X \in \text{SEP }({}^tA, 1) \iff {}^tAX = X \iff \begin{cases} x + y - z = x \\ x + y + z = y \\ x + y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases}.$$

Alors SEP $({}^tA, 1) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$

$$X \in \text{SEP }({}^tA, 2) \iff {}^tAX = 2X \iff \begin{cases} x + y - z = 2x \\ x + y + z = 2y \\ x + y + z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y - z = x \\ y - z = x \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}.$$

Alors SEP $({}^tA, 2) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Ainsi $\text{Sp}\,{}^tA = \{0, 1, 2\}$, SEP $({}^tA, 0) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$, SEP $({}^tA, 1) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$ et SEP $({}^tA, 2) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

Notons que les sous-espaces propres de ${}^tA$ sont des droites vectorielles.

Notons également que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont deux éléments colinéaires de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, les hyperplans de E d'équations respectives $a\,x + b\,y + c\,z = 0$ et $a'\,x + b'\,y + c'\,z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ sont identiques.

Finalement les hyperplans de E stables par f sont les hyperplans de E d'équations respectives $x - y = 0$, $x - y - z = 0$ et $y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont :

$\{0_E\}$;

les droites vectorielles $\text{Vect}(e_2 - e_3)$, $\text{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$ et $\text{Vect}(e_1 + e_2)$;

les hyperplans ou les plans d'équations respectives $x - y = 0$, $x - y - z = 0$ et $y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$;

E.

EXERCICE 30 **N2** **Caractérisation des droites et des hyperplans stables par un endomorphisme. Énoncé 2.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer qu'une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

Q2 A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

Montrer qu'un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^t A$.

Thème abordé dans oral ESCP 2003 2.3 (avec $n = 3$), ESCP MI 2001.

Q1 • Soit D une droite vectorielle stable par f. Il existe un vecteur non nul u qui engendre D. Comme D est stable par f, $f(u)$ appartient à D ; ainsi il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda\, u$.

u étant non nul, u est vecteur propre de f. Donc D est engendrée par un vecteur propre de f.

• Réciproquement soit D une droite vectorielle de E engendrée par un vecteur propre u de f.

Il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda\, u$.

$f(D) = f\big(\mathrm{Vect}(u)\big) = \mathrm{Vect}\,\big(f(u)\big) = \mathrm{Vect}(\lambda\, u) \subset \mathrm{Vect}(u) = D$. Ainsi D est stable par f.

$\boxed{\text{Une droite vectorielle de } E \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de } f.}$

Q2 Soit H un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Posons $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Notons que V n'est pas nul car H est un hyperplan.

Observons encore que, comme $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ est une équation de H dans $\mathcal{B}$, un vecteur u de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ appartient à H si et seulement si ${}^t X V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

• Supposons que H est stable par f. Soit u un élément de H de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. ${}^t X V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Comme $f(u)$ appartient à H et que la matrice de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$ est AX : ${}^t(AX)V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ donc ${}^t X({}^t A V) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Posons $W = {}^t A V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. ${}^t X({}^t A V) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ donne alors $b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \cdots + b_n\, x_n = 0$.

Ainsi H est contenu dans $H' = \{x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_n\, e_n \in E \mid b_1\, x_1 + b_1\, x_1 + \cdots + b_1\, x_1 = 0\}$.

Si W est nul on a ${}^t A V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et V non nul donc V est un vecteur propre de ${}^t A$ (associé à la valeur propre 0).

Supposons W non nul. Alors H' est un hyperplan de E qui contient l'hyperplan H. Ainsi $H = H'$ car H et H' ont la même dimension finie.

Alors $a_1\,x_1 + a_1\,x_1 + \cdots + a_1\,x_1 = 0$ et $b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + \cdots + b_n\,x_n = 0$ sont deux équations de l'hyperplan H dans la base $\mathcal{B}$.

Ces équations sont donc proportionnelles. Autrement dit il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ (et même de $\mathbb{K}^*$) tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ b_k = \lambda\, a_k$.

Alors $W = \lambda\, V$. Ainsi V n'est pas nul et ${}^tAV = \lambda\, V$. V est encore est un vecteur propre de ${}^tA$ (associé à la valeur propre λ).

• Réciproquement supposons que $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$. Il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que ${}^tAV = \lambda V$.

Soit u un élément de H de matrice X dans la base $\mathcal{B}$.

${}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Alors ${}^t(AX)V = {}^tX({}^tAV) = {}^tX(\lambda\, V) = \lambda{}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Ainsi $f(u)$ qui a pour matrice AX dans la base $\mathcal{B}$ appartient à H.

H est stable par f.

> Un hyperplan de E d'équation $a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.