EXERCICE 31 **N1$^+$** **Sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme diagonalisable.**

Énoncé 1.

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

f est un endomorphisme diagonalisable de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f.

Pour tout élément k de $[\![1,p]\!]$ on pose $F_k = \text{SEP}\ (f, \lambda_k)$.

Q1. Montrer que si G_1, G_2, ..., G_p sont p sous-espaces vectoriels respectivement de F_1, F_2, ..., F_p alors la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe et stable par f.

Q2. Soit G un sous espace vectoriel de E stable par f. On pose pour tout élément k de $[\![1,p]\!]$, $G_k = G \cap F_k$.

On se propose de montrer que $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, si x_1, x_2, ..., x_k sont k éléments appartenant respectivement à F_1, F_2, ..., F_k et tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \in G$ alors ces éléments appartiennent également à G.

b) Achever la démonstration du résultat proposé et conclure.

Q3. Soit G un sous-espace vectoriel de E stable par f et non réduit à $\{0_E\}$. Montrer que la restriction g de f à G est un endomorphisme diagonalisable de G (il faut entendre que g est l'application de G dans G définie par $\forall x \in G,\ g(x) = f(x)$).

Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.22, ESCP MI 2001.

Q1 Montrons que la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ un élément de $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_p$ tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 0_E$.

Comme $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ appartient à $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ et que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe :

$x_1 = x_2 = \cdots x_p = 0_E$. Ceci achève de prouver que la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe.

Montrons qu'elle est stable par f.

Soit x un élément de $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$. $\exists (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_p,\ x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$.

$f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_p) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p$ car pour tout élément i de $[\![1,p]\!]$, $G_i \subset F_i$ et $F_i = \text{SEP}\ (f, \lambda_i)$.

Or $\forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i \in G_i$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i x_i \in G_i$ et ainsi $f(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p \in G_1 + G_2 + \cdots + G_p$.

Si G_1, G_2, ..., G_p sont p sous-espaces vectoriels respectivement de F_1, F_2, ..., F_p alors la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe et stable par f.

Q2 a) Montrons par récurrence que, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, si x_1, x_2, ..., x_k sont k éléments appartenant respectivement à F_1, F_2, ..., F_k et tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \in G$ alors ces éléments appartiennent également à G.

C'est clair pour $k = 1$. Supposons la propriété vraie pour un élément k de $[\![1,p-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

Soient x_1, x_2, ..., x_{k+1} des éléments de E appartenant respectivement à F_1, F_2, ..., F_{k+1} et tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}$ soit dans G. Montrons que ces $k+1$ éléments sont dans G.

Posons $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}$. G est stable par f donc $f(x)$ appartient à G.

$f(x) = f(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}$.

x et $f(x)$ sont dans G donc $\lambda_{k+1} x - f(x)$ est dans G.

Donc $\lambda_{k+1}\, x - f(x) = (\lambda_{k+1} - \lambda_1)\, x_1 + (\lambda_{k+1} - \lambda_2)\, x_2 + \cdots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k)\, x_k \in G$ et $\forall i \in [\![1,k]\!],\ (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\, x_i \in F_i$.

L'hypothèse de récurrence montre alors que $\forall i \in [\![1,k]\!],\ (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\, x_i \in G$.

Comme $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \lambda_{k+1} - \lambda_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1,k]\!],\ x_i \in G$.

Alors $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ et $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}$ appartiennent à G. Par différence x_{k+1} appartient à G.

Alors $\forall i \in [\![1,k+1]\!],\ x_i \in G$ et la récurrence s'achève.

b) Montrons que $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

Pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, $G_k = G \cap F_k$ est un sous-espace vectoriel de G et de F_k et $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe donc la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe et contenue dans G.

Montons l'inclusion inverse. Soit x un élément de G.

Comme $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, $\exists!(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$, $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$.

$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ appartient à G et pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, $x_i \in F_i$. La propriété de a) appliquée pour $k = p$ montre alors que $\forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i \in G$.

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i \in G \cap F_i = G_i$. Donc $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p \in G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

Par conséquent $G \subset G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$ et finalement : $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

G est donc la somme (directe) de p sous-espaces respectivement contenus dans F_1, F_2, ..., F_p.

> Un sous-espace G de E est stable par f si et seulement si il existe p sous-espace vectoriels G_1, G_2, ..., G_p respectivement de F_1, F_2, ..., F_p tels que $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

Q3 G est stable par f et non réduite à $\{0_E\}$. g est une application de G dans G et $\forall x \in G,\ g(x) = f(x)$.

Comme f est linéaire, g est linéaire. Finalement g est un endomorphisme de G. Montrons que g est diagonalisable.

Pour cela nous allons construire une base de G constituée de vecteurs propres de g.

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!],\ G_i = G \cap F_i$. $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$ d'après Q2.

Posons $I = \big\{i \in [\![1,p]\!] \mid G_i \neq \{0_E\}\big\}$. I n'est pas vide car G n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p = \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$. Pour tout i dans I considérons une base $\mathcal{B}_i$ de G_i (qui n'est pas réduit au vecteur nul...).

Comme $G = \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$, $\mathcal{B} = "\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{B}_i"$ est une base de G. Or pour tout i dans I les éléments de $\mathcal{B}_i$ sont des vecteurs propres de f (associés à la valeur propre λ_i) donc de g.

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de G constituée de vecteurs propres de g. Alors g est diagonalisable.

> La restriction de f à un sous-espace vectoriel de E stable par f et non réduit à $\{0_E\}$ est diagonalisable.

Exercice f est un endomorphisme diagonalisable de E (dim $E = n \in \mathbb{N}^*$).
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres de f et $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont les p sous-espaces propres associés.
Soit G un sous-espace de E.
Montrer que G est stable par f si et seulement si $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_p$ où $G_1, G_2, \dots, G_p$ sont p sous-espaces de $F_1, F_2, \dots, F_p$.

EX 18

C.S. Supposons que $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_p$ où pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, G_i est un sous-espace vectoriel de F_i. Montrons que G est stable par f.

Soit $x \in G$. $\exists (x_1, \dots, x_p) \in G_1 \times G_2 \times \dots \times G_p$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

$f(x) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$. Or $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i x_i \in G_i$ donc $f(x) \in G_1 \oplus \dots \oplus G_p = G$.

Ainsi $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_p$ est stable par f.

C.N. Soit G un sous-espace de E stable par f.
Posons $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $G_i = G \cap F_i$. Montrons que $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_p$.
$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $G \cap F_i \subset G$; $\sum_{i=1}^{p} G_i \subset G$.

$F_1, F_2, \dots, F_p$ étant en somme directe, $G \cap F_1, G \cap F_2, \dots, G \cap F_p$ le sont également.

Ainsi $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_p$ est contenu dans G. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $x \in G$. $\exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ car $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Si l'on montre que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $x_i \in G$; nous aurons alors $x \in \bigoplus_{i=1}^{p} G \cap F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} G_i$.

Fixons i dans $[\![1,p]\!]$ et posons $Q = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (X - \lambda_k)$ (si $p=1$, $Q=1$!!)

$Q = \sum_{j=0}^{p-1} q_j X^j$. $Q(f)(x) = \sum_{j=0}^{p-1} q_j f^j(x)$.

$x \in G$ et G est stable par f donc $\forall j \in \mathbb{N}$, $f^j(x) \in G$.

Ainsi $\varphi(f)(x) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j f^j(x) \in G$.

De plus $\varphi(f)(x) = \varphi(f)\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \varphi(f)(x_k)$.

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\varphi(f)(x_k) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j f^j(x_k) \underset{x_k \in F_k}{=} \sum_{j=0}^{p-1} a_j \lambda_k^j x_k = \varphi(\lambda_k) x_k$.

Observons que $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\varphi(\lambda_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0 & \text{si } k = i \end{cases}$

Alors $\varphi(f)(x) = \sum_{k=1}^{p} \varphi(f)(x_k) = \sum_{k=1}^{p} \varphi(\lambda_k) x_k = \varphi(\lambda_i) x_i$.

Ainsi $x_i = \dfrac{1}{\varphi(\lambda_i)} \varphi(f)(x) \in G$ car $\varphi(f)(x) \in G$.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $x_i \in G \cap F_i = G_i$; $x \in \bigoplus_{i=1}^{p} G_i$

ceci achève de prouver que $G = \bigoplus_{i=1}^{p} G_i$.

R.

EXERCICE 35 **N2** **Comparaison des spectres de AB et BA.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Q1. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.

Q2. Montrer que si $n = p$: $\mathrm{Sp}\, AB = \mathrm{Sp}\, BA$. Et si $n \neq p$?

▲ *On a des résultats analogues pour les applications linéaires et les endomorphismes.*

Thème abordé dans oral ESCP 2000 2-4 (exercice intégralement repris en 2010 (2.1)). Thème abordé en termes d'applications linéaires dans une QSP ESCP 2007.

Notons que $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Q1 * Soit λ une valeur propre non nulle de AB. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $ABX = \lambda X$.

Alors $BABX = \lambda BX$; $BA(BX) = \lambda BX$.

Supposons $BX = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})}$. Alors $\lambda X = ABX = A0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Comme λ n'est pas nul : $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ ce qui n'est pas.

Alors $BX \neq 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})}$ et $BA(BX) = \lambda BX$ donc λ est valeur propre de BA.

* Soit λ une valeur propre non nulle de BA. Montrons que λ est valeur propre de AB

<u>Version 1.</u>- Cela résulte de ce qui précède en permutant n et p et B et A.

<u>Version 2.</u>- Soit λ une valeur propre non nulle de BA.

$\exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})}$ et $BAX = \lambda X$. Alors $ABAX = \lambda AX$.

Supposons que $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Alors $\lambda X = BAX = B0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})}$. Comme λ n'est pas nul : $X = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})}$ ce qui n'est pas.

Alors $AB(AX) = \lambda AX$ et $AX \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ donc λ est valeur propre de AB.

<u>AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.</u>

Q2 Supposons que $n = p$. Alors A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$!

Soit λ une valeur propre de AB.

Si λ n'est pas nulle, λ est valeur propre de BA. Supposons que λ est nul.

Supposons que λ n'est pas valeur propre de BA. $0 \notin \mathrm{Sp}(BA)$. Ainsi BA est inversible.

$\exists C \in M_p(\mathbb{R})$, $BAC = CBA = I_n$. Alors $B(AC) = I_n$ et $(CB)A = I_n$.
La première égalité montre que B est inversible et la seconde que A est inversible.
Alors AB est inversible comme produit de deux matrices inversibles.
Donc 0 n'est pas valeur propre de AB. Cela contredit l'hypothèse initiale.
Par conséquent BA n'est pas inversible et $0 \in Sp(BA)$. Ici encore $\lambda \in Sp(BA)$.
Ceci achève de montrer que $Sp(AB) \subset Sp(BA)$.
En échangeant A et B on a $Sp(BA) \subset Sp(AB)$.
Finalement $\underline{\underline{Sp(AB) = Sp(BA)}}$.

Le résultat ne vaut plus avec $n \neq p$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

AB et BA sont deux matrices diagonales.
$Sp(AB) = \{1\}$ et $Sp(BA) = \{1, 0\}$. $Sp(AB) \neq Sp(BA)$.

On peut généraliser cet exemple de la manière suivante. Supposons $n < p$ (ce qui n'est pas restrictif). Soit $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ la base canonique de $M_{p,1}(K)$ et $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(K)$.

Soit A la matrice de $M_{n,p}(K)$ dont les n premières colonnes sont, dans l'ordre $F_1, F_2, \dots, F_n$ et les suivantes sont égales à $O_{M_{n,1}(K)}$.

Soit B la matrice de $M_{p,n}(K)$ dont les n colonnes sont, dans l'ordre, $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, AE_j (resp. BAE_j) est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A (resp. BA).
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, BF_j (resp. ABF_j) est la $j^{\text{ème}}$ colonne de B (resp. AB).

$\forall j \in [\![1, p]\!]$, $BAE_j = \begin{cases} BF_j & \text{si } j \leq n \\ BO_{M_{n,1}(K)} & \text{sinon} \end{cases}$; $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $BAE_j = \begin{cases} E_j & \text{si } j \leq n \\ O_{M_{n,1}(K)} & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors BA est la matrice diagonale de $M_p(K)$ dont les n premiers éléments diagonaux valent 1 et les autres 0.

$Sp(BA) = \{1, 0\}$ car $n < p$.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $ABF_j = AE_j = F_j$. Ainsi $AB = I_n$ donc $Sp(AB) = \{1\}$. Alors $Sp(AB) \neq Sp(BA)$.

R..

1

EXERCICE 34

Exercice **Autour de la réduction de $f \circ g$ et $g \circ f$**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. f et g sont deux automorphismes de E.

On rappelle qu'un automorphisme "conserve la dimension".

Q1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Q2. Soit λ une valeur propre de $f \circ g$ et $g \circ f$. On pose $F_\lambda = \mathrm{Ker}(f \circ g - \lambda Id_E)$ et $G_\lambda = \mathrm{Ker}(g \circ f - \lambda Id_E)$.

Montrer que : $g(F_\lambda) \subset G_\lambda$ et $f(G_\lambda) \subset F_\lambda$. En déduire que F_λ et G_λ ont même dimension.

Q3. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont simultanément diagonalisables. **Q4. Cela vaut-il pour des endomorphismes**

Q1 Soit $\lambda \in Sp\, f\circ g$. $\exists x \in E$, $(f\circ g)(x) = \lambda x$ et $x \neq 0_E$.

Alors $g((f\circ g)(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

Donc $(g\circ f)(g(x)) = \lambda g(x)$.

g est un automorphisme de E.

Supposons $g(x) = 0_E$. Alors $x \in \mathrm{Ker}\, g = \{0_E\}$. Donc $x = 0_E$!

Ainsi $(g\circ f)(g(x)) = \lambda g(x)$ et $g(x) \neq 0_E$. $\lambda \in Sp(g\circ f)$.

Donc $Sp(f\circ g) \subset Sp(g\circ f)$. En échangeant les rôles de f et g

il vient $Sp(g\circ f) \subset Sp(f\circ g)$.

Finalement $\underline{\underline{Sp\, f\circ g = Sp\, g\circ f}}$.

Q2 Soit $x \in F_\lambda = \mathrm{Ker}(f\circ g - \lambda Id_E) = SEP(f\circ g, \lambda)$.

$(f\circ g)(x) = \lambda x$; $g(f\circ g(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$; $(g\circ f)(g(x)) = \lambda g(x)$.

Alors $g(x) \in \mathrm{Ker}(g\circ f - \lambda Id_E) = G_\lambda$.

$\forall x \in F_\lambda$, $g(x) \in G_\lambda$. $\underline{\underline{g(F_\lambda) \subset G_\lambda}}$.

De même $\underline{\underline{f(G_\lambda) \subset F_\lambda}}$.

Ainsi $\underline{\dim g(F_\lambda) \leq \dim G_\lambda}$ et $\underline{\dim f(G_\lambda) \leq \dim F_\lambda}$.

Utilisons le caractère injectif de g pour montrer que $\dim g(F_\lambda) = \dim F_\lambda$.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base de F_λ ($F_\lambda \neq \{0_E\}$ car $\lambda \in Sp\, f\circ g$).

$g(F_\lambda) = g(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = \mathrm{Vect}(g(u_1), \dots, g(u_p))$. $(g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_p))$ est une famille génératrice de $g(F_\lambda)$. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, tel que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k g(u_k) = 0_E$. $g(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k) = 0_E$.

Alors $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k \in \mathrm{Ker}\, g = \{0_E\}$. $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = 0_E$ et $(u_1, \dots, u_p)$ est libre

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

Ainsi $(g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_p))$ est une famille libre et génératrice de $g(F_\lambda)$.

Son cardinal étant p : $\dim g(F_\lambda) = p = \dim F_\lambda$

$\uparrow$ $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de F_λ.

Donc $\dim F_\lambda = \dim g(F_\lambda) \leqslant \dim G_\lambda$.

Ainsi $\dim F_\lambda \leqslant \dim G_\lambda$. De même $\dim G_\lambda \leqslant \dim F_\lambda$. Plus de doute.

$\forall \lambda \in Sp(f\circ g) = Sp(g\circ f)$, $\dim F_\lambda = \dim G_\lambda$ ou $\dim SEP(f\circ g, \lambda) = \dim SEP(g\circ f, \lambda)$

(Q3) $f\circ g$ diagonalisable $\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(f\circ g)} \dim SEP(f\circ g, \lambda) = \dim E \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(f\circ g)} \dim F_\lambda = \dim E$

D'après ce qui précède on a alors :

$f\circ g$ diagonalisable $\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(g\circ f)} \dim G_\lambda = \dim E \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(g\circ f)} \dim SEP(g\circ f, \lambda) = \dim E$

$f\circ g$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ $g\circ f$ diagonalisable.

Exercice $\dim_{\mathbb{K}} E = n$. $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $Sp\, f\circ g = Sp\, g\circ f$ mais que le résultat de Q3 ne vaut plus.

$\longrightarrow$

Q4) Supposons que $n \geq 2$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Considérons les endomorphismes f et g de E définis par : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \begin{cases} e_1 & \text{si } i = 1 \\ 0_E & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g(e_i) = \begin{cases} e_2 & \text{si } i = 1 \\ 0_E & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$.

$(f \circ g)(e_1) = f(g(e_1)) = f(e_2) = 0_E$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $(f \circ g)(e_i) = f(g(e_i)) = f(0_E) = 0_E$.

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(f \circ g)(e_i) = 0_E$. Alors $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc <u>$f \circ g$ est diagonalisable</u>.

$g(f(e_1)) = g(e_1) = e_2$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $g(f(e_i)) = g(0_E) = 0_E$.

Alors $M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \vdots \\ 0 & & (0) & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. $M_{\mathcal{B}}(g \circ f)$ est triangulaire supérieure et les éléments de sa diagonale sont nuls. Alors $Sp(g \circ f) = Sp(M_{\mathcal{B}}(g \circ f)) = \{0\}$.

Supposons $g \circ f$ diagonalisable. Alors $E = SEP(g \circ f, 0) = Ker(g \circ f)$. Ainsi $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ceci contredit $(g \circ f)(e_1) = e_2$. Alors <u>$g \circ f$ n'est pas diagonalisable</u>.

Cependant :

<u>**Exercice**</u> .. Montrer que si f et g sont deux endomorphismes de E

1°.. $Sp(f \circ g) = Sp(g \circ f)$

2°) Si λ est une valeur propre non nulle de $f \circ g$ et de $g \circ f$:

$\dim SEP(f \circ g, \lambda) = \dim SEP(g \circ f, \lambda)$.

3°) Si $\dim Ker(f \circ g) = \dim Ker(g \circ f)$:

$f \circ g$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ $g \circ f$ diagonalisable.

R.

EXERCICE 35 **N1** **CNS pour que $f \circ g = g \circ f$ lorsque f un endomorphisme, d'un espace vectoriel de dimension n, ayant n valeur propres deux à deux distincts.**

E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E.

On suppose que f a n valeurs propres distinctes. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Q1. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g. En déduire que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de g.

Q2. Montrer que : $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g se diagonalisent dans la même base.

Contenu ou presque dans oral ESCP 1998 2-29, 1999 2-18, 2012 2.7. On trouve cela dans ESCP 1996 1.2, 2004 2.17 à l'ordre 2

▲ *On a des résultats analogues pour les matrices.*

Q1 Soit λ une valeur propre de f. Soit $x \in SEP(f,\lambda)$.

$f(x)=\lambda x$. Alors $f(g(x))=(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\lambda x)=\lambda g(x)$. $f(g(x))=\lambda g(x)$.

Ainsi $g(x) \in SEP(f,\lambda)$.

$\forall x \in SEP(f,\lambda)$, $g(x) \in SEP(f,\lambda)$. $SEP(f,\lambda)$ est stable par g et ceci pour toute valeur propre de f.

<u>les sous-espaces propres de f sont stables par g</u> ... et les sous-espaces propres de g sont stables par f

f admet n valeurs propres deux à deux distinctes et E est de dimension n. Alors les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. e_i est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i.

On a donc $e_i \neq 0_E$, $e_i \in SEP(f,\lambda_i)$ et $\dim SEP(f,\lambda_i)=1$. Alors $SEP(f,\lambda_i)=\mathrm{Vect}(e_i)$.

De plus $SEP(f,\lambda_i)$ est stable par g donc $g(e_i) \in SEP(f,\lambda_i)$. $g(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_i)$.

Alors $\exists \mu_i \in \mathbb{K}$, $g(e_i)=\mu_i e_i$. Comme e_i n'est pas nul, e_i est un vecteur propre de g.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, e_i est un vecteur propre de g.

Ainsi <u>~~les~~ vecteur de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de g.</u>

<u>Remarque</u>.. $\mathcal{B}$ est donc une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g. $M_{\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}}(g)$ sont deux matrices diagonales.

Q2 Ce qui précède à montré que si $f\circ g = g\circ f$, $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres pour f et g.

R.

Montrons la réciproque. Supposons que $\hat{\mathcal{B}}$ est une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g. Posons $D = \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(f)$ et $\Delta = \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(g)$.

D et Δ sont deux matrices diagonales. Donc $D\Delta = \Delta D$.

$\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(f \circ g) = \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(f)\, \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(g) = D\Delta = \Delta D = \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(g)\, \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(f) = \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(g \circ f)$.

Donc $\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(f \circ g) = \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(g \circ f)$. Alors $f \circ g = g \circ f$.

<u>$f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g</u>.

ou <u>$f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g se diagonalisent dans la même base</u>.

<u>Remarque</u>.. Retenons que si $f \circ g = g \circ f$ toute base de E constituée de vecteurs propres de f est une base de E constituée de vecteurs propres de g ... car f admet n valeurs propres deux à deux distinctes et que $\dim E = n$.

R.

EXERCICE 36 **N1** **Ensemble des matrices qui commutent avec une matrice diagonale à éléments diagonaux deux à deux distincts.**

D est matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à éléments diagonaux deux à deux distincts.

Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pourra donner deux preuves...

---

* Clairement si Δ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, Δ commute avec toute matrice diagonale donc avec D.

* Réciproquement soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec D. Montrons que M est diagonale.

Posons $D=(d_{i,j})$ et $M=(m_{i,j})$. $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]$, $d_{i,j}=0$ si $i\neq j$.

<u>**Version 1**</u> Posons $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_j=d_{j,j}$. $\mathrm{Sp}\, D=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$.

Comme $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ sont deux à deux distincts : $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $SEP(D,\lambda_j)$ est de dimension 1.

Soit $(E_1,E_2,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $DE_j=\lambda_j E_j$ et $E_j\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Alors pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, E_j est un élément non nul de $SEP(D,\lambda_j)$ qui est de dimension 1.

Ainsi $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $SEP(D,\lambda_j)=\mathrm{Vect}(E_j)$.

$MD=DM$ donc $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_j ME_j=M(\lambda_j E_j)=MDE_j=DME_j$.

$\forall j\in[\![1,n]\!]$, $DME_j=\lambda_j ME_j$. Alors $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $ME_j\in SEP(D,\lambda_j)=\mathrm{Vect}(E_j)$.

Ainsi $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\exists \mu_j\in\mathbb{K}$, $ME_j=\mu_j E_j$. Ce qui signifie que M est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)$. Donc M est une matrice diagonale.

<u>**Version 2**</u>.. $MD=DM$ donc les matrices $\left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}d_{k,j}\right)$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}m_{k,j}\right)$ sont égales.

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Notons que $d_{i,i}\neq d_{j,j}$.

$\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}d_{k,j}=\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}m_{k,j}$, $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}d_{k,j}=m_{i,j}d_{j,j}$ et $\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}m_{k,j}=d_{i,i}m_{i,j}$.

D est diagonale

Alors $m_{i,j}\,d_{j,j}=d_{i,i}\,m_{i,j}$.

Donc $m_{i,j}(d_{j,j}-d_{i,i})=0$ et $d_{j,j}-d_{i,i}\neq 0$. Alors $m_{i,j}=0$.

Par conséquent $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j\Rightarrow m_{i,j}=0$. M est diagonale.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

R.

EXERCICE 37

Exercice Soient A, B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que $AB = BA$.

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A admet n valeurs propres deux à deux distinctes donc A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $SEP(A, \alpha_i) = \text{Vect}(X_i)$. De plus $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $ABX_i = BAX_i = B(\alpha_i X_i) = \alpha_i BX_i$ donc $BX_i \in SEP(A, \alpha_i)$.

Alors $BX_i \in \text{Vect}(X_i)$. $\exists \beta_i \in \mathbb{R}$, $BX_i = \beta_i X_i$.

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est aussi une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B respectivement associés aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

$Q^{-1}AQ = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $Q^{-1}BQ = \text{Diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Posons $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $\Delta = \text{Diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Notons que $A = QDQ^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$. De plus :

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A) = P(QDQ^{-1}) = Q\,P(D)\,Q^{-1}$

Ainsi si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $P(D) = \Delta$: $P(A) = Q\,P(D)\,Q^{-1} = Q\Delta Q^{-1} = B$.

Montrons alors l'existence de P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(D) = \Delta$.

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(D) = \Delta \iff P(\text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = \text{Diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(D) = \Delta \iff \text{Diag}(P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n)) = \text{Diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(D) = \Delta \iff \forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\alpha_i) = \beta_i$.

L'interpolation de Lagrange n'est pas loin.

Montrons en fait que : $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(\alpha_i) = \beta_i$.

Posons $\forall H \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(H) = (H(\alpha_1), H(\alpha_2), \dots, H(\alpha_n))$.

φ est clairement une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Montrons que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$

Soit $H \in \operatorname{Ker} \varphi$. $H(\alpha_1) = H(\alpha_2) = \dots = H(\alpha_n) = 0$.

H est donc un polynôme de degré au plus $n-1$ ayant au moins n zéros deux à deux distincts donc H est le polynôme nul.

$\operatorname{Ker} H = \{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$. H est une application linéaire injective.

De plus $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbb{R}^n < +\infty$.

Alors H est une application linéaire bijective.

Comme $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$: $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(P) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

$\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n)) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Donc $\underline{\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ P(\alpha_i) = \beta_i}$. (*)

Alors $P(D) = P(\operatorname{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = \operatorname{Diag}(P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n)) = \operatorname{Diag}(\beta_1, \beta_2, \dots)$

Donc $P(D) = \Delta$. Alors $P(A) = P(QDQ^{-1}) = Q\,P(D)\,Q^{-1} = Q\Delta Q^{-1} = B$.

↑ où connu

Finalement $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P(A) = B$.

<u>Exercice</u>.. On pose $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $L_i = \dfrac{1}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\alpha_i - \alpha_k)} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(X - \alpha_k)$.

Montrer que le P de (*) est $\sum_{i=1}^{n} \beta_i L_i$.

EXERCICE 38 Endomorphismes diagonalisables dans la même base.

E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes diagonalisables de E tels que : $f \circ g = g \circ f$.

$\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ et pour i dans $[\![1, p]\!]$, F_i est le sous-espace propre de f associé à λ_i.

$\mathrm{Sp}(g) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q\}$ et pour i dans $[\![1, p]\!]$, pour j dans $[\![1, q]\!]$, G_j est le sous-espace propre de g associé à μ_j.

Q1. Montrer que les sous-espaces propres de g sont stables par f.

Q2. Montrer que pour i dans $[\![1, p]\!]$: $F_i = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{q} (F_i \cap G_j)$.

Q3. En déduire que f et g se diagonalisent dans la même base.

Q4. Envisager une réciproque.

Q1 Soit μ une valeur propre de g. Soit x un élément de SEP (g, μ). $g(f(x)) = f(g(x)) = f(\mu\, x) = \mu\, f(x)$.

Donc $f(x)$ appartient à SEP (g, μ). Ainsi SEP (g, μ) est stable par f.

La symétrie du problème permet de dire que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } g \text{ (resp. } f\text{) sont stables par } f \text{ (resp. } g\text{).}}$$

Q2 Soit i un élément de $[\![1, p]\!]$. Montrons que $F_i \cap G_1$, $F_i \cap G_2$, ..., $F_i \cap G_q$ sont en somme directe.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ un élément de $(F_i \cap G_1) \times (F_i \cap G_2) \times \cdots \times (F_i \cap G_q)$ tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_q = 0_E$.

Comme G_1, G_2, ..., G_q sont en somme directe (ce sont les sous-espaces propres de g) nécessairement :

$x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0_E$. Ce qui achève de montrer que la somme $(F_i \cap G_1) + (F_i \cap G_2) + \cdots + (F_i \cap G_q)$ est directe.

$\forall j \in [\![1, q]\!]$, $F_i \cap G_j \subset F_i$ donc $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{q} (F_i \cap G_j) \subset F_i$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de F_i. Comme $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{q} G_j = E$, puisque g est diagonalisable, il existe un unique élément $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ de $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_q$ tel que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_q$.

Ne reste plus alors qu'à montrer que x_1, x_2, ..., x_q sont des éléments de F_i ce qui n'est pas une totale évidence.

$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_q$ et x est élément de F_i. Ainsi $\lambda_i (x_1 + x_2 + \cdots + x_q) = \lambda_i\, x = f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots f(x_q)$.

Donc $(\lambda_i\, x_1 - f(x_1)) + (\lambda_i\, x_2 - f(x_2)) + \cdots + (\lambda_i\, x_q - f(x_q)) = 0_E$.

Soit j un élément de $[\![1, q]\!]$. x_j appartient à G_j et G_j est stable par f car c'est un sous-espace propre de g.

Par conséquent x_j et $f(x_j)$ sont deux éléments de G_j donc $\lambda_i\, x_j - f(x_j)$ est encore un élément de G_j.

Alors $(\lambda_i\, x_1 - f(x_1)) + (\lambda_i\, x_2 - f(x_2)) + \cdots + (\lambda_i\, x_q - f(x_q)) = 0_E$, $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $\lambda_i\, x_j - f(x_j) \in G_j$ et la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_q$ est directe.

Ainsi $\lambda_i\, x_1 - f(x_1) = \lambda_i\, x_2 - f(x_2) \cdots = \lambda_i\, x_q - f(x_q) = 0_E$. Donc $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $f(x_j) = \lambda_i\, x_j$ ou $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $x_j \in F_i$.

Alors $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_q \in (F_i \cap G_1) + (F_i \cap G_2) + \cdots + (F_i \cap G_q)$ et ceci pour tout élément x de F_i.

Donc $F_i \subset (F_i \cap G_1) + (F_i \cap G_2) + \cdots + (F_i \cap G_q)$. Finalement :

R.

$$\boxed{F_i = \bigoplus_{j=1}^{q} (F_i \cap G_j)}.$$

Q3 Fixons i dans $[\![1,p]\!]$. Posons $S_i = \{j \in [\![1,q]\!] \mid F_i \cap G_j \neq \{0_E\}\}$.

Supposons que S_i est vide. Alors $\forall j \in [\![1,q]\!]$, $F_i \cap G_j = \{0_E\}$ donc $F_i = \bigoplus_{j=1}^{q} (F_i \cap G_j) = \{0_E\}$ ce qui n'est pas car F_i est un sous-espace propre de f.

Donc S_i n'est pas vide et $F_i = \bigoplus_{j \in S_i} (F_i \cap G_j)$.

Pour tout élément j de S_i considérons une base $\mathcal{B}_{i,j}$ de $F_i \cap G_j$.

Comme $F_i = \bigoplus_{j \in S_i} (F_i \cap G_j)$, $\mathcal{B}_i =$ " $\bigcup_{j \in S_i} \mathcal{B}_{i,j}$ " est une base de F_i nécessairement constituée de vecteurs propres de f et de g.

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ donc $\mathcal{B} =$ " $\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ " est une base de E et ses vecteurs sont des vecteurs propres de f et de g.

Alors les matrices de f et de g dans cette base $\mathcal{B}$ sont diagonales.

$\boxed{f \text{ et } g \text{ se diagonalisent dans la même base.}}$

Q4 Ici f et g sont deux endomorphismes qui se diagonalisent dans la même base $\mathcal{B}_0$ de E. Montrons que $f \circ g = g \circ f$.

$\mathcal{B}_0$ est une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g. Alors les matrices de f et g dans la base $\mathcal{B}_0$ sont diagonales donc commutent.

$M_{\mathcal{B}_0}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}_0}(f)\, M_{\mathcal{B}_0}(g) = M_{\mathcal{B}_0}(g)\, M_{\mathcal{B}_0}(f) = M_{\mathcal{B}_0}(g \circ f)$. Alors $f \circ g = g \circ f$.

$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont deux endomorphismes de } E \text{ qui se diagonalisent dans la même base} : f \circ g = g \circ f.}$

Finalement :

$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont deux endomorphismes de } E,\ f \text{ et } g \text{ se diagonalisent dans la même base si et seulement si } f \circ g = g \circ f.}$

R.

EXERCICE 39 | **N1** | **Commutant d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**

Q1. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{C}_D$ (resp. $\mathcal{C}_A$) est l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec D (resp.A).

Q1. Montrer que $\mathcal{C}_D$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(I_3, D, D^2)$

Q2. Déterminer $\mathcal{C}_A$.

Thème abordé dans oral ESCP 1995 1.11, 1996 1.23, 1999 2-17, 2008 2.21, 2010 2.18, 2012 2.1.

Q1 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$MD = DM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3b & -3c \\ 0 & 3e & -3f \\ 0 & 3h & -3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3d & 3e & 3f \\ -3g & -3h & -3i \end{pmatrix}$$

$$MD = DM \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 0,\ -3c = 0 \\ 3d = 0,\ -3f = 3f \\ 0 = -3g,\ 3h = -3h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 0 \\ d = f = 0 \\ g = h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

<u>Par conséquent $\mathcal{C}_D$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.</u>

Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$\mathcal{C}_D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} ; (a,e,i) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \{ a E_{1,1} + e E_{2,2} + i E_{3,3} ; (a,e,i) \in \mathbb{R}^3 \} = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$.

Alors $\mathcal{C}_D$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ en est une famille génératrice. Cette famille est également libre car $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2}$ est libre.

Finalement <u>$(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est une base de $\mathcal{C}_D$</u>. Ainsi <u>$\dim \mathcal{C}_D = 3$.</u>

$\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k D = D^{k+1} = D D^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k \in \mathcal{C}_D$. Donc (I_3, D, D^2) est une famille d'éléments de $\mathcal{C}_D$ dont le cardinal 3 coïncide avec la dimension de $\mathcal{C}_D$. Pour montrer que (I, D, D^2) est une base de $\mathcal{C}_D$ il suffit alors de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha I_3 + \beta D + \delta D^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + 3\beta + 9\delta = 0 \\ \alpha - 3\beta + 9\delta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -3\beta \\ \beta = 3\beta \end{cases}$.

Par conséquent $\alpha = \beta = \delta = 0$.

ceci achève de montrer que (I_3, D, D^2) est libre et permet alors de dire que (I_3, D, D^2) est une base de $\mathcal{C}_D$. donc $\mathcal{C}_D = \text{Vect}(I_3, D, D^2)$.

Q2 Evidemment nous allons montrer que A est semblable à D !

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + 2z = \lambda x \\ y + 2z = \lambda y \\ 2x + 2y = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} -(1+\lambda)x + 2z = 0 \\ (1-\lambda)y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} z = \frac{\lambda+1}{2}x \\ (1-\lambda)y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - \lambda\frac{\lambda+1}{2}x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{\lambda+1}{2}x \\ y = \frac{1}{2}\left[-2 + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\right]x = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x \\ 0 = \left[(1-\lambda)\frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4) + \lambda + 1\right]x = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4-\lambda^3-\lambda^2+4\lambda+4\lambda+4)x \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} z = \frac{\lambda+1}{2}x \\ y = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x \\ 0 = \frac{1}{4}(-\lambda^3+9\lambda)x = \frac{1}{4}\lambda(3-\lambda)(3+\lambda)x \end{cases}$$

1er cas.. $\lambda \notin \{0, 3, -3\}$. donc $\frac{1}{4}\lambda(3-\lambda)(3+\lambda) \neq 0$.

Alors $AX = \lambda X \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. λ n'est pas valeur propre de A.

2ème cas.. $\lambda \in \{0, 3, -3\}$. $\frac{1}{4}\lambda(3-\lambda)(3+\lambda) = 0$.

$AX = \lambda X \iff \begin{cases} y = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x \\ z = \frac{1}{2}(\lambda+1)x \end{cases}$. λ est valeur propre de A et $SEP(A,\lambda) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4) \\ \frac{1}{2}(\lambda+1) \end{pmatrix}\right)$.

Alors $\text{sp}\, A = \{0, 3, -3\}$, $SEP(A,0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $SEP(A,3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et

$SEP(A,-3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$. A admet trois valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc

A est diagonalisable.

Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B}_1 = (X_1)$ est une base de $SEP(A,0)$, $\mathcal{B}_2 = (X_2)$ est une base de $SEP(A,3)$ et $\mathcal{B}_3 = (X_3)$ est une base de $SEP(A,-3)$.

2.

Comme $M_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,0) \oplus SEP(A,3) \oplus SEP(A,-3)$, $\mathcal{B} = $ " $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ " $= (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 0, 3 et -3. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

1°/ $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

2°/ P est inversible comme matrice de passage.

3°/ $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(0,3,-3) = D$ et $A = PDP^{-1}$.

Remarque.. Soient U et V deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$.

Si $U = PV$: $P^{-1}U = P^{-1}PV = V$. Si $V = P^{-1}U$: $PV = PP^{-1}U = U$.

Donc $U = PV \Leftrightarrow V = P^{-1}U$. De même $U = P^{-1}V \Leftrightarrow V = PU$.

Cherchons $\mathcal{C}_A$. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$.

$M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow MA = AM \Leftrightarrow M\ PDP^{-1} = PDP^{-1}M \overset{\text{Remarque}}{\Leftrightarrow} P^{-1}MPDP^{-1} = DP^{-1}M \overset{\text{Remarque}}{\Leftrightarrow} P^{-1}MPD = DP^{-1}MP$.

$M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}_D \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\delta) \in \mathbb{R}^3,\ P^{-1}MP = \alpha I_3 + \beta D + \delta D^2$

$M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\delta) \in \mathbb{R}^3,\ M = P(\alpha I_3 + \beta D + \delta D^2)P^{-1}$.

Remarque deux fois !

$M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\delta) \in \mathbb{R}^3,\ M = \alpha \underbrace{PP^{-1}}_{I_3} + \beta \underbrace{PDP^{-1}}_{A} + \delta \underbrace{PD^2P^{-1}}_{A^2}$.

$M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\delta) \in \mathbb{R}^3,\ M = \alpha I_3 + \beta A + \delta A^2$. $M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.

Ainsi $\underline{\underline{\mathcal{C}_A = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)}}$.

Remarque.. Nous avons vu que $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$. On montre alors sans difficulté que $\mathcal{C}_A = \mathrm{Vect}(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})$.

Exercice 1.. Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $PE_{1,1}P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$PE_{2,2}P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $PE_{3,3}P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Déduire la liberté de (I_3, A, A^2) de la liberté (I_3, D, D^2).

R.

EXERCICE 40

Exercice **D'après oral ESCP 2010.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

f est l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q1 Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

Q2 Construire une matrice inversible P dont tous les éléments de la seconde ligne valent 1 telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ avec $\alpha < \beta < \gamma$ (on justifiera avec précision la construction).

Calculer P^{-1}

Q3 a) Montrer que tout polynôme annulateur de A est divisible par $S = X(X-1)(X-2)$.

b) Montrer que S est un polynôme annulateur de D puis de A.

c) En déduire l'ensemble des polynômes annulateurs de A

Q4 On pose $\mathcal{E} = \{Q(A)\,;\, Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $\mathcal{E} = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$

Q5 Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_D$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec D. Montrer que $\mathcal{C}_D = \text{Vect}(I_3, D, D^2)$.

En déduire l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Q1 Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z = \lambda x \\ x+y+z = \lambda y \\ x+y+z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + y - z = 0 \\ 2(x+y) = \lambda(x+y) \\ \lambda(z-y) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$

$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(z-y) = 0 \\ (\lambda-2)(x+y) = 0 \\ (1-\lambda)x + y - z = 0 \end{cases}$

1er cas.. $\lambda = 0$. $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$

Alors $0 \in Sp f$ et $SEP(f, 0) = \text{Vect}(e_1 - e_2)$.

2ème cas.. $\lambda = 2$. $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ -x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$.

Alors $2 \in Sp f$ et $SEP(f, 2) = \text{Vect}(e_2 + e_3)$

3ème cas.. $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 2$. $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x = -y \\ (1-\lambda)(-y) + y - y = 0 \end{cases}$ ou $(\lambda - 1)y = 0$.

a) $\lambda \neq 1$ $\quad f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow u=0_E$. λ n'est pas valeur propre.

b) $\lambda = 1$ $\quad f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} z=y \\ x=-y \end{cases}$

Alors $1 \in Sp\, f$ et $SEP(f,1)=Vect(-e_1+e_2+e_3)$.

Donc $\underline{\underline{Sp\, f=\{0,1,2\}}}$.

$\underline{\underline{SEP(f,0)=Vect(e_1-e_2),\ SEP(f,1)=Vect(-e_1+e_2+e_3)\ \text{et}}}$

$\underline{\underline{SEP(f,2)=Vect(e_2+e_3)}}$.

f admet trois valeurs propres deux à deux distinctes et dim $E=3$.
$\underline{\underline{f \text{ est diagonalisable}}}$.

Q2 Notons que l'on a aussi $SEP(f,0)=Vect(-e_1+e_2)$.

Alors $\mathcal{B}_1=(-e_1+e_2)$ est une base de $SEP(f,0)$.
$\mathcal{B}_2=(-e_1+e_2+e_3)$ est une base de $SEP(f,1)$.
$\mathcal{B}_3=(e_2+e_3)$ est une base de $SEP(f,2)$.

De plus $E=SEP(f,0)\oplus SEP(f,1)+SEP(f,2)$.

Alors $\mathcal{B}'=(-e_1+e_2,-e_1+e_2+e_3,e_2+e_3)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 0, 1 et 2.

Soit D la matrice de f dans $\mathcal{B}'$. $\underline{\underline{D=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=Diag(0,1,2)}}$.

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
P est inversible et la formule de changement de base pour les endomorphismes donne $P^{-1}AP=D$.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc bien trouvé une matrice inversible P dont les éléments de la première ligne valent 1 tel que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ avec $\alpha < \beta < \gamma$. $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $\gamma = 2$!

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $PX = Y$.

$$\begin{cases} -x - y = x' \\ x + y + z = y' \\ y + z = z' \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne : $z = x' + y'$

L_3 donne alors $y = z' - x' - y'$

L_1 donne alors $x = -y - x' = -z' + x' + y' - x' = -z' + y'$.

Ainsi $\begin{cases} x = y' - z' \\ y = -x' - y' + z' \\ z = x' + y' \end{cases}$. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q3 a) Soit Q un polynôme annulateur de A. $\mathrm{Sp}A \subset \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$.

$\mathrm{Sp}A = \mathrm{Sp}\,f = \{0, 1, 2\}$. Donc $0, 1, 2$ sont des racines de Q.

Alors $S = X(X-1)(X-2)$ divise Q.

Si Q est un polynôme annulateur de A : $S = X(X-1)(X-2)$ divise Q.

b) $S(D) = S(\mathrm{Diag}(0, 1, 2)) = \mathrm{Diag}(S(0), S(1), S(2)) = \mathrm{Diag}(0, 0, 0) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Alors $S = X(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de D.

$S(A) = S(PDP^{-1}) = P\,S(D)\,P^{-1} = P\,0_{M_3(\mathbb{R})}\,P^{-1} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

$S = X(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A.

a.

c) Nous avons vu qu'un polynôme annulateur de A est divisible par S.

Réciproquement soit Q un polynôme divisible par S.

$\exists\, U \in \mathbb{R}[X]$, $Q = US$. $\quad Q(A) = (US)(A) = U(A)S(A) = U(A)\, 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

donc $Q(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Q est un polynôme annulateur de A.

<u>L'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par $S = X(X-1)(X-2)$ (ou multiples de $X(X-1)(X-2)$).</u>

Q4 • Soit $M \in \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$. $\exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $M = aI_3 + bA + cA^2$.

Posons $Q = a + bX + cX^2$. $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $M = Q(A)$ donc $M \in \mathcal{E}$.

Ainsi <u>$\mathrm{Vect}(I_3, A, A^2) \subset \mathcal{E}$.</u>

• Réciproquement soit $M \in \mathcal{E}$. $\exists\, Q \in \mathbb{R}[X]$, $M = Q(A)$.

Effectuons la division euclidienne de Q par S.

$\exists !\,(V,R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, $Q = VS + R$ avec $\deg R < \deg S$.

$Q(A) = V(A)S(A) + R(A) \underset{\substack{\uparrow \\ S(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}}{=} R(A)$. De plus $\deg R < 3$.

Ainsi $\exists\,(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$, $R = a' + b'X + c'X^2$.

donc $Q(A) = R(A) = a' I_3 + b'A + c'A^2 \in \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.

Alors <u>$\mathcal{E} \subset \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.</u>

Finalement <u>$\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.</u>

Q5 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$DM = MD \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 2c \\ 0 & e & 2f \\ 0 & h & 2i \end{pmatrix}$

$$DM = MD \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \,,\ 2c=0 \\ d=0 \,,\ f=2f \\ 2g=0 \,,\ 2h=h \end{cases} \Leftrightarrow b=c=d=f=g=h=0 \Leftrightarrow M \text{ est diagonale.}$$

<u>L'ensemble des matrices qui commutent avec D et l'ensemble des matrices diagonales de $M_3(\mathbb{R})$.</u>

Notons $\mathcal{C}_D$ l'ensemble des matrices qui commutent avec D.

$$\mathcal{C}_D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

où <u>$\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{33})$</u> $\quad ((E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2}$ est la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$).

Notons que la famille (E_{11}, E_{22}, E_{33}) est libre comme sous-famille de la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{C}_D$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ de dimension 3.

I, D et D^2 commutent avec D donc I, D et D^2 sont des éléments du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_D$. Alors $\mathrm{Vect}(I, D, D^2) \subset \mathcal{C}_D$.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aI + bD + cD^2 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})} \text{ donc } \begin{cases} a=0 \\ a+b+c=0 \\ a+2b+4c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b+c=0 \\ 2b+4c=0 \end{cases} ; \begin{cases} a=0 \\ c=-b \\ -2b=0 \end{cases} ; \ a=b=c=0.$$

Alors (I, D, D^2) est une famille libre. C'est donc une base de $\mathrm{Vect}(I, D, D^2)$.

Donc $\mathrm{Vect}(I, D, D^2) \subset \mathcal{C}_D$ et $\dim \mathrm{Vect}(I, D, D^2) = 3 = \dim \mathcal{C}_D < +\infty$.

Alors <u>$\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(I, D, D^2)$.</u>

- Soit $M \in \mathcal{C}_A$. $MA = AM$. $MPDP^{-1} = PDP^{-1}M$. $P^{-1}MPD = DP^{-1}MP$.

  Alors $P^{-1}MP \in \mathcal{C}_D$. $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $P^{-1}MP = aI_3 + bD + cD^2$.

  Donc $M = aPI_3P^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} \underset{A=PDP^{-1}}{=} aI_3 + bA + cA^2$.

  Alors $M \in \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.

  Ainsi $\mathcal{C}_A \subset \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.

- Soit $M \in \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$. $\exists (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, $M = a'I_3 + b'A + c'A^2$.

  $AM = a'A + b'A^2 + c'A^3 = (a'I_3 + b'A + c'A^2)A = MA$; $M \in \mathcal{C}_A$.

Finalement : $\underline{\underline{\mathcal{C}_A = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)}}$.

__Exercice..__ Montrer que (I_3, A, A^2) est libre.

R.

EXERCICE 41 **N1+** **Commutant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes.**

Q1.. D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_D$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec D est est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1})$.

Q2. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. $\mathcal{C}_A$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A. $\mathbb{K}[A] = \{P(A)\,;\, P \in \mathbb{K}[X]\}$.

a) Montrer que $\mathcal{C}_A = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ et que $\dim \mathcal{C}_A = n$.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ les valeurs propres de A. Montrer que $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de A.

Montrer que $\mathbb{K}[A] = \{P(A)\,;\, P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$ (on pourra diviser par Q), puis que $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}_A$.

▲ *On a un résultat analogue pour les endomorphismes.*

Cela est contenu dans oral ESCP 2012 2.1.

Thème abordé pour une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans oral ESCP 1999 2-17.

Thème abordé pour une matrice particulière de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans oral ESCP 1995 1.11, 2010 2-18.

Q1 a) Clairement si M est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M commute avec D car D est diagonale.

Réciproquement soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec D. Montrons que M est diagonale. Posons $M = (m_{i,j})$ et $D = (d_{i,j})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow d_{i,j} = 0$.

$MD = DM$ donc les matrices $\left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} d_{k,j}\right)$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} d_{i,k} m_{k,j}\right)$ sont égales.

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Notons que $d_{i,i} \neq d_{j,j}$.

$\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} d_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} m_{k,j}$, $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} d_{k,j} = m_{i,j} d_{j,j}$ et $\sum_{k=1}^{n} d_{i,k} m_{k,j} = d_{i,i} m_{i,j}$

Alors $m_{i,j} d_{j,j} = d_{i,i} m_{i,j}$. Donc $m_{i,j}(d_{j,j} - d_{i,i}) = 0$ et $d_{j,j} - d_{i,i} \neq 0$. Alors $m_{i,j} = 0$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow m_{i,j} = 0$. M est diagonale.

<u>L'ensemble $\mathcal{C}_D$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.</u>

b) Soit $(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathcal{B}_D = \{\mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) ; (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{K}^n\} = \{\sum_{k=1}^{n} d_k E_{k,k} ; (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{K}^n\}$

Alors $\mathcal{B}_D = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n})$. de plus $(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n})$ est libre car

$(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ est libre puisque c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi $(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n})$ est une base de $\mathcal{B}_D$ et $\dim \mathcal{B}_D = n$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k D = D^{k+1} = D D^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k \in \mathcal{B}_D$. Alors $\mathcal{B} = (I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une famille d'éléments de $\mathcal{B}_D$ de cardinal n et $\mathcal{B}_D$ est de dimension n. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{B}_D$ il suffit alors de montrer que $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k D^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Considérons le polynôme S de $\mathbb{K}[X]$ égal à $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$. S est de degré au plus $n-1$ et $S(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = S(D) = S(\mathrm{Diag}(d_{1,1}, d_{2,2}, \dots, d_{n,n})) = \mathrm{Diag}(S(d_{1,1}), S(d_{2,2}), \dots, S(d_{n,n}))$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $S(d_{i,i}) = 0$.

$d_{1,1}, d_{2,2}, \dots, d_{n,n}$ sont alors n racines distinctes de S qui est de degré au plus $n-1$.

Par conséquent S est le polynôme nul. Ainsi $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Ceci achève de montrer la liberté de $\mathcal{B}$ qui permet alors d'affirmer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{B}_D$.

$(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{B}_D$.

Q2 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et A admet n valeurs propres deux à deux distinctes donc A est diagonalisable. Alors A est semblable à une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \Delta$. $A = P\Delta P^{-1}$.

Posons $\mathcal{B}_\Delta = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M\Delta = \Delta M\}$.

A et Δ sont semblables donc ces deux matrices ont mêmes valeurs propres. Alors Δ a n valeurs propres deux à deux distinctes. Comme Δ est diagonale, les éléments de sa diagonale sont deux à deux distincts.

D'après ce qui précède : $\mathcal{B}_\Delta = \mathrm{Vect}(I_n, \Delta, \Delta^2, \dots, \Delta^{n-1})$ donc $\mathcal{B}_\Delta = \{T(\Delta) ; T \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$

Notons que aussi que $(I_n, \Delta, \Delta^2, \dots, \Delta^{n-1})$ est une base de $\mathcal{B}_\Delta$ et que $\dim \mathcal{B}_\Delta = n$ toujours d'après Q1.

<u>Remarque</u>.. Soit $(U,V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

Si $U = PV$: $P^{-1}U = P^{-1}PV = V$. Si $V = P^{-1}U$: $PV = PP^{-1}U = U$.

Donc $U = PV \Leftrightarrow P^{-1}U = V$. De même $U = P^{-1}V \Leftrightarrow PU = V$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A = P\Delta P^{-1}$ ← 2 fois la remarque...

$M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow MA = AM \Leftrightarrow MP\Delta P^{-1} = P\Delta P^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}MP\Delta = \Delta P^{-1}MP \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}_\Delta$.

$M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}_\Delta \Leftrightarrow \exists T \in \mathbb{K}_{n-1}[X],\ P^{-1}MP = T(\Delta) \Leftrightarrow \exists T \in \mathbb{K}_{n-1}[X],\ M = PT(\Delta)P^{-1}$

deux fois la remarque.

Soit $T = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell X^\ell \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

$$PT(\Delta)P^{-1} = P\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \Delta^\ell\right)P^{-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell P\Delta^\ell P^{-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell (P\Delta P^{-1})^\ell = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell A^\ell = T(A)$$

Alors $M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow \exists T \in \mathbb{K}_{n-1}[X],\ M = PT(\Delta)P^{-1} \Leftrightarrow \exists T \in \mathbb{K}_{n-1}[X],\ M = T(A)$.

Donc $\underline{\underline{\mathcal{C}_A = \{T(A) ; T \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\} = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})}}$.

Remarque que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell A^\ell = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

$$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = P\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}P^{-1} = P\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell A^\ell\right)P^{-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell PA^\ell P^{-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell (PAP^{-1})^\ell = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell \Delta^\ell.$$

Donc $\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell \Delta^\ell = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Or comme nous l'avons vu dans la première question $(I_n, \Delta, \dots, \Delta^{n-1})$ est libre car Δ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à éléments diagonaux deux à deux distincts. Donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Ceci achève de montrer la liberté de $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$.

Finalement $\underline{\underline{(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{C}_A \text{ et } \dim \mathcal{C}_A = n}}$.

<u>b)</u> $\deg Q = n$. $\exists (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $Q = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell X^\ell$ ... et $b_n \neq 0$.

$$Q(A) = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell A^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell (P\Delta P^{-1})^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell P\Delta^\ell P^{-1} = P\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell \Delta^\ell\right)P^{-1} = P(Q(\Delta))P^{-1}.$$

Posons $\Delta = \mathrm{Diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. $Q(\Delta) = \mathrm{Diag}(Q(\delta_1), Q(\delta_2), \dots, Q(\delta_n))$.

Or $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\} = Sp\,\Delta = Sp\,A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $Q(\lambda_k) = 0$.

Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $Q(\delta_k) = 0$.

Donc $Q(\Delta) = \mathrm{Diag}(Q(\delta_1), Q(\delta_2), \dots, Q(\delta_n)) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Ainsi $Q(A) = P\,Q(\Delta)\,P^{-1} = P\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\,P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Donc $\underline{\underline{Q = \prod_{k=0}^{n}(X - \lambda_k)}}$ $\underline{\underline{\text{est un polynôme annulateur de } A \text{ ... de degré } n.}}$

$\{P(A);\ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\} \subset \{P(A);\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ car $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}_n[X]$.

Réciproquement soit $B \in \{P(A);\ P \in \mathbb{K}[X]\}$. $\exists R \in \mathbb{K}[X]$, $B = R(A)$.

La division euclidienne de R par Q permet d'écrire $R = QS_1 + S_2$ avec

$S_1 \in \mathbb{K}[X]$, $S_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg S_2 < \deg Q = n$.

Alors $S_2 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $B = R(A) = Q(A)S_1(A) + S_2(A) \underset{Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{=} S_2(A)$.

Donc $B \in \{P(A);\ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$.

Ceci achève de montrer que $\{P(A);\ P \in \mathbb{K}[X]\} \subset \{P(A);\ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$.

Ainsi $\mathbb{K}[A] = \{P(A);\ P \in \mathbb{K}[X]\} = \{P(A);\ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\} = \mathrm{Vect}(I, A, \dots, A^{n-1}) = \mathcal{C}_A$.

Alors $\underline{\underline{\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}_A}}$. $\underline{\underline{\{P(A);\ P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathrm{Vect}(I, A, \dots, A^{n-1}) = \mathcal{C}_A}}$.

<u>Remarque</u>.. Résultat qui ne vaut pas pour tout matrice diagonalisable.

Si A est diagonalisable : 1) $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}_A$

2) $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}_A$ si et seulement si A et admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

Nous avons déjà montré avec cette exercice la moitié de 2). Nous aurons la seconde moitié dans l'exercice suivant. Notons que 1) vaut pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

R.

EXERCICE 42 **N2** **Dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable.**

$p \in [\![2, +\infty[\![$. f est un endomorphisme diagonalisable de E espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres (distinctes) de f. Pour tout i appartenant à $[\![1,p]\!]$ on pose $F_i = SEP(f, \lambda_i) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id_E)$.

$\mathcal{S} = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ est le commutant de f.

Q1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Q2. g est un élément de $\mathcal{S}$. Montrer que pour tout élément i de $[\![1,p]\!]$, F_i est stable par g.

Si i appartient à $[\![1,p]\!]$, on note alors g_i, l'application de F_i dans F_i qui à x associe $g(x)$ et on pose

$$\varphi(g) = (g_1, g_2, \ldots, g_p).$$

Q3. Montrer que φ est une application linéaire injective de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{H} = \mathcal{L}(F_1) \times \mathcal{L}(F_2) \times \cdots \times \mathcal{L}(F_p)$.

Q4. On se propose de montrer que φ est surjective. Pour tout élément i de $[\![1,p]\!]$ on note p_i la projection de E sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} F_k$.

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ un élément de $\mathcal{H}$. On pose $\forall x \in E,\ g(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i\big(p_i(x)\big)$ (on évitera d'écrire $u_i \circ p_i$).

Montrer que g est élément de $\mathcal{S}$ et que $\varphi(g) = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Conclure.

Q5. Déduire de ce qui précède que : $\dim \mathcal{S} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \Big(\dim SEP(f, \lambda)\Big)^2$. Que dire si $n = p$?

Q6. On note $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des polynômes de f. $\mathbb{K}[f] = \{P(f)\,;\, P \in \mathbb{K}[X]\}$.

a) Montrer que $P_0 = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur non nul de f de degré minimum.

En déduire que $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$ et que $\dim \mathbb{K}[f] = p$ (on pourra utiliser la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$).

b) Montrer que $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{S}$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que $\mathcal{S} = \mathbb{K}[f]$.

Q7. Examiner le cas $p = 1$...

Thème abordé dans ESSEC MI 2011.

▲ *On a un résultat analogue pour les matrices.*

Q1 • $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(E)$

• $\forall k \in \mathbb{N},\ f \circ f^k = f^{k+1} = f^k \circ f$; $\forall k \in \mathbb{N},\ f^k \in \mathcal{S}$. $\{f^k\,;\, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

• soit $\lambda \in \mathbb{K}$. soit $(g, h) \in \mathcal{S}^2$.

$f \circ (\lambda g + h) = \lambda f \circ g + f \circ h \overset{\uparrow}{=} \lambda g \circ f + h \circ f = (\lambda g + h) \circ f$; $\lambda g + h \in \mathcal{S}$.

$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (g, h) \in \mathcal{S}^2,\ \lambda g + h \in \mathcal{S}$.

ceci achève de montrer que <u>$\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.</u>

Q2 Soit g un élément de $\mathcal{S}$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$.

$\forall x \in F_i,\ f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)$. Alors $\forall x \in F_i,\ g(x) \in F_i$.

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, F_i est stable par g.

Si g est un élément de $\mathcal{S}$, pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, F_i est stable par g.

(Q3) • Soit g un élément de $\mathcal{S}$. Pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, g_i est une application de F_i dans F_i. Comme g est linéaire et que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in F_i$, $g_i(x) = g(x)$: pour tout i dans $[\![1,p]\!]$ g_i est un endomorphisme de F_i. Alors $\varphi(g) = (g_1, g_2, \dots, g_p) \in \mathcal{L}(F_1) \times \mathcal{L}(F_2) \times \dots \times \mathcal{L}(F_p)$.
φ est une application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B} = \mathcal{L}(F_1) \times \mathcal{L}(F_2) \times \dots \times \mathcal{L}(F_p)$. (1)

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit (g,h) appartenant à $\mathcal{S}^2$. Notons que $\lambda g + h \in \mathcal{S}$.
$\varphi(\lambda g + h) = ((\lambda g+h)_1, (\lambda g+h)_2, \dots, (\lambda g+h)_p)$.
$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in F_i$, $(\lambda g+h)_i(x) = (\lambda g+h)(x) = \lambda g(x) + h(x) = \lambda g_i(x) + h_i(x) = (\lambda g_i + h_i)(x)$.
Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $(\lambda g+h)_i = \lambda g_i + h_i$.
Donc $\varphi(\lambda g+h) = ((\lambda g+h)_1, (\lambda g+h)_2, \dots, (\lambda g+h)_p) = (\lambda g_1 + h_1, \lambda g_2 + h_2, \dots, \lambda g_p + h_p) = \lambda(g_1, g_2, \dots, g_p) + (h_1, h_2, \dots, h_p)$.
Ainsi $\varphi(\lambda g + h) = \lambda \varphi(g) + \varphi(h)$.
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (g,h) \in \mathcal{S}^2$, $\varphi(\lambda g + h) = \lambda \varphi(g) + \varphi(h)$. φ est linéaire. (2)

• Soit $g \in \operatorname{Ker} \varphi$. $(g_1, g_2, \dots, g_p) = (0_{\mathcal{L}(F_1)}, 0_{\mathcal{L}(F_2)}, \dots, 0_{\mathcal{L}(F_p)})$. $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $g_i = 0_{\mathcal{L}(F_i)}$.
Soit $x \in E$. $\exists! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ car $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ (f est diagonalisable).
$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} g(x_i) = \sum_{i=1}^{p} g_i(x_i) = \sum_{i=1}^{p} 0_{\mathcal{L}(F_i)}(x_i) = \sum_{i=1}^{p} 0_E = 0_E$.
Ainsi $\forall x \in E$, $g(x) = 0_E$. $g = 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{S}}$. Alors $\operatorname{Ker} \varphi = \{0_{\mathcal{S}}\}$. φ est injective (3)

(1), (2) et (3) montrent que φ est une application linéaire injective de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B} = \mathcal{L}(F_1) \times \mathcal{L}(F_2) \times \dots \times \mathcal{L}(F_p)$.

(Q4) $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathcal{L}(F_1) \times \mathcal{L}(F_2) \times \dots \times \mathcal{L}(F_p)$ et $\forall x \in E$, $g(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i(p_i(x))$.

* $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in E$, $p_i(x) \in F_i$. Donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in E$, $u_i(p_i(x)) \in E$ (et même à F_i).
Alors $\forall x \in E$, $g(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i(p_i(x)) \in E$. g est une application de E dans E. (1)

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in E^2$. Rappelons que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, u_i et p_i sont linéaires.
$g(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^{p} u_i(p_i(\lambda x + y)) = \sum_{i=1}^{p} u_i(\lambda p_i(x) + p_i(y)) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda u_i(p_i(x)) + u_i(p_i(y)))$.
$g(\lambda x + y) = \lambda \sum_{i=1}^{p} u_i(p_i(x)) + \sum_{i=1}^{p} u_i(p_i(y)) = \lambda g(x) + g(y)$.
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $g(\lambda x + y) = \lambda g(x) + g(y)$. g est linéaire. (2)

R. * Montrons que g commute avec f.

p_i est la projection sur F_i // $\bigoplus_{j=1, j\neq i}^{p} F_j$

Soit $k \in [\![1,p]\!]$ et $x \in F_k$. Si $i \in [\![1,p]\!]$, $p_i(x) = x$ si $i = k$ et 0_E si $i \neq k$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $u_i(p_i(x)) = \begin{cases} u_i(x) & \text{si } i = k \\ 0_E & \text{si } i \neq k \end{cases}$. $\quad g(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i(p_i(x)) = u_k(x)$.

$f(g(x)) = f(u_k(x)) = \lambda_k u_k(x) = \lambda_k g(x) = g(\lambda_k x) = g(f(x))$.

$u_k(x) \in F_k$ car $x \in F_k$ et $u_k \in \mathcal{L}(F_k)$ $\qquad$ $x \in F_k$

$\forall k \in [\![1,p]\!], \forall x \in F_k$, $f(g(x)) = g(f(x))$. $\underline{\forall k \in [\![1,p]\!], \forall x \in F_k, (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x).}$

Soit $y \in E$. $\exists! (y_1, y_2, \dots, y_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$, $y = \sum_{k=1}^{p} y_k$.

$(g \circ f)(y) = \sum_{k=1}^{p} (g \circ f)(y_k) = \sum_{k=1}^{p} (f \circ g)(y_k) = (f \circ g)\left(\sum_{k=1}^{p} y_k\right) = (f \circ g)(y)$.

$g \circ f$ est linéaire $\qquad$ $f \circ g$ est linéaire

$\forall y \in E$, $(g \circ f)(y) = (f \circ g)(y)$. $\underline{g \circ f = f \circ g}$ (3). (1), (2) et (3) montrent que $\underline{\underline{g \in \mathcal{S}}}$.

Nous avons vu que $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in F_k$, $g(x) = u_k(x)$.

Alors $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in F_k$, $g_k(x) = g(x) = u_k(x)$. Donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $g_k = u_k$.

Ainsi $\underline{\underline{\varphi(g) = (u_1, u_2, \dots, u_n)}}$. $\underline{\underline{g \text{ est un antécédent de } (u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ par } \varphi \text{ dans } \mathcal{S}}}$.

$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathcal{L}(F_1) \times \mathcal{L}(F_2) \times \dots \times \mathcal{L}(F_p)$, $\exists g \in \mathcal{S}$, $\varphi(g) = (u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Ainsi $\underline{\underline{\varphi \text{ est surjective}}}$.

Finalement $\underline{\underline{\varphi \text{ est une application linéaire bijective de } \mathcal{S} \text{ sur } \mathcal{L}(F_1) \times \mathcal{L}(F_2) \times \dots \times \mathcal{L}(F_p)}}$.

(Q5) φ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{L}(F_1) \times \mathcal{L}(F_2) \times \dots \times \mathcal{L}(F_p)$.

Alors $\dim \mathcal{S} = \dim(\mathcal{L}(F_1) \times \mathcal{L}(F_2) \times \dots \times \mathcal{L}(F_p)) = \dim \mathcal{L}(F_1) + \dim \mathcal{L}(F_2) + \dots + \dim \mathcal{L}(F_p)$.

$\dim \mathcal{S} = \sum_{k=1}^{p} \dim \mathcal{L}(F_k) = \sum_{k=1}^{p} (\dim F_k)^2 = \sum_{k=1}^{p} (\dim SEP(f, \lambda_k))^2$

Comme $Sp\, f = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ et que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont deux à deux distincts :

$$\dim \mathcal{S} = \sum_{\lambda \in Sp\, f} (\dim SEP(f, \lambda))^2.$$

Supposons que $p = n$. Alors f admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

Comme $\dim E = n$, les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

Alors $\dim \mathcal{C}(f) = \sum_{\lambda \in Sp f} 1^2 = \operatorname{card}(Sp f) = n$. Si $p = n$: $\dim \mathcal{C}(f) = n$.

(Q6) a) • $P_0 \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. P_0 est non nul.

• Soit $x \in E$. $\exists!(x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$, $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$.

$$P_0(f)(x) = P_0(f)\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) = \sum_{k=1}^{p} P_0(f)(x_k) \underset{x_k \in SEP(f,\lambda_k)}{=} \sum_{k=1}^{p} P_0(\lambda_k)\, x_k = \sum_{k=1}^{p} 0 . x_k = 0_E .$$

$P_0(\lambda_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$

$\forall x \in E$, $P_0(f)(x) = 0_E$. P_0 est un polynôme annulateur de f.

• Soit P un polynôme annulateur non nul de f.
Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des racines de P. Ainsi P est divisible par $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$ donc par P_0. $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = Q P_0$.
Comme P n'est pas nul, Q n'est pas nul. Alors $\deg P = \deg Q + \deg P_0 \geq \deg P_0$.
Tout polynôme annulateur non nul de f a un degré supérieur ou égal à $\deg P_0$.

Ainsi $P_0 = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)$ est un polynôme annulateur non nul de f de degré minimum.

Remarque.. Comme P_0 est en plus unitaire, P_0 est le polynôme minimal de f.

b) $\operatorname{Vect}(Id_E, f, f^2, \dots, f^{p-1}) = \{P(f) ; P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\} \subset \{P(f) ; P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathbb{K}[f]$.

Soit $g \in \mathbb{K}[f]$. $\exists \hat{P} \in \mathbb{K}[X]$, $g = \hat{P}(f)$. Soit U (resp. V) le reste (resp. le quotient) dans la division euclidienne de $\hat{P}$ par P_0. $\hat{P} = V P_0 + U$ et $\deg U < \deg P_0 = p$.

$g = \hat{P}(f) = V(f) \circ P_0(f) + U(f) = U(f)$ car $P_0(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $g = U(f)$ avec $U \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$.

Donc $g \in \{P(f) ; P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$.

Ainsi $\mathbb{K}[f] \subset \{P(f) ; P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$. Finalement : $\mathbb{K}[f] = \{P(f) ; P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$.

Ce qui s'écrit encore $\mathbb{K}[f] = \operatorname{Vect}(Id_E, f, \dots, f^{p-1})$.

montrons que la famille $(Id_E, f, \dots, f^{p-1})$ est libre. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$ est alors un polynôme annulateur de f de degré strictement inférieur à p donc à $\deg P_0$. Or P_0 est un polynôme annulateur non nul de f de degré minimum. Alors $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Ainsi $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$.

ceci achève de montrer que $(Id_E, f, \dots, f^{p-1})$ est libre. Alors $\dim \mathrm{Vect}(Id_E, f, \dots, f^{p-1}) = p$.

Ainsi $\underline{\dim \mathbb{K}[f] = p}$.

b) Soit $g \in \mathbb{K}[f]$. $\exists (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$, $g = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k$.

$g \circ f = \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k\right) \circ f = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{k+1} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f \circ f^k = f \circ \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k = f \circ g$. Alors $g \in \mathcal{C}$.

Ainsi $\underline{\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}}$. $\dim \mathcal{C} < +\infty$. Alors $\mathbb{K}[f] = \mathcal{C}$ si et seulement si $\dim \mathbb{K}[f] = \dim \mathcal{C}$.

donc $\mathbb{K}[f] = \mathcal{C} \iff \dim \mathcal{C} = p$. Rappelons que $p \leq n$.

Supposons que $p = n$. Nous avons vu dans Q5 que $\dim \mathcal{C} = n$ donc $\dim \mathcal{C} = p$. Alors $\mathbb{K}[f] = \mathcal{C}$.

Réciproquement supposons que $\mathbb{K}[f] = \mathcal{C}$. Alors $\dim \mathcal{C} = p$.

$\underline{0} = \dim \mathcal{C} - p = \sum_{k=1}^{p} (\dim F_k)^2 - p = \sum_{k=1}^{p} \left((\dim F_k)^2 - 1\right)$ et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $(\dim F_k)^2 - 1 \geq 0$ car $\dim F_k \geq 1$ car $F_k \neq \{0_E\}$.

dans ces conditions $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $(\dim F_k)^2 - 1 = 0$. Alors $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $(\dim F_k)^2 = 1$ et $\dim F_k \geq 0$.

donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\dim F_k = 1$. Alors $n = \dim E = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \sum_{k=1}^{p} 1 = p$. $p = n$.

Finalement $\mathbb{K}[f] = \mathcal{C} \iff p = n$.

donc $\underline{\mathcal{C} = \mathbb{K}[f] \text{ si et seulement si } f \text{ admet } n \text{ valeurs propres deux à deux distinctes}}$.

(Q7) Supposons que $p = 1$. Alors $\mathrm{Sp}\, f = \{\lambda_0\}$ avec $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ et $E = SEP(f, \lambda_0)$ car f est diagonalisable.

donc $\underline{f = \lambda_0 Id_E}$. clairement f commute avec tout endomorphisme de E. $\mathcal{C} = \mathcal{L}(E)$.

donc $\dim \mathcal{C} = \dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2 = (\dim(SEP(f, \lambda_0)))^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} f} (\dim(SEP(f, \lambda)))^2$.

le résultat de Q5 vaut encore.

$\mathbb{K}[f] = \{P(f) ; P \in \mathbb{K}[X]\} = \{P(\lambda_0) Id_E ; P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathrm{Vect}(Id_E)$ et $\dim \mathbb{K}[f] = 1 = p$.

le résultat de Q6 a) vaut encore. .. Exercice. montrer que le résultat de Q6 b) est encore vrai.