R.

EXERCICE 43 | N1 | **Diagonalisibilité d'une matrice de rang 1.**

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. L est un élément non nul de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On pose $A = CL$ et $a = LC$.

Q1. Calculer A^2 en fonction de a et A. Qu'en déduire pour le spectre de A ?

Q2. Montrer que A est de rang 1 (on pourra expliciter A à partir des coefficients de C et L).

Q3. Montrer que $\operatorname{Sp} A = \{0, a\}$.

Q4. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas nulle.

Thème abordé dans oral ESCP 1995 1.2, 1.13, 1998 2-19, 2007 2.16, 2008 2.15, 2009 2.1.

Q1 $A^2 = CLCL \underset{\substack{\uparrow \\ LC \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \text{ ou } LC \in \mathbb{K}}}{=} LC(CL) = aA$. $\underline{\underline{A^2 = aA}}$. $A^2 - aA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Il fallait sans doute d'abord dire que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$!

Alors $X^2 - aX$ est un polynôme annulateur de A dont les racines sont 0 et a.

Ainsi $\underline{\underline{\operatorname{Sp} A \subset \{0, a\}}}$.

Q2 Posons $L = (\ell_1\ \ell_2 \dots \ell_n)$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Alors $A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (\ell_1\ \ell_2 \cdots \ell_n) = (c_i \ell_j)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$.

Alors la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est $\ell_j \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ donc $\ell_j C$ et ceci pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

Ainsi $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(\ell_1 C, \ell_2 C, \dots, \ell_n C) = \dim \operatorname{Vect}(C) \underset{C \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}}{=} 1$

$L \neq 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})}$ donc $\exists i_0 \in [\![1, n]\!]$, $\ell_{i_0} \neq 0$

donc $\underline{\underline{\operatorname{rg} A = 1}}$.

<u>Exercice</u>. - Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer qu'il existe une matrice L' de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et ~~une~~ matrice C' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que :

$L' \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, $C' \neq 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})}$ et $M = C'L'$.

Q3 $\operatorname{rg} A = 1 < n$ donc A n'est pas inversible. $\underline{\underline{0 \text{ est donc valeur propre de } A}}$.

Notons que $\underline{\underline{\dim SEP(A, 0) = n - \operatorname{rg} A = n - 1}}$.

$AC = (CL)C = C(LC) \underset{\substack{\uparrow \\ LC \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \text{ ou } LC \in \mathbb{K}}}{=} (LC)C = aC$ et $C \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Ainsi $\underline{\underline{a \text{ est valeur propre de } A}}$

$\underline{\underline{\text{et } C \text{ est un vecteur propre associé}}}$.

Ainsi $\{0,a\} \subset \mathrm{Sp}\,A \subset \{0,a\}$. Alors $\mathrm{Sp}\,A = \{0,a\}$.

Remarque.. Cela ne signifie pas que A a deux valeurs propres distinctes !

(Q4) 1er cas.. $a=0$. $\mathrm{Sp}\,A = \{0\}$ et $\dim SEP(A,0) = n-1$. A n'est pas diagonalisable.

2ème cas.. $a \neq 0$ A admet deux valeurs propres distinctes 0 et a.

$\dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,a) \leq n$.

donc $\dim SEP(A,a) \leq n - \dim SEP(A,0) = n-(n-1) = 1$. Or $\dim SEP(A,a) \geq 1$ car

$SEP(A,a) \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$. Ainsi $\dim SEP(A,a) = 1$.

Alors $\dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,1) = n-1+1 = n$. A est diagonalisable.

Finalement A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$.

$A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ car $\mathrm{rg}\,A = 1$. Alors $A^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Leftrightarrow aA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \overset{A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{\Longleftrightarrow} a=0$

$A^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Leftrightarrow a = 0$. Alors $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Leftrightarrow a \neq 0 \Leftrightarrow$ A est diagonalisable.

Finalement A est diagonalisable si et seulement si $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Remarque.. On a également montré que A est diagonalisable si et seulement si A possède une autre valeur propre que 0.

Exercice.. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

EXERCICE 44 | N1 | **Diagonalisibilité d'une matrice de rang 1 again.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 ($n \geqslant 2$).

Q1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Q2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq 0$.

Q3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A possède une valeur propre non nulle.

▲ *On a un résultat analogue pour les matrices.*

Thème abordé dans oral ESCP 1995 1.2, 1.13, 1998 2-19, 2007 2.16, 2008 2.15, 2009 2.1.

Remarque.. $\operatorname{rg} A = 1$ donc $\operatorname{rg} A < n$. Alors A n'est pas inversible. donc

1) 0 est valeur propre de A.

2) $\dim SEP(A,0) = n - \operatorname{rg} A = n-1$.

Q1 * Supposons A diagonalisable. Supposons que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors X^2 est un polynôme annulateur de A dont la seule racine est 0. Alors $\operatorname{Sp} A \subset \{0\}$.

Or $0 \in \operatorname{Sp} A$ donc $\operatorname{Sp} A = \{0\}$. Or $\dim SEP(A,0) = n-1 \neq n$. Ceci contredit le fait que A est diagonalisable.

Donc si A est diagonalisable $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

* Supposons que $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Montrons que A est diagonalisable.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

$\operatorname{rg} f = 1$. Donc $0 \in \operatorname{Sp} f$ et $\dim SEP(f,0) = \dim \operatorname{Ker}(f) = n-1$. Posons $E = \mathbb{K}^n$.

$\dim \operatorname{Im} f = 1$. Il existe alors un vecteur non nul u de E tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u)$.

$f(u) \in \operatorname{Im} f$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f(u) = \lambda u$. Supposons que $\lambda = 0$. $f(u) = 0_E$.

Alors $\operatorname{Im} f^2 = f(\operatorname{Im} f) = f(\operatorname{Vect}(u)) = \operatorname{Vect}(f(u)) = \{0_E\}$. Alors $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $A^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$!

Donc $\lambda \neq 0$, $u \neq 0$ et $f(u) = \lambda u$. $\lambda \in \operatorname{Sp} f$. $\{0, \lambda\} \subset \operatorname{Sp} f$.

$n = \dim E \geqslant \dim SEP(f,0) + \dim SEP(f,\lambda) = n-1 + \dim SEP(f,\lambda) \geqslant n-1+1 = n = \dim E$

$SEP(f,\lambda) \neq \{0_E\}$.

Ainsi $\dim E = \dim SEP(f,0) + \dim SEP(f,\lambda)$.

Alors $\operatorname{Sp} f = \{0,\lambda\}$ et f est diagonalisable. A est diagonalisable.

Si $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, A est diagonalisable.

Q2 Supposons que A est diagonalisable.

Comme $0 \in Sp A$ et $\dim SEP(A,0) = n-1$, A possède une autre valeur propre β.

Notons que $\dim SEP(A,\beta) = 1$.

Alors A est semblable à la matrice diagonale $D = Diag(0,0,\cdots,0,\beta)$.

deux matrices semblables ayant même trace il vient : $Tr(A) = Tr(D) = \beta \neq 0$.

Si A est diagonalisable : $Tr(A) \neq 0$.

Supposons que $Tr(A) \neq 0$ et montrons que A est diagonalisable.

Posons $E = \mathbb{K}^n$. Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique de E.

$\dim \operatorname{Ker} f = n-1$. Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$ une base de $\operatorname{Ker} f$.

$(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$ est une famille libre de E qui est de dimension n. Alors on peut compléter cette famille en une base $B' = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E.

$\forall k \in [\![1, n-1]\!], f(e_k) = 0_E$ et $\exists (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n, f(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$. Posons $A' = M_{B'}(f)$.

$A' = \begin{pmatrix} (0) & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} \end{pmatrix}$. Alors $Sp A' = \{0, a_n\}$ (A' est triangulaire supérieure) et $Tr(A') = a_n$.

A et A' sont semblables car ce sont deux matrices de f. Ainsi $Sp A = \{0, a_n\}$ et $Tr(A) = a_n$.

Comme la trace de A n'est pas nulle alors $a_n \neq 0$.

$Sp A = \{0, a_n\}$, $a_n \neq 0$ et $n \geq \dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,a_n) = n-1 + \underbrace{\dim SEP(A,a_n)}_{\dim SEP(A,a_n) \geq 1} \geq n$

Ainsi $Sp A = \{0, a_n\}$ et $\dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,a_n) = n$. A est diagonalisable.

Si $Tr(A) \neq 0$: A est diagonalisable.

Q3 * Supposons que 0 soit la seule valeur propre de A.

$\dim SEP(A,0) = n-1 \neq n$. A n'est pas diagonalisable.

* Supposons que A possède une autre valeur propre que 0.

Soit β une valeur propre de A différente de 0.

$n \geq \dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,\beta) = n-1 + \dim SEP(A,\beta) \geq n$

$\uparrow$ $\dim SEP(A,\beta) \geq 1$ car $SEP(A,\beta) \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$.

Alors $n = \dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,\beta)$.

Ainsi 1) 0 et β sont les seules valeurs propres de A ;

2) A est diagonalisable.

Ce qui précède permet de dire que <u>A est diagonalisable si et seulement si A possède une valeur propre non nulle.</u>

EXERCICE 45 **N2** **Lien entre la diagonalisibilité de f et celle de $\mathbf{f^2}$.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nulle. u est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.

Dans toute la suite on suppose u^2 diagonalisable.

Q2. On suppose que λ est une valeur propre non nulle de u^2 telle qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant $\alpha^2 = \lambda$.

Montrer que SEP $(u^2, \lambda) = \operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) \bigoplus \operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$.

En déduire qu'il existe une base de SEP (u^2, λ) constituée de vecteurs propres de u.

Q3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ alors u est diagonalisable. Et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Thème abordé dans oral ESCP 2000 2-1, 2005 2.6, 2012 2.2. Thème implicite dans oral ESCP 2006 2.17.

Q1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés aux valeurs propres γ_1, γ_2, ..., γ_n.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u(e_k) = \gamma_k\, e_k$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u^2(e_k) = \gamma_k^2\, e_k$. Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de u^2 respectivement associés aux valeurs propres γ_1^2, γ_2^2, ..., γ_n^2. u^2 est diagonalisable.

Soit x un élément de E de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$, $u(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, \gamma_k\, e_k$ et $u^2(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, \gamma_k^2\, e_k$.

$x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x) = 0_E \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k\, \gamma_k = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0$ ou $\gamma_k = 0$.

$x \in \operatorname{Ker} u \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0$ ou $\gamma_k^2 = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k\, \gamma_k^2 = 0 \iff u^2(x) = 0_E \iff x \in \operatorname{Ker} u^2$.

Alors $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ est diagonalisable alors } u^2 \text{ est diagonalisable et } \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u}.$$

Q2 a) Soit x un élément de $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E)$. $u(x) = \alpha\, x$ donc $u^2(x) = \alpha^2\, x = \lambda\, x$. Ainsi x appartient à $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E)$.

Par conséquent $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E)$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E)$. On montre de même que $\operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E)$.

Montrons maintenant que SEP $(u^2, \lambda) = \operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) \bigoplus \operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$.

Soit x un élément de SEP (u^2, λ). $u(x) = \lambda\, x$.

Montrons par analyse/synthèse qu'il existe un unique élément (y, z) de $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) \times \operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$ tel que $x = y + z$.

Analyse/unicité. Supposons que $x = y + z$ avec y dans $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E)$ et z dans $\operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$.

$u(y) = \alpha\, y$ et $u(z) = -\alpha\, z$ donc $u(x) = \alpha\, y - \alpha\, z$. $y + z = x$ et $y - z = \dfrac{1}{\alpha}\, u(x)$ (α n'est pas nul car λ n'est pas nul).

Par addition et soustraction on obtient : $y = \dfrac{1}{2\alpha}\Big(\alpha\, x + u(x)\Big)$ et $z = \dfrac{1}{2\alpha}\Big(\alpha\, x - u(x)\Big)$. D'où l'unicité de la décomposition.

Synthèse/existence. Posons : $y = \dfrac{1}{2\alpha}\Big(\alpha\, x + u(x)\Big)$ et $z = \dfrac{1}{2\alpha}\Big(\alpha\, x - u(x)\Big)$. Clairement $x = y + z$.

$u(y) = \dfrac{1}{2\alpha}\Big(\alpha\, u(x) + u^2(x)\Big) = \dfrac{1}{2\alpha}\Big(\alpha\, u(x) + \lambda\, x\Big) = \dfrac{1}{2\alpha}\Big(\alpha\, u(x) + \alpha^2\, x\Big) = \alpha\, \dfrac{1}{2\alpha}\Big(u(x) + \alpha\, x\Big) = \alpha\, y$. $y \in \operatorname{Ker}(f - \alpha\, Id_E)$.

On montre de la même manière que $z \in \operatorname{Ker}(f + \alpha\, Id_E)$. D'où l'existence de la décomposition.

$$\boxed{\text{SEP } \left(u^2,\lambda\right) = \text{Ker}(u-\alpha Id_E) \bigoplus \text{Ker}(u+\alpha Id_E)}.$$

Montrons qu'il existe une base de SEP $\left(u^2,\lambda\right)$ constituée de vecteurs propres de u. Envisageons trois cas.

• $\text{Ker}(u+\alpha Id_E)=\{0_E\}$. Alors SEP $\left(u^2,\lambda\right)=\text{Ker}(u-\alpha Id_E)$ donc toute base de SEP $\left(u^2,\lambda\right)$ est constituée de vecteurs propres de u associés à la valeur propre α.

• $\text{Ker}(u-\alpha Id_E)=\{0_E\}$. Alors SEP $\left(u^2,\lambda\right)=\text{Ker}(u+\alpha Id_E)$ donc toute base de SEP $\left(u^2,\lambda\right)$ est constituée de vecteurs propres de u associés à la valeur propre $-\alpha$.

• $\text{Ker}(u-\alpha Id_E)\neq\{0_E\}$ et $\text{Ker}(u+\alpha Id_E)\neq\{0_E\}$. Soient $\mathcal{S}_1$ une base de $\text{Ker}(u-\alpha Id_E)$ et $\mathcal{S}_2$ une base de $\text{Ker}(u+\alpha Id_E)$. $\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2$ est une base de SEP $\left(u^2,\lambda\right)$ constituée de vecteurs propres de u.

Si λ est une valeur propre non nulle de u^2 telle qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant $\alpha^2=\lambda$ alors il existe une base de SEP $\left(u^2,\lambda\right)$ constituée de vecteurs propres de u.

Q3 On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, que $\text{Ker}\,u^2=\text{Ker}\,u$ et que u^2 est diagonalisable. Montrons que u est diagonalisable.

1$^{\text{er}}$ cas : u^2 est l'endomorphisme nul.

Alors $\text{Ker}\,u=\text{Ker}\,u^2=E$. Ainsi u est également l'endomorphisme nul. Par conséquent u est diagonalisable.

2$^{\text{ème}}$ cas : u^2 est n'est pas l'endomorphisme nul.

Comme u^2 est diagonalisable, u^2 a au moins une valeur propre non nulle. Notons λ_1, λ_2, ..., λ_p les valeurs propres non nulles de u^2.

Comme $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, il existe α_k dans $\mathbb{K}$ tel que $\alpha_k^2=\lambda_k$.

D'après la question précédente, pour tout élément k de $[\![1,p]\!]$, il existe une base $\mathcal{B}_k$ de SEP $\left(u^2,\lambda_k\right)$ constituée de vecteurs propres de u.

Distinguons encore deux cas.

a) 0 n'est pas valeur propre de u^2.

$\text{Sp}\,u^2=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p\}$. u^2 est diagonalisable donc $E=\text{SEP }\left(u^2,\lambda_1\right)\bigoplus\text{SEP }\left(u^2,\lambda_2\right)\cdots\bigoplus\text{SEP }\left(u^2,\lambda_p\right)$.

Alors "$\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cdots\cup\mathcal{B}_p$" est une base de E constituée de vecteurs propres de u (et de u^2). Ainsi u est diagonalisable.

b) 0 est valeur propre de u^2.

Soit $\mathcal{B}_0$ une base de $\text{Ker}\,u^2$ et de $\text{Ker}\,u$. Les éléments de $\mathcal{B}_0$ sont des vecteurs propres de u et u^2.

$\text{Sp}\,u^2=\{0,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p\}$. u^2 est diagonalisable donc $E=\text{Ker}\,u^2\bigoplus\text{SEP }(f,\lambda_1)\bigoplus\text{SEP }(f,\lambda_2)\cdots\bigoplus\text{SEP }(f,\lambda_p)$.

Alors $\mathcal{B}_0\cup\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cdots\cup\mathcal{B}_p$ est alors une base de E constituée de vecteurs propres de u (et de u^2). Ainsi u est diagonalisable.

Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, u est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}\,u^2=\text{Ker}\,u$ et u^2 est diagonalisable.

Montrons que le résultat ne vaut pas si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et si l'espace vectoriel considéré est de dimension au moins deux.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$ avec $n\geqslant 2$.

Considérons l'endomorphisme u de E tel que $u(e_1)=e_2$, $u(e_2)=-e_1$ et $\forall k\in[\![3,n]\!],\ u(e_k)=e_k$.

$\big(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_n)\big)$ étant une base de E, u est un automorphisme de E car il transforme la base $\mathcal{B}$ de E en une base de E.

u^2 est un également un automorphisme de E comme composé de deux automorphismes de E.

Ainsi $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 = \{0_E\}$.

Visiblement $u^2 = -Id_E$. Finalement u^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.

1^{er} cas : $n = 2$.

Ici $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit λ un réel. $\lambda \in \operatorname{Sp} u \iff \lambda \in \operatorname{Sp} M_{\mathcal{B}}(u) \iff \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0$.

Donc u n'a pas de valeur propre et ainsi u n'est pas diagonalisable.

$2^{\text{ème}}$ cas : $n \geqslant 3$.

Soit λ un réel et soit $x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_n\, e_n$ un élément de E.

$$x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda\ \mathrm{Id}_E) \iff (u - \lambda\ \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E \iff (M_{\mathcal{B}}(u) - \lambda\ \mathrm{Id}_E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

$$x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda\ \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} -\lambda\, x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - \lambda\, x_2 = 0 \\ \forall k \in [\![3, n]\!],\ (1 - \lambda)\, x_k = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -\lambda\, x_1 \\ (1 + \lambda^2)\, x_1 = 0 \\ \forall k \in [\![3, n]\!],\ (1 - \lambda)\, x_k = 0 \end{cases}.$$

$$x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda\ \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ \forall k \in [\![3, n]\!],\ (1 - \lambda)\, x_k = 0 \end{cases} \text{ car } 1 + \lambda^2 \text{ n'est pas nul.}$$

Si $\lambda \neq 1$: $x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda\ \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ \forall k \in [\![3, n]\!],\ x_k = 0 \end{cases} \iff x = 0_E$, et λ n'est pas valeur propre de u.

Supposons que $\lambda = 1$. Alors $x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda\ \mathrm{Id}_E) \iff x_1 = x_2 = 0$.

Donc λ est valeur propre de u et SEP $(u, \lambda) = \operatorname{Vect}(e_3, e_4, \ldots, e_n)$.

Finalement $\operatorname{Sp} u = \{1\}$ et $\dim \text{SEP } (u, 1) = n - 2$. Donc u n'est pas diagonalisable.

Dans les deux cas u^2 est diagonalisable, $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ et u n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\text{Le résultat ne vaut pas si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ et si } n \geqslant 2.}$$

R.

EXERCICE 46

Exercice HEC 97 A étant une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ F(M) = AM.$$

Q1. Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. Montrer que F est bijective si et seulement si A est inversible.

Q3. a) Soit μ une valeur propre de A et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ un vecteur propre associé. Soient $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$. Montrer que ces matrices sont des vecteurs propres de F associés à μ.

b) Montrer que F et A ont même spectre.

Q4. Montrer que si A est diagonalisable alors F est diagonalisable.

Q5. Montrer que si F est diagonalisable alors A est diagonalisable.

Rappel.. tout l'exercice repose (ou peut reposer) sur ce qui suit.

Soit (E_1, E_2) la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La première (resp. seconde) colonne de N est NE_1 (resp. NE_2)

Nous la noterons $C_1(N)$ (resp. $C_2(N)$).

Q1 • $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. F est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda F(M) + F(N)$.

F est linéaire.

F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2 * Supposons que A est inversible.

Soit $M \in \operatorname{Ker} F$. $AM = F(M) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$; $M = A^{-1}AM = A^{-1}0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Alors $\operatorname{Ker} F = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$.

F est un endomorphisme injectif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.

Ainsi F est bijectif. F est une application linéaire bijective.

* Supposons que F est bijective.

$\forall N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\exists !\, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F(M) = N$ ou $AM = N$.

En particulier $\exists !\, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AM = I_2$ (on prend $N = I_2$!)

Ceci suffit pour dire que A est inversible.

<u>F est bijective si et seulement si A est inversible.</u>

Q3 a) Posons $M' = AM = A\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$.

$C_1(M') = AME_1 = A\,C_1(M) = AX = \mu X = \mu\, C_1(M) = C_1(\mu M)$.

$C_2(M') = AME_2 = A\,C_2(M) = A\,0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} = \mu\, 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} = \mu C_2(M) = C_2(\mu M)$.

M' et μM ont les mêmes colonnes. Ainsi $M' = \mu M$.

Donc $F(M) = AM = M' = \mu M$. De plus $C_1(M) = X \neq 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ donc $M \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

<u>Alors μ est une valeur propre de F et M est un vecteur propre associé.</u>

On montre de même que $F(N) = \mu N$ et $N \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

<u>N est un vecteur propre de F associé à la valeur propre μ.</u>

On pouvait faire cela à la main en posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$...

b) Nous venons de montrer que $\mathrm{Sp}\,A \subset \mathrm{Sp}\,F$. Montrons l'inverse.

Soit $\mu \in \mathrm{Sp}\,F$. $\exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F(M) = \mu M$ et $M \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

$AM = \mu M$ donc $AME_i = \mu M E_i$ pour $i \in [\![1,2]\!]$.

$\forall i \in [\![1,2]\!]$, $A\,C_i(M) = \mu\, C_i(M)$.

$AC_1(M) = \mu C_1(M)$ <u>et</u> $AC_2(M_2) = \mu C_2(M)$. (1)

$M \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ donc $C_1(M) \neq 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ <u>ou</u> $C_2(M) \neq 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ (2)

(1) et (2) permettent de dire que μ est valeur propre de A.

Ceci achève de montrer que $\mathrm{Sp}\,F \subset \mathrm{Sp}\,A$.

Finalement <u>$\mathrm{Sp}\,F = \mathrm{Sp}\,A$.</u>

Q4 Supposons que A est diagonalisable. Soit (X_1, X_2) une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres associés aux valeurs propres μ_1 et μ_2 (non nécessairement distinctes...).

Posons $X_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$, $M_1=\begin{pmatrix}x_1&0\\y_1&0\end{pmatrix}$, $N_1=\begin{pmatrix}0&x_1\\0&y_1\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}x_2&0\\y_2&0\end{pmatrix}$, $N_2=\begin{pmatrix}0&x_2\\0&y_2\end{pmatrix}$.

d'après Q3 c) $\mathcal{B}=(M_1,N_1,M_2,N_2)$ est une famille de vecteurs propres de F associés aux valeurs propres μ_1,μ_1,μ_2,μ_2. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{B}$ est de cardinal 4 et que $\dim M_2(\mathbb{R})=4$ il suffit de montrer que la famille est libre. Soit $(\alpha,\beta,\delta,S)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\alpha M_1+\beta N_1+\delta M_2+S N_2=0_{M_2(\mathbb{R})}$

Alors $0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}=0_{M_2(\mathbb{R})}E_1=\alpha M_1E_1+\beta N_1E_1+\delta M_2E_1+SN_2E_1$.

donc $\alpha C_1(M_1)+\beta C_1(N_1)+\delta C_1(M_2)+S C_1(N_2)=0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}$.

ou $\alpha X_1+\beta\, 0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}+\delta X_2+S\, 0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}=0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\alpha X_1+\delta X_2=0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}$ et (X_1,X_2) est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$.

Alors $\alpha=\delta=0$. De même en utilisant E_2 (et les secondes colonnes) on montre que $\beta=S=0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de $M_2(\mathbb{R})$.

Mieux c'est une base de $M_2(\mathbb{R})$. Mieux encore c'est une base de $M_2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de F.

Plus de doute : F est diagonalisable.

(Q5) Réciproquement supposons F diagonalisable et montrons que A est diagonalisable.

1er cas.. F a au moins deux valeurs propres distinctes. Alors A admet deux valeurs propres distinctes. Comme $A\in M_2(\mathbb{R})$: A est diagonalisable.

2e cas.. F admet une seule valeur propre λ.

Alors $M_2(\mathbb{R})=SEP(F,\lambda)=\mathrm{Ker}(F-\lambda\,\mathrm{Id}_{M_2(\mathbb{R})})$. Donc $F=\lambda\,\mathrm{Id}_{M_2(\mathbb{R})}$.

donc $\forall M\in M_2(\mathbb{R})$, $AM=F(M)=\lambda M$. En particulier $AI_2=\lambda I_2$;

Ainsi $A=\lambda I_2$. A est diagonalisable ! (A est diagonale !)

Moralité.. F est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

K..

1

EXERCICE 47

Exercice $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \circ \mathbf{v}$. **Lien entre la réduction de φ et celle de u. Oral ESCP 2005.**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \geqslant 1$.

On considère un endomorphisme u de E et on note φ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$\forall v \in \mathcal{L}(E), \varphi(v) = u \circ v$.

Q1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de φ, alors λ est une valeur propre de u.

b) Etablir la réciproque (on pourra faire intervenir un projecteur).

Q3. a) Notons $E(\lambda, \varphi)$ le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ et $E(\lambda, u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ. notations calamiteuses !!

Montrer que $E(\lambda, \varphi) = \mathcal{L}(E, E(\lambda, u))$.

b) En déduire que φ est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Q1 • $u \in \mathcal{L}(E)$ donc $\forall v \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(v) = u \circ v \in \mathcal{L}(E)$.

φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

• $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (v,w) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, $\varphi(\lambda v + w) = u \circ (\lambda v + w) = \lambda u \circ v + u \circ w = \lambda \varphi(v) + \varphi(w)$.

φ est linéaire.

Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Q2 a) Supposons que λ est valeur propre de φ. $\exists v \in \mathcal{L}(E)$, $v \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\varphi(v) = \lambda v$.

$v \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\exists t \in E$, $v(t) \neq 0_E$.

$\lambda v(t) = \varphi(v)(t) = (u \circ v)(t) = u(v(t))$.

Ainsi $u(v(t)) = \lambda v(t)$ et $v(t) \neq 0_E$ donc λ est valeur propre de u.

b) Supposons que λ est valeur propre de u. $\exists x \in E$, $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.

Posons $D = \mathrm{Vect}(x)$. Soit D' un supplémentaire de D dans E.

Soit p la projection sur D parallèlement à D'.

• $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $\mathrm{Im}\, p = D = \mathrm{Vect}(x) \neq \{0_E\}$.

• Montrons que $\varphi(p) = \lambda p$. Soit à montrer que $u \circ p = \lambda p$ ou

que $(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou que : $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$!

$\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Vect}(x) \subset SEP(u,\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

$\uparrow$ car x est un vecteur propre de u associé à λ

Alors $\forall y \in \mathrm{Im}\, p$, $(u-\lambda \mathrm{Id}_E)(y) = 0$. Donc $\forall t \in E$, $(u-\lambda \mathrm{Id}_E)(p(t)) = 0_E$.

$\forall t \in E, \big((u-\lambda \mathrm{Id}_E)\circ p\big)(t) = 0_E$. $(u-\lambda \mathrm{Id}_E)\circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Puis $u\circ p - \lambda p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $u \circ p = \lambda p$. $\underline{\varphi(p) = \lambda p}$.

$\varphi(p) = \lambda p$ avec $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\varphi$.

Finalement : $\underline{\underline{\mathrm{Sp}\, u = \mathrm{Sp}\,\varphi}}$.

Q3 a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$f \in E(\lambda,\varphi) \Leftrightarrow f \in SEP(\varphi,\lambda) \Leftrightarrow \varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow u\circ f = \lambda f$.

$f \in E(\lambda,\varphi) \Leftrightarrow \forall t \in E, u(f(t)) = \lambda f(t) \Leftrightarrow \forall t \in E, f(t) \in SEP(u,\lambda)$.

$f \in E(\lambda,\varphi) \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset SEP(u,\lambda) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} f \in \mathcal{L}(E, SEP(u,\lambda))$.

Ainsi $\underline{E(\lambda,\varphi) \overset{(*)}{=} \mathcal{L}(E, E(\lambda,u))}$ ou $\underline{\underline{SEP(\varphi,\lambda) \overset{(*)}{=} \mathcal{L}(E, SEP(u,\lambda))}}$.

b) Rappelons que $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2 = n^2$ et pour tout sous-espace F de E

$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F = n \times \dim F$.

φ diagonalisable $\Leftrightarrow \dim \mathcal{L}(E) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\varphi} \dim SEP(\varphi,\lambda) \overset{\mathrm{Sp}\,\varphi = \mathrm{Sp}\, u}{\Leftrightarrow} n^2 = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \dim \mathcal{L}(E, SEP(u,\lambda))$.

φ diagonalisable $\Leftrightarrow n^2 = \sum\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}\, u} n \times \dim SEP(u,\lambda) \underset{n\neq 0}{\Leftrightarrow} n = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \dim SEP(u,\lambda)$.

φ diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \dim SEP(u,\lambda) \Leftrightarrow u$ diagonalisable.

$\underline{\underline{\varphi \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow u \text{ diagonalisable}}}$.

Remarques. - 1°) Les arguments de Q3 a) permettent de retrouver rapidement les résultats de Q2 ($\mathcal{L}(E, E(\lambda,u)) \neq \{0\} \Leftrightarrow E(\lambda,u) \neq \{0\}$ ...)

2°) Clairement (*) est impropre ! Il aurait plutôt fallu mettre que $SEP(\varphi,\lambda)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E, SEP(u,\lambda))$ ...

R.

EXERCICE 48 **N2** **Lien entre la diagonalisabilité de A et de $M \to AM$. ESCP 2009 2.18**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit T sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ T(M) = AM$.

Q1. a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que λ est une valeur propre de T en exhibant une matrice propre associée.

Q3. On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A.

a) En considérant les matrice $X_i\,{}^tX_j$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, montrer que T est diagonalisable.

b) Déterminer le rang de $X_i\,{}^tX_j$.

On admet que toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

Q4. On suppose dans cette question que T est diagonalisable. Soit $(M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une base de vecteurs propres de T.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, définie par $\varphi(M) = MX$ est une application linéaire surjective.

b) En considérant la famille $\big(\varphi(M_{i,j})\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, montrer que A est diagonalisable.

JFC : c) Montrer le résultat admis.

Thème abordé dans oral ESCP 1994 2.1 avec $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On trouve dans oral ESCP 1994 2.5 $M \to AMB$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec des matrices A et B particulière.

Q1 a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$T(\lambda M+N) = A(\lambda M+N) = \lambda AM + AN = \lambda T(M) + T(N)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ T(\lambda M+N) = \lambda T(M) + T(N)$. T est linéaire.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ T(M) = AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. T est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ainsi T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) * Supposons que T est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors T est bijectif.

$\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists!\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ T(M) = N$

En particulier $\exists!\, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ T(A') = I_n$. Alors $AA' = I_n$.

Ceci suffit pour dire que A est inversible.

* Réciproquement supposons que A est inversible. Soit $M \in \operatorname{Ker} T$.

$T(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. $AM = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. $M = A^{-1}AM = A^{-1}0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Donc $\operatorname{Ker} T = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\}$. Alors T est un endomorphisme injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors T est bijectif donc T est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Finalement <u>T est un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ si et seulement si A est inversible.</u>

(Q2) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
Soit M la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont la première colonne est X et dont les autres colonnes sont nulles.

$X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$ donc la première colonne de M n'est pas nulle ainsi M n'est pas la matrice nulle de $M_n(\mathbb{C})$. Montrons que $T(M)=\lambda M$ c'est à dire que $AM=\lambda M$.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$.

Pour tout N dans $M_n(\mathbb{C})$, NE_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de N si j est un élément de $[\![1,n]\!]$.

Alors $ME_1 = X$ donc $AME_1 = AX = \lambda X = \lambda ME_1 = (\lambda M)E_1$. $(AM)E_1 = (\lambda M)E_1$.

Soit $j \in [\![2,n]\!]$, $AME_j = A0_{M_{n,1}(\mathbb{C})} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})} = \lambda\, 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})} = \lambda(ME_j) = (\lambda M)E_j$. $(AM)E_j = (\lambda M)E_j$.

Finalement $\forall j \in [\![1,n]\!], (AM)E_j = (\lambda M)E_j$. Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de AM est égale à la $j^{\text{ième}}$ colonne de λM. Donc $AM=\lambda M$.

Alors $M \neq 0_{M_n(\mathbb{C})}$ et $T(M)=\lambda M$. λ est donc une valeur propre de T.

<u>Toute valeur propre de A est une valeur propre de T.</u>

(Q3) a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ il existe α_i dans $\mathbb{C}$ tel que $AX_i = \alpha_i X_i$.
Montrons que $(X_i{}^tX_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de T.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $T(X_i{}^tX_j) = AX_i{}^tX_j = \alpha_i X_i{}^tX_j$. <u>$T(X_i{}^tX_j) = \alpha_i X_i{}^tX_j$.</u>

Posons $X_i = \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$ et $X_j = \begin{pmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\vdots\\\sigma_n\end{pmatrix}$. $X_i{}^tX_j = \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}(\sigma_1\ \sigma_2 \dots \sigma_n) = (\beta_p\, \sigma_q)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$.

$X_i \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $X_j \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$. Alors $\exists p_0 \in [\![1,n]\!], \exists q_0 \in [\![1,n]\!]$, $\beta_{p_0} \neq 0$ et $\sigma_{q_0} \neq 0$.

donc $\beta_{p_0}\sigma_{q_0} \neq 0$. Alors $X_i{}^tX_j$ a au moins un coefficient différent de 0. Donc <u>$X_i{}^tX_j \neq 0_{M_n(\mathbb{C})}$</u>

Ainsi <u>$X_i{}^tX_j$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre α_i.</u>

montrons que $(X_i{}^tX_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$. Il suffit de montrer que cette famille est libre car sa cardinal n^2 coïncide avec la dimension de $M_n(\mathbb{C})$.

Soit $(\beta_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}X_i{}^tX_j = 0_{M_n(\mathbb{C})}$

Soit $k\in[\![1,n]\!]$.

$$0_{M_{n,1}(\mathbb{C})} = 0_{M_n(\mathbb{C})}E_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}X_i{}^tX_jE_k \underset{\substack{\uparrow\\ {}^tX_jE_k\in\mathbb{C}}}{=} \sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}\,{}^tX_jE_k}_{\in\mathbb{C}}\Big)X_i.$$

Comme $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{C})$, $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est libre.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}\,{}^tX_jE_k = 0_{\mathbb{C}}$.

Mieux $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}\,{}^tX_jE_k = 0_{\mathbb{C}}$. Fixons i dans $[\![1,n]\!]$.

Posons $\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}\,{}^tX_j = (s_1\ s_2\dots s_n)$.

$0_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}\,{}^tX_jE_k = s_k$ et ceci pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $s_k=0$.

Alors $\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}\,{}^tX_j = 0_{M_{1,n}(\mathbb{C})}$. En transposant $\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}X_j = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$.

La liberté de $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ donne alors $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\beta_{i,j}=0$.

Ainsi $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\beta_{i,j}=0$. Ceci achève de montrer que $(X_i{}^tX_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une famille libre et même une base de $M_n(\mathbb{C})$.

c'est même une base de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de T.

Ainsi <u>T est diagonalisable</u>

b) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Posons $X_i = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ et $X_j = \begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_n\end{pmatrix}$.

$X_i{}^tX_j = (\beta_p\delta_q)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$. Alors la $q^{\text{ième}}$ colonne de $X_i{}^tX_j$ est $\delta_q X_i$.

$\operatorname{rg} X_i{}^tX_j = \dim \operatorname{Vect}(\delta_1X_i,\delta_2X_i,\dots,\delta_nX_i) \underset{\uparrow}{=} \dim\operatorname{Vect}(X_i) \overset{\substack{X_i\neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}\\ \downarrow}}{=} 1$

$\uparrow$ $X_j\neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$ donc $\exists q_0\in[\![1,n]\!]$, $\delta_{q_0}\neq 0$.

$\operatorname{rg}(X_i{}^tX_j)=1$.

R.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $X_i\,{}^tX_j$ est de rang 1.

Q4 a) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $MX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(M) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

donc φ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\varphi(\lambda M+N) = (\lambda M+N)X = \lambda MX + NX = \lambda\varphi(M)+\varphi(N)$. φ est linéaire.

Ainsi φ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. $\exists k \in [\![1,n]\!]$, $x_k \neq 0$.

Alors ${}^tE_k X = x_k$ donc $\frac{1}{x_k}\,{}^tE_k X = 1$. Alors $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\frac{1}{x_k} Y\,{}^tE_k X = Y$.

${}^tE_k = (0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0)$

$k$ième composante

donc $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\varphi\left(\frac{1}{x_k} Y\,{}^tE_k\right) = Y$. Ainsi tout élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ possède un antécédent par φ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors φ est surjective.

φ est une application linéaire surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

b) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\exists \lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$, $AM_{i,j} = \lambda_{i,j} M_{i,j}$ et $M_{i,j} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $AM_{i,j}X = \lambda_{i,j}(M_{i,j}X)$ ou $A\varphi(M_{i,j}) = \lambda_{i,j}\varphi(M_{i,j})$.

Rappelons que φ est une application linéaire surjective.

Alors $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \varphi(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \varphi\left(\mathrm{Vect}\left((M_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right)\right) = \mathrm{Vect}\left((\varphi(M_{i,j}))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right)$.

$(M_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$(\varphi(M_{i,j}))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

Donc on peut extraire de cette famille une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Plus précisément il existe une partie finie K de $[\![1,n]\!]^2$ telle que $(\varphi(M_{i,j}))_{(i,j)\in K}$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

dans ces conditions 1) $(\varphi(M_{i,j}))_{(i,j)\in K}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

2) $\forall (i,j) \in K$, $A\varphi(M_{i,j}) = \lambda_{i,j}\varphi(M_{i,j})$

3) $\forall (i,j) \in K$, $\varphi(M_{i,j}) \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ (une base ne contient pas le vecteur nul).

R.

Finalement $(\varphi(m_{ij}))_{(i,j)\in K}$ est une base de $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A.

Alors <u>A est diagonalisable.</u>

Ceci achève de montrer que <u>φ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.</u>

c) Montrons que A possède au moins une valeur propre.

$(I, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de cardinal n^2. Comme $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = n^2$, cette famille est liée. Alors $\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2+1}$, $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \neq O_{\mathbb{K}^{n^2+1}}$.

Posons $P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$. P est un polynôme annulateur non nul de A.

Supposons que P est constant. Alors $a_1 = a_2 = \dots = a_{n^2} = 0$ et $a_0 \neq 0$ car P est non nul.

Donc $O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = P(A) = a_0 I_n$. Comme a_0 n'est pas nul : $I_n = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$!! Donc P n'est pas constant.

$P \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg P \geq 1$. Ainsi P est scindé. $\exists c \in \mathbb{N}^*$, $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r) \in \mathbb{C}^r$, $P = c \prod_{k=1}^{r} (X - \mu_k)$

Alors $O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = c \prod_{k=1}^{r} (A - \mu_k I_n)$ et $c \neq 0$. Donc $\prod_{k=1}^{r} (A - \mu_k I_n) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. La matrice $\prod_{k=1}^{r} (A - \mu_k I_n)$ n'est donc pas inversible ! Un produit de matrices inversibles étant une matrice inversible nécessairement l'une des matrices $A - \mu_1 I_n$, $A - \mu_2 I_n, \dots, A - \mu_r I_n$ n'est pas inversible.

$\exists k_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $A - \mu_{k_0} I_n$ ne soit pas inversible. $\mu_{k_0} \in \mathrm{Sp}\, A$.

Ainsi <u>A admet au moins une valeur propre.</u>

K.

EXERCICE 49

Exercice **L'endomorphisme $\varphi : \mathbf{M} \to \mathbf{AM} - \mathbf{MA}$**

Q1 $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

a) Montrer que la famille $(E_i{}^tE_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ sont deux **bases** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Montrer que si i et j sont deux éléments de $[\![1,n]\!]$: $E_i{}^tE_j$ est combinaison linéaire de la famille $(X_p{}^tY_q)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$.

En déduire proprement et simplement que $(X_p{}^tY_q)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans la suite A est une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On pose, pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = AM - MA$.

Q2 Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q3 Soit X est un vecteur propre de A associé à la valeur λ et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur μ

a) Montrer que $X{}^tY$ est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $X{}^tY$ est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda - \mu$.

Q4 a) Montrer que toute valeur propre de A est une valeur propre de ${}^tA$. Comparer $\operatorname{Sp} A$ et $\operatorname{Sp}{}^tA$.

b) Montrer que ${}^tA$ est digonalisable (on pourra utiliser la semblablité... et retrouver les résultats de a) !)

Q5 a) Utiliser Q4 b), Q1 b) et Q3 b) pour montrer que φ est digonalisable.

b) Écrire le $\operatorname{Sp}\varphi$ avec les éléments de $\operatorname{Sp} A$. φ est-il un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Q1 a) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. Posons $E_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $E_j = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Notons que $E_i{}^tE_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $E_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et ${}^tE_j \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Posons $E_i{}^tE_j = (a_{p,q})_{\substack{1\leq p\leq n \\ 1\leq q\leq n}}$. $\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{p,q} = x_p y_q$

Ainsi $\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } (p,q) = (i,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j}$ est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_i{}^tE_j = E_{i,j}$.

Donc $(E_i{}^tE_j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$(X_1,\dots,X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $E_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc $\exists (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $E_i = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p X_p$. De même $\exists (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $E_j = \sum_{q=1}^{n} \beta_q Y_q$.

Alors $E_i {}^tE_j = \left(\sum_{p=1}^{n} \alpha_p X_p\right) {}^t\!\left(\sum_{q=1}^{n} \beta_q Y_q\right) = \left(\sum_{p=1}^{n} \alpha_p X_p\right)\left(\sum_{q=1}^{n} \beta_q {}^tY_q\right)$

Donc $E_i {}^tE_j = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \alpha_p \beta_q X_p {}^tY_q$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_i {}^tE_j$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $(X_p {}^tY_q)_{\substack{1 \le p \le n \\ 1 \le q \le n}}$.

Alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left((E_i {}^tE_j)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}\right) \subset \mathrm{Vect}\left((X_p {}^tY_q)_{\substack{1 \le p \le n \\ 1 \le q \le n}}\right) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left((X_p {}^tY_q)_{\substack{1 \le p \le n \\ 1 \le q \le n}}\right)$. Alors la famille $(X_p {}^tY_q)_{\substack{1 \le p \le n \\ 1 \le q \le n}}$ est une famille génératrice de cardinal n^2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2.

Ainsi $(X_p {}^tY_q)_{\substack{1 \le p \le n \\ 1 \le q \le n}}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(Q2) • $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; φ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Soit $(M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\varphi(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda AM + AN - \lambda MA - NA = \lambda(AM - MA) + AN - NA = \lambda \varphi(M) + \varphi(N)$.

φ est donc linéaire.

φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(Q3) a) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et ${}^tY \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Ainsi $X {}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Puis $X {}^tY = (x_i y_j)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$.

X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. ${}^tA$) donc $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ (resp. $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$)

Ainsi $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $x_{i_0} \neq 0$ et $\exists j_0 \in [\![1,n]\!]$, $y_{j_0} \neq 0$.

Alors $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$ ... $X {}^tY$ possède donc un coefficient non nul

X^tY est une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{K})$.

b) $AX=\lambda X$ et ${}^tAY=\mu Y$. Alors $AX=\lambda X$ et ${}^tYA={}^t({}^tAY)=\mu\,{}^tY$.

Ainsi $\varphi(X^tY)=AX^tY-X^tYA=(\lambda X)^tY-X(\mu^tY)=(\lambda-\mu)(X^tY)$.

$X^tY\in M_n(\mathbb{K})$, $X^tY\neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$ et $\varphi(X^tY)=(\lambda-\mu)X^tY$.

Alors X^tY est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda-\mu$.

Q4 **a)** Soit λ une valeur propre de A.

$A-\lambda I_n$ n'est pas inversible.

Ainsi ${}^tA-\lambda I_n={}^t(A-\lambda I_n)$ n'est pas inversible

Alors λ est valeur propre de ${}^tA$.

Toute valeur propre de A est une valeur propre de ${}^tA$.

Donc $Sp\,A\subset Sp\,{}^tA$

Mais alors $Sp\,{}^tA\subset Sp\,{}^t({}^tA)$ $\quad$ ($A:={}^tA$!!!) ; donc $Sp\,{}^tA\subset Sp\,A$.

Finalement $Sp\,A=Sp\,{}^tA$.

b) A est diagonalisable. Il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $P^{-1}AP=D$.

Alors ${}^t(P^{-1}AP)={}^tD$ donc ${}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1}={}^tD=D$!

Posons $Q={}^tP^{-1}$. $\quad P^{-1}$ étant inversible : Q est inversible

et $Q^{-1}={}^t(P^{-1})^{-1}={}^tP$

Alors $Q\in GL_n(\mathbb{K})$ et $D={}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1}=Q^{-1}\,{}^tA\,Q$.

Donc ${}^tA$ est semblable à la matrice diagonale D.

${}^tA$ est diagonalisable.

Remarque .. $Sp\,{}^tA=Sp\,D=Sp\,A$; $Sp\,{}^tA=Sp\,A$.

on retrouve le résultat de a)

Notons que cette démonstration utilise le fait que A est diagonalisable mais pas celle de a) ...

Q5 a) A (resp. ${}^tA$) est diagonalisable donc il existe une base $(X_1,\dots,X_n)$ (resp. $(Y_1,\dots,Y_n)$) de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A (resp. ${}^tA$) associés aux valeurs propres $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ (resp. $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$).

Alors 1) $(X_p{}^tY_q)_{\substack{1\leq p\leq n\\1\leq q\leq n}}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$ d'après Q 1 b

2) Pour tout (p,q) dans $[\![1,n]\!]^2$, $X_p{}^tY_q$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\alpha_p-\beta_q$ d'après Q 3 b

Alors $(X_p{}^tY_q)_{\substack{1\leq p\leq n\\1\leq q\leq n}}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de φ.

Ainsi φ est diagonalisable.

b) 1) et 2) de a) ↑ permettent de dire que :

$$Sp\,\varphi = \{\alpha_i-\beta_j \,;\, (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\}.$$

Or $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\} = Sp\,A = Sp\,{}^tA = \{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$.

Ainsi $Sp\,\varphi = \{\lambda-\mu \,;\, (\lambda,\mu)\in(Sp\,A)^2\}$.

Alors $\{\lambda-\lambda \,;\, \lambda\in Sp\,A\}\subset Sp\,\varphi$!!

Donc $\{0\}\subset Sp\,\varphi$. $0\in Sp\,\varphi$

0 est valeur propre de φ. φ n'est pas injectif.

φ n'est pas un automorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.

EXERCICE 50 **N2** **Diagonalisibilité de l'endomorphisme $v \to v \circ u - u \circ v$ de $\mathcal{L}$(E).**

Ce sont les deux dernières parties d'un problème qui figure dans les sujets proposés à la fin de cet article.

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \geqslant 1$). f est un endomorphisme de E.

On note Φ_f l'application qui à tout élément g de $\mathcal{L}(E)$ associe $f \circ g - g \circ f$. Φ_f est clairement un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Partie IV ► Ici f est diagonalisable. On se propose de montrer que Φ_f est diagonalisable.

λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de f.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

$(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, $u_{i,j}$ est l'endomorphisme de E de matrice $E_{i,j}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Calculer $\Phi_f(u_{i,j})$ pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$. En déduire que Φ_f est diagonalisable et préciser son spectre.

Q2. a) Montrer que $\operatorname{Ker}\Phi_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in [\![1,p]\!],\ g(\text{SEP}\ (f,\lambda_i)) \subset \text{SEP}\ (f,\lambda_i)\}$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker}\Phi_f$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\text{SEP}\ (f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(\text{SEP}\ (f,\lambda_2)) \times \cdots \times \mathcal{L}(\text{SEP}\ (f,\lambda_p))$.

c) Préciser la dimension de $\operatorname{Ker}\Phi_f$ et le $\operatorname{rg}\Phi_f$. Et si $p = n$?

Partie V

Dans cette partie on suppose que Φ_f est diagonalisable. On se propose de montrer que f est diagonalisable.

Q1. On suppose que f admet au moins une valeur propre λ. $(g_1, g_2, \dots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de Φ_f respectivement associés aux valeurs propres β_1, β_2, ..., β_{n^2} et x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

a) Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, calculer $f\big(g_i(x)\big)$ en fonction de λ, β_i et $g_i(x)$.

b) On pose $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(g) = g(x)$. Montrer que φ est une application linéaire surjective de $\mathcal{L}(E)$ dans E.

c) Montrer que f est diagonalisable.

On se propose de montrer que le spectre de f n'est pas vide.

Q2. Ici $K = \mathbb{C}$.

a) Montrer que f possède un polynôme annulateur non nul P.

b) En remarquant que P est scindé montrer qu'au moins une des racines de P est une valeur propre de f. Conclure.

Q3. Ici $K = \mathbb{R}$ et on raisonne par l'absurde. Supposons que f n'a pas de valeur propre. Soit A la matrice de f dans une base de E.

On considère l'endomorphisme ψ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\psi_A(M) = AM - MA$.

On considère également l'endomorphisme $\widehat{\psi_A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\widehat{\psi_A}(M) = AM - MA$.

a) Montrer que ψ_A est diagonalisable.

Montrer que $\widehat{\psi_A}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles.

b) Montrer qu'il existe un complexe non réel γ valeur propre de A. Montrer que $\bar{\gamma}$ est valeur propre de A et de ${}^tA$.

Soit X (resp. Y) un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \gamma X$ (${}^tAY = \bar{\gamma}Y$).

Calculer $\widehat{\psi_A}(X{}^tY)$ et en déduire une contradiction.

Q4. Conclure.

PARTIE IV Réduction de ϕ_f lorsque f est diagonalisable

Q1 Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_i \text{ si } k=j \\ 0_E \text{ si } k \neq j \end{cases}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k) = (f \circ u_{i,j} - u_{i,j} \circ f)(e_k) = f(u_{i,j}(e_k)) - u_{i,j}(f(e_k))$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k) = f(u_{i,j}(e_k)) - u_{i,j}(\alpha_k e_k) = f(u_{i,j}(e_k)) - \alpha_k u_{i,j}(e_k)$.

$\forall k \in [\![1,n]\!] - \{j\}$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k) = f(0_E) - \alpha_k 0_E = 0_E$.

$\phi_f(u_{i,j})(e_j) = f(u_{i,j}(e_j)) - \alpha_j u_{i,j}(e_j) = f(e_i) - \alpha_j e_i = \alpha_i e_i - \alpha_j e_i = (\alpha_i - \alpha_j) e_i$.

$\phi_f(u_{i,j})(e_j) = (\alpha_i - \alpha_j) e_i = (\alpha_i - \alpha_j) u_{i,j}(e_j)$.

Notons que $\forall k \in [\![1,n]\!] - \{j\}$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k) = 0_E = (\alpha_i - \alpha_j) u_{i,j}(e_k)$.

Ainsi les endomorphismes $\phi_f(u_{i,j})$ et $(\alpha_i - \alpha_j) u_{i,j}$ coïncident sur la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. Ils sont donc égaux.

Finalement $\underline{\underline{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \phi_f(u_{i,j}) = (\alpha_i - \alpha_j) u_{i,j}}}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $M_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = E_{i,j} \neq 0_{M_n(K)}$ donc $u_{i,j} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $\alpha_i - \alpha_j$ est une valeur propre de ϕ_f et $u_{i,j}$ est un vecteur associé.

Notons que $(u_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$. Comme cette famille a pour cardinal n^2 qui est la dimension de $\mathcal{L}(E)$ il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $(\gamma_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ une famille d'éléments de K telle que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} u_{i,j} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors $0_{M_n(K)} = M_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{L}(E)}) = M_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} u_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} M_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} E_{i,j}$

C'est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Comme la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est libre : $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \delta_{i,j}=0$.

Ceci achève de montrer que la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est libre.

D'après ce qui a été dit plus haut $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

Mieux c'est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de ϕ_f.

Alors <u>ϕ_f est diagonalisable</u>.

Rappelons que pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $u_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_f associé à la valeur propre d_i-d_j. Comme $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$: <u>$Sp\,\phi_f=\{d_i-d_j\ ;\ (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\}$</u> ou

<u>$Sp\,\phi_f=\{\lambda_i-\lambda_j\ ;\ (i,j)\in[\![1,p]\!]^2\}$.</u>

Q2 a) * Soit $g\in \mathrm{Ker}\,\phi_f$. Soit $i\in[\![1,p]\!]$. Soit $x\in SEP(f,\lambda_i)$.

$\phi_f(g)=0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $f\circ g-g\circ f=0_{\mathcal{L}(E)}$.

$0_E=f(g(x))-g(f(x))=f(g(x))-g(\lambda_i x)=f(g(x))-\lambda_i g(x)$.

$0_E=(f-\lambda_i Id_E)(g(x))$. Alors $g(x)\in SEP(f,\lambda_i)$.

Ainsi $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\forall x\in SEP(f,\lambda_i)$, $g(x)\in SEP(f,\lambda_i)$. $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $g(SEP(f,\lambda_i))\subset SEP(f,\lambda_i)$.

* Réciproquement soit g un endomorphisme de E tel que :

$\forall i\in[\![1,p]\!]$, $g(SEP(f,\lambda_i))\subset SEP(f,\lambda_i)$. Montrons que $g\in \mathrm{Ker}\,\phi_f$.

$\phi_f(g)=f\circ g-g\circ f$. Soit $x\in E$. $\exists!\,(x_1,\dots,x_p)\in SEP(f,\lambda_1)\times\dots\times SEP(f,\lambda_p)$,

$x=\sum_{i=1}^{p}x_i$. $\phi_f(g)(x)=\phi_f(g)\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\phi_f(g)(x_i)=\sum_{i=1}^{p}(f\circ g-g\circ f)(x_i)$.

$\phi_f(g)(x)=\sum_{i=1}^{p}\left(f(g(x_i))-g(f(x_i))\right)=\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i g(x_i)-g(\lambda_i x_i)\right)=\sum_{i=1}^{p}0_E=0_E$

Alors $\forall x \in E$, $\Phi_f(g)(x) = 0_E$. $\Phi_f(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $g \in \operatorname{Ker} \Phi_f$.

Finalement $\underline{\underline{\operatorname{Ker} \Phi_f = \{ g \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in [\![1,p]\!],\ g(SEP(f,\lambda_i)) \subset SEP(f,\lambda_i) \}}}$.

Remarque.. $\operatorname{Ker} \Phi_f$ est l'ensemble des endomorphismes de E qui laissent stables les sous-espaces propres de f.

b) Soit $h \in \operatorname{Ker} \Phi_f$. $SEP(f,\lambda_1), \dots, SEP(f,\lambda_p)$ sont stables par h.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ nous notons h_i l'endomorphisme de $SEP(f,\lambda_i)$ qui à tout x dans $SEP(f,\lambda_i)$ associe $h(x)$.

Posons $\forall h \in \operatorname{Ker} \Phi_f$, $T(h) = (h_1, h_2, \dots, h_p)$.

<u>T est une application de $\operatorname{Ker} \Phi_f$ dans $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.</u>

Montrons que T est un isomorphisme.

* Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(h, \tilde{h}) \in \operatorname{Ker} \Phi_f \times \operatorname{Ker} \Phi_f$.

$T(\lambda h + \tilde{h}) = ((\lambda h + \tilde{h})_1, (\lambda h + \tilde{h})_2, \dots, (\lambda h + \tilde{h})_p)$.

$T(\lambda h + \tilde{h}) = (\lambda h_1 + \tilde{h}_1, \lambda h_2 + \tilde{h}_2, \dots, \lambda h_p + \tilde{h}_p)$

$T(\lambda h + \tilde{h}) = \lambda (h_1, h_2, \dots, h_p) + (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_p) = \lambda T(h) + T(\tilde{h})$.

<u>T est linéaire.</u>

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ un élément de $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.

Montrons par analyse-synthèse que $\exists !\, h \in \operatorname{Ker} \Phi_f$, $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

* Supposons que h soit un élément de $\operatorname{Ker} \Phi_f$ tel que $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

Soit $x \in E$. $\exists !\, (x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

$h(x) = \sum_{i=1}^{p} h(x_i) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i)$

donc $h(x) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i)$ où $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$

d'où l'unicité de h.

* Soit h l'application de E dans E qui à tout x élément de E tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$ associe $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i)$. Notons que $h \in \ker \Phi_f$ et que $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

→ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(x,y) \in E^2$.

$\exists!\,(x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

$\exists!\,(y_1, y_2, \dots, y_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$, $y = \sum_{i=1}^{p} y_i$

$\lambda x + y = \sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i + y_i)$ et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda x_i + y_i \in SEP(f,\lambda_i)$.

Alors $h(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(y_i) = \lambda h(x) + h(y)$

$\varphi_i \in \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_i))$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.

Par conséquent h est linéaire.

→ Donc $h \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in SEP(f,\lambda_i)$. Pour $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $x_k = \begin{cases} x & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$

$x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$.

Donc $h(x) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \varphi_k(0_E) + \varphi_i(x_i) = \varphi_i(x_i) = \varphi_i(x) \in SEP(f,\lambda_i)$

$\begin{cases} \varphi_i \in \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_i)) \\ x \in SEP(f,\lambda_i) \end{cases}$

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in SEP(f,\lambda_i)$, $h(x) \in SEP(f,\lambda_i)$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $h(SEP(f,\lambda_i)) \subset SEP(f,\lambda_i)$.

Donc $h \in \ker \Phi_f$.

→ Nous avons vu que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in SEP(f,\lambda_i)$: $h(x) = \varphi_i(x)$.

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in SEP(f,\lambda_i)$, $h_i(x) = h(x) = \varphi_i(x)$.

$\dots [\![1,p]\!]$, $h_i = \varphi_i$, donc $T(h) = (h_1, h_2, \dots, h_p) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

Ceci achève de montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ admet un antécédent et un seul dans $\operatorname{Ker} \phi_f$ par T.

Ceci pour tout $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ dans $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.

Donc T est une application linéaire bijective de $\operatorname{Ker} \phi_f$ dans $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.

<u>$\operatorname{Ker} \phi_f$ est isomorphe à $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.</u>

<u>c)</u> Posons $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $n_i = \dim SEP(f, \lambda_i)$.

$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\dim \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_i)) = n_i^2$.

Alors $\dim \operatorname{Ker} \phi_f = \dim \left(\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p)) \right) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2$

$\operatorname{rg} \phi_f = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \operatorname{Ker} \phi_f = n^2 - \sum_{i=1}^{p} n_i^2$

<u>$\dim \operatorname{Ker} \phi_f = \sum_{i=1}^{p} n_i^2$ et $\dim \operatorname{rg} \phi_f = n^2 - \sum_{i=1}^{p} n_i^2$ où $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $n_i = \dim SEP(f, \lambda_i)$</u>

<u>Si $p = n$:</u> f admet n valeurs propres deux à deux distinctes et $\dim E = n$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\dim SEP(f, \lambda_i) = 1$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $n_i = 1$

Donc <u>$\dim \operatorname{Ker} \phi_f = n$ et $\operatorname{rg} \phi_f = n^2 - n$.</u>

<u>Remarques.</u> 1. Nous retrouvons les résultats de II §7.

2.. $\operatorname{Ker} \phi_f$ est le commutant de f. Nous retrouvons à travers $\dim \operatorname{Ker} \phi_f = \sum_{i=1}^{p} (\dim SEP(f,\lambda_i))^2$ un résultat très classique.

PARTIE V f est diagonalisable lorsque ϕ_f est diagonalisable

Q1 a) Soit $i \in [\![1,n^2]\!]$. $\Phi_f(g_i)=\beta_i g_i$; $f\circ g_i - g_i\circ f=\beta_i g_i$.

Alors $\beta_i g_i(x) = f(g_i(x))-g_i(f(x)) = f(g_i(x))-g_i(\lambda x) = f(g_i(x))-\lambda g_i(x)$.

Donc $\underline{\underline{f(g_i(x))=(\lambda+\beta_i)g_i(x)}}$.

b) • φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans E par définition.

• Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Soit $(g,h)\in\mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$.

$\varphi(\lambda g+h)=(\lambda g+h)(x)=\lambda g(x)+h(x)=\lambda\varphi(g)+\varphi(h)$

$\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall(g,h)\in\mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$, $\varphi(\lambda g+h)=\lambda\varphi(g)+\varphi(h)$. $\underline{\varphi \text{ est linéaire}}$.

• Montrons que φ est surjective. Soit $y\in E$. Montrons qu'il existe g dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi(g)=y$ c'est à dire tel que $g(x)=y$.

x est un vecteur propre de f donc x n'est pas nul. Posons $u_1=x$.

(u_1) est une famille libre de E car u_1 n'est pas nul.

On peut donc compléter cette famille en une base $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ de E. arbitraire !

Soit g l'endomorphisme de E tel que $g(u_1)=y$ et $\forall k\in[\![2,n]\!], g(u_k)=0_E$

Alors $g\in\mathcal{L}(E)$ et $g(x)=g(u_1)=y$. Donc $\varphi(g)=y$.

$\forall y\in E, \exists g\in\mathcal{L}(E), \varphi(g)=y$. $\underline{\varphi \text{ est surjective}}$.

Ainsi $\underline{\underline{\varphi \text{ est une application linéaire surjective de } \mathcal{L}(E) \text{ dans } E}}$.

c) $(g_1,g_2,\dots,g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

Alors $E=\underset{\uparrow\ \varphi \text{ est surjective}}{\varphi(\mathcal{L}(E))}=\varphi(\mathrm{Vect}(g_1,g_2,\dots,g_{n^2}))=\mathrm{Vect}(\varphi(g_1),\varphi(g_2),\dots,\varphi(g_{n^2}))$.

$(g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n^2}(x))$ est donc une famille génératrice de E.

(*) On peut alors extraire de cette famille une base $(g_i(x))_{i\in I}$ de E.

Alors pour tout $i \in I$, $g_i(x) \neq 0_E$.

Résumé : pour tout $i \in I$, $g_i(x) \neq 0_E$ et $f(g_i(x)) = (\lambda+\beta_i)\, g_i(x)$.

Ainsi $(g_i(x))_{i\in I}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Donc <u>f est diagonalisable</u>.

(*) Preuve du résultat de cours (?) proposé.

Posons $\mathcal{L} = \{ L \in \mathcal{P}([\![1, n^2]\!]) \mid L \neq \emptyset$ et $(g_i(x))_{i\in L}$ libre $\}$

Posons $\hat{\mathcal{L}} = \{ \operatorname{card} L \,;\, L \in \mathcal{L} \}$. $\hat{\mathcal{L}} \subset [\![1, n^2]\!]$.

→ $(g_1(x), \dots, g_{n^2}(x))$ est une famille génératrice de E.

Donc au moins un des vecteurs de cette famille n'est pas nul.

$\exists i_0 \in [\![1, n^2]\!]$, $g_{i_0}(x) \neq 0_E$. $(g_{i_0}(x))$ est libre.

Alors $\{i_0\} \in \mathcal{L}$. Donc $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Ainsi $\hat{\mathcal{L}} \neq \emptyset$.

→ $\hat{\mathcal{L}}$ est une partie non vide de $[\![1, n^2]\!]$. $\hat{\mathcal{L}}$ possède un plus grand élément r. Il existe donc une partie I de $[\![1, n^2]\!]$ de cardinal r telle que $(g_i(x))_{i\in I}$ soit une famille libre de E.

Montrons que cette famille est une base de E. Montrons donc qu'elle est génératrice. Supposons que cette famille n'est pas génératrice. Alors le sous-espace vectoriel F qu'elle engendre est strictement inclus dans $E = \operatorname{Vect}(g_1(x), \dots, g_{n^2}(x))$.

Notons que $\ell \notin I$ car $g_\ell(x) \notin F$.

Posons $I' = I \cup \{\ell\}$. $\operatorname{card} I' = r+1$. Ainsi $I' \notin \mathcal{L}$.

Alors la famille $(g_i(x))_{i \in I'}$ est liée.

Il existe une famille $(\delta_i)_{i \in I'}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que

$\sum_{i \in I'} \delta_i g_i(x) = 0_E$ et telle qu'au moins un élément de cette famille ne soit pas nul.

$\delta_\ell g_\ell(x) + \sum_{i \in I} \delta_i g_i(x) = 0_E$. Supposons $\delta_\ell \neq 0$.

Alors $g_\ell(x) = \sum_{i \in I} \left(-\frac{\delta_i}{\delta_\ell}\right) g_i(x) \in F$!! Donc $\delta_\ell = 0$.

Alors $\sum_{i \in I} \delta_i g_i(x) = 0_E$. Comme $(g_i(x))_{i \in I}$ est libre : $\forall i \in I,\ \delta_i = 0$.

Finalement $\forall i \in I',\ \delta_i = 0$ ce qui est contradictoire.

Donc $(g_i(x))_{i \in I}$ est une famille génératrice de E. C'est aussi une famille libre donc c'est une base de E.

(Q2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

a) $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$ donc $(Id_E, f, \cdots, f^{n^2})$ est une famille liée de $\mathcal{L}(E)$ car son cardinal est n^2+1.

$\exists (a_0, a_1, \cdots, a_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2+1} - \{0_{\mathbb{C}^{n^2+1}}\},\ \sum_{i=0}^{n^2} a_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Posons $P = \sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$. $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ et $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

<u>f possède un polynôme annulateur non nul P.</u>

b) Supposons que P est constant. $\exists c \in \mathbb{C}^*,\ P = c$.

Alors P n'est pas constant. Comme $P \in \mathbb{C}[X]$, P est scindé.

$\exists r \in \mathbb{N}^*, \exists c \in \mathbb{C}^*, \exists (t_1, t_2, \dots, t_r) \in \mathbb{C}^r, \quad P = c\,(X-t_1)\cdots(X-t_r)$.

$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $c\,(f - t_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - t_r Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. c n'est pas nul donc $(f - t_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - t_r Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $f - t_k Id_E$ est bijectif.

Alors $(f - t_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - t_r Id_E)$ est bijectif comme composé de r endomorphismes bijectifs. Alors $0_{\mathcal{L}(E)}$ est un endomorphisme bijectif de E. Ceci est impossible car $\dim E \geqslant 1$.

Donc $\exists i \in [\![1, r]\!]$ tel que $f - t_i Id_E$ n'est pas bijectif.

Alors $f - t_i Id_E$ n'est pas injectif car $\dim E < +\infty$.

Alors $t_i \in Sp\, f$.

<u>L'une des racines de P est une valeur propre de f.</u>

<u>Le spectre de f n'est pas vide.</u>

Q3 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nous notons $\mathcal{B}$ la base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = A$.

<u>a)</u> Rappelons que $(g_1, g_2, \dots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de Φ_f respectivement associés aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}$. Posons $\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $M_i = M_{\mathcal{B}}(g_i)$.

$\forall i \in [\![1, n^2]\!], \quad \beta_i g_i = \Phi_f(g_i) = f \circ g_i - g_i \circ f$.

Alors $\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $\beta_i M_i = A M_i - M_i A = \Psi_A(M_i)$.

$\forall i \in [\![1,n^2]\!]$, $\psi_A(M_i) = \beta_i M_i$.

Soit $i \in [\![1,n^2]\!]$, g_i est un vecteur propre de φ_f donc $g_i \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $M_i \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Donc M_i est un vecteur propre de ψ_A associé à la valeur propre β_i.

$(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une famille de $M_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ψ_A. Montrons que cette famille est une base de $M_n(\mathbb{R})$. Comme son cardinal coïncide avec la dimension de $M_n(\mathbb{R})$ il suffit de montrer que cette famille est libre. Soit $(\delta_1, \dots, \delta_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ tel que $\sum_{i=1}^{n^2} \delta_i M_i = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

Alors $M_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0_{M_n(\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^{n^2} \delta_i M_i = \sum_{i=1}^{n^2} \delta_i M_{\mathcal{B}}(g_i) = M_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n^2} \delta_i g_i\right)$

$\sum_{i=1}^{n^2} \delta_i g_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$. La liberté de $(g_1, g_2, \dots, g_{n^2})$ donne : $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{n^2} = 0$

ceci achève de montrer que $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{R})$ et même une base de $M_n(\mathbb{R})$.

$(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ψ_A.

Alors <u>ψ_A est diagonalisable.</u>

$\forall i \in [\![1,n^2]\!]$, $M_i \in M_n(\mathbb{R})$ et $\psi_A(M_i) = \beta_i M_i$. Et $\forall i \in [\![1,n^2]\!]$ $M_i \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$

Alors $\forall i \in [\![1,n^2]\!]$, $M_i \in M_n(\mathbb{C})$, $\widehat{\psi}_A(M_i) = \psi_A(M_i) = \beta_i M_i$ et $M_i \neq 0_{M_n(\mathbb{C})}$

$(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est donc une famille de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $\widehat{\psi}_A$. Montrons que $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$. Le cardinal de cette famille étant égal à

(…) la dimension de $M_n(\mathbb{C})$ il suffit de montrer que la famille est libre.

Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n^2}) \in \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{n^2}$ tel que $\sum_{k=1}^{n^2} \gamma_k M_k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$

$$\sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{Re}(\gamma_k) M_k + i \sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{Im}(\gamma_k) M_k = 0_{M_n(\mathbb{C})}.$$

Or pour tout $k \in [\![1, n^2]\!]$, M_k est une matrice à coefficients réels.

Ainsi $\sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{Re}(\gamma_k) M_k = \sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{Im}(\gamma_k) M_k = 0_{M_n(\underline{\underline{\mathbb{R}}})}$.

Comme $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$

il vient : $\forall k \in [\![1, n^2]\!]$, $\mathrm{Re}(\gamma_k) = \mathrm{Im}(\gamma_k) = 0$.

donc $\forall k \in [\![1, n^2]\!]$, $\gamma_k = 0$.

Ainsi $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{C})$.

Récap $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$.

Récap encore $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $\widehat{\varphi}_A$ associés aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}$.

Ainsi 1) $\underline{\underline{\widehat{\varphi}_A \text{ est diagonalisable}}}$

2) $\mathrm{Sp}\, \widehat{\varphi}_A = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}\}$ donc $\underline{\underline{\text{les valeurs propres de}}}$

$\underline{\underline{\widehat{\varphi}_A \text{ sont réelles}}}$.

b) $A \in M_n(\mathbb{R})$ donc $A \in M_n(\mathbb{C})$. Soit u l'endomorphisme de $\underline{\underline{\mathbb{C}}}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

d'après Q2 (!!) $\mathrm{Sp}\, u \neq \emptyset$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A \neq \emptyset$.

Or Sp $f = \emptyset$ par hypothèse donc $Sp_{\mathbb{R}} A = \emptyset$ ... et $Sp_{\mathbb{C}} A \neq \emptyset$

<u>Alors il existe un complexe non réel γ valeur propre de A.</u>

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $AX = \gamma X$ et $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

En conjuguant il vient : $\bar{A}\bar{X} = \overline{AX} = \bar{\gamma}\bar{X}$ et $\bar{X} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Or $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\bar{A} = A$. Ainsi $A\bar{X} = \bar{\gamma}\bar{X}$ et $\bar{X} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$

donc $\bar{\gamma} \in Sp_{\mathbb{C}} A$. $A - \bar{\gamma} I_n$ n'est pas inversible. Donc ${}^t(A - \bar{\gamma} I_n)$ n'est

pas inversible. Alors ${}^tA - \bar{\gamma} I_n$ n'est pas inversible. $\bar{\gamma}$ est valeur propre de ${}^tA$.

$\bar{\gamma}$ est valeur propre de A et de ${}^tA$.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $AX = \gamma X$ $\quad(\gamma \in Sp_{\mathbb{C}} A)$.

$\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et ${}^tAY = \bar{\gamma} Y$ $\quad(\bar{\gamma} \in Sp_{\mathbb{C}} {}^tA)$.

Notons que $X{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\hat{\varphi}_A(X{}^tY) = AX{}^tY - X{}^tYA = \gamma X{}^tY - X{}^t({}^tAY) = \gamma X{}^tY - X{}^t(\bar{\gamma} Y)$.

$\hat{\varphi}_A(X{}^tY) = \gamma X{}^tY - \bar{\gamma} X{}^tY = (\gamma - \bar{\gamma}) X{}^tY$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\exists p \in [\![1, n]\!]$, $x_p \neq 0$ car $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

$\exists q \in [\![1, n]\!]$, $y_q \neq 0$ car $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

Alors $x_p y_q \neq 0$. Or $x_p y_q$ est le coefficient de $X{}^tY$ situé à l'intersection

de la $p^{\text{ième}}$ ligne et de la $q^{\text{ième}}$ colonne donc $X{}^tY \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

$\hat{\varphi}_A(X{}^tY) = (\gamma - \bar{\gamma}) X{}^tY$ et $X{}^tY \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

... $\gamma - \bar{\gamma}$ est une valeur propre de $\hat{\varphi}$

car $\gamma - \bar{\gamma} = 2i \operatorname{Im} \gamma$ et $\operatorname{Im} \gamma$ n'est pas un réel nul car $\gamma \notin \mathbb{R}$.

Alors $\gamma - \bar{\gamma}$ est une valeur propre de $\hat{\varphi}_A$ qui n'est pas réelle.

cela contredit Q3 a).

Q4 En supposant $\operatorname{sp} f = \emptyset$ nous avons obtenu une contradiction.

Alors f possède au moins une valeur propre.

Q1 permet alors de dire que f est diagonalisable.

Donc si <u>Φ_f est diagonalisable : f est diagonalisable.</u>

Mieux <u>Φ_f est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable</u> ...

d'après Q4.