R.

EXERCICE 51 **N2** **Caractérisation des matrices nilpotentes.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est nilpotent c'est à dire qu'il existe r dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^r = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

ii) 0 est la seule valeur propre de A.

---

* Montrons que i) $\Rightarrow$ ii). On suppose donc que : $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $A^r = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

X^r est un polynôme annulateur de A dont la seule racine est 0. Alors $\mathrm{Sp}A \subset \{0\}$.

Posons $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\}$. $r \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$.

Alors $\mathcal{E}$ possède un plus petit élément que nous noterons k_0.

$k_0 \in \mathbb{N}^*$, $A^{k_0} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et $A^{k_0-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Comme $A^{k_0-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, (*) $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $A^{k_0-1}X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. Posons $Y = A^{k_0-1}X$.

$Y \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et $AY = A^{k_0}X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. Ainsi 0 est valeur propre de A. $0 \in \mathrm{Sp}A$.

Finalement $\mathrm{Sp}A = \{0\}$. 0 est la seule valeur propre de A.

Remarque sur (*)... Montrons (*) si cela est vraiment nécessaire. A^{k_0-1} n'est pas nulle. Au moins une de ses colonnes n'est pas nulle. Supposons que la colonne j_0 de A^{k_0-1} ne soit pas nulle. Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$A^{k_0-1}E_{j_0}$ est la $j_0$ième colonne de A donc $A^{k_0-1}E_{j_0} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. $X = E_{j_0}$ convient...

* Montrons que ii) $\Rightarrow$ i). Supposons donc que $\mathrm{Sp}A = \{0\}$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de A.

$\mathcal{S}$ n'est pas vide d'après le cours. Posons $\mathcal{D} = \{\deg S \; ; \; S \in \mathcal{S}\}$.

$\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Ainsi $\mathcal{D}$ possède un plus petit élément d_0.

Alors il existe un élément S_0 de $\mathcal{S}$ tel que $\deg S_0 = d_0$.

Notons R_0 l'ensemble des racines de S_0 et montrons que $\mathrm{Sp}\,A = R_0$.

Le cours donne $\mathrm{Sp}A \subset R_0$. Soit $\lambda \in R_0$. $\exists Q_0 \in \mathbb{C}[X]$, $S_0 = (X - \lambda)Q_0$.

$S_0(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ donc $(A - \lambda I_n)Q_0(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Supposons que λ ne soit pas une valeur propre de A. Alors $A - \lambda I_n$ est inversible. En multipliant à gauche l'égalité précédente par $(A - \lambda I_n)^{-1}$ il vient $Q_0(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

$S_0 = (X-\lambda)Q_0$ donc $Q_0 \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ et $\deg Q_0 = d_0 - 1$.

Ainsi Q_0 est un polynôme annulateur non nul de A de degré $d_0 - 1$.

Alors $d_0 - 1 \in \mathcal{D}$ et $d_0 = \min_{d \in \mathcal{D}} d$!! donc nécessairement λ est valeur propre de A.

Par conséquent si λ est une racine de S_0, λ est une valeur propre de A. donc $R_0 \subset \mathrm{Sp}A$.

Finalement $\mathrm{Sp}A = R_0$. Alors $R_0 = \{0\}$. S_0 est donc un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ dont la seule racine est 0. Nécessairement $\deg S_0 \geq 1$. S_0 est alors un élément non constant de $\mathbb{C}[X]$ il est donc scindé. 0 étant son unique racine :

$\exists c \in \mathbb{C}^*, \exists r \in \mathbb{N}^*, \ S_0 = cX^r$ (notons que $r = d_0$!!).

Alors $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = S_0(A) = cA^r$. Comme c n'est pas nul : $\underline{\underline{A^r = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}}}$.

EXERCICE 52 **N2 Polynôme minimal. Application. Oral HEC 2011 S 113.**

Q1. Question de cours : Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles le même rang ?

Q2. Dans cette question, A et B sont deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) qui ont moins une valeur propre commune ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Dans cette question j'ai remplacé le $\mathbb{R}$ du texte par $\mathbb{K}$. Dans la correction je reste fidèle au texte original...

a) Démontrer qu'il existe un élément α de $\mathbb{K}$ et deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que ${}^tAX = \alpha X$ et $BY = \alpha Y$.

b) En déduire qu'il existe une matrice carrée non nulle M telle que $MA = BM$.

c) Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont une valeur propre commune et trouver une matrice non nulle M telle que $MA = BM$.

Q3. Dans cette question a est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

a) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que, si z est un nombre complexe qui n'est pas valeur propre de a et si le polynôme $P = (X - z)\,Q$ est un polynôme annulateur de a, Q est alors aussi un polynôme annulateur annulateur de a.

b) Démontrer qu'il existe un polynôme annulateur de a dont les seules racines sont les valeurs propres de a (*comment on cause à HEC ! !*).

Q4. Dans cette question, on examine la réciproque de la propriété trouvée en Q2 et on considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une matrice non nulle M telle que $MA = BM$.

a) Que peut-on dire des valeurs propres de A et de B lorsque M est inversible ?

b) Démontrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on a : $MP(A) = P(B)M$.

c) Démontrer, à l'aide de Q3, que A et B ont nécessairement une valeur propre commune.

(Q1) Le rang d'une matrice est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes (resp. ses lignes). C'est aussi le rang de toute application linéaire "associée".

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

(Q2) a) Soit α une valeur propre commune à A et B.

$A-\alpha I_n$ n'est pas inversible donc ${}^tA-\alpha I_n = {}^t(A-\alpha I_n)$ n'est pas inversible.

Alors α est valeur propre de ${}^tA$. $\exists X\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et ${}^tAX=\alpha X$.

$\alpha\in Sp\,B$ donc $\exists Y\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $BY=\alpha Y$.

b) ${}^tAX=\alpha X$ donc ${}^tXA=\alpha\,{}^tX$. $Y\,{}^tXA=\alpha Y\,{}^tX$.

$BY=\alpha Y$; $BY\,{}^tX=\alpha Y\,{}^tX$.

Posons $M=Y\,{}^tX$. $MA=Y\,{}^tXA=\alpha Y\,{}^tX=BY\,{}^tX=BM$. $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $MA=MA$.

Posons : $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\y_n\end{pmatrix}$. $\exists j_0\in [\![1,n]\!]$, $x_{j_0}\neq 0$ et $\exists i_0\in[\![1,n]\!]$, $y_{i_0}\neq 0$ car X et Y sont non nulles.

$M=Y\,{}^tX=(y_i x_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ de plus $y_{i_0}x_{j_0}\neq 0$ donc $M\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\exists M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $MA=BM$.

Remarque. Tout ceci vaut encore pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

c) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $\lambda\in Sp\,A \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2-4=0 \Leftrightarrow 0=(1-\lambda-2)(1-\lambda+2)=(\lambda+1)(\lambda-3)$.

Alors $Sp\,A=\{-1,3\}$.

B est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

$Sp\,B=\{1,3\}$

A et B ont une valeur propre commune 3.

${}^tA=A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$. Posons $X=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. $X\neq 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ et ${}^tAX=AX=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=3X$.

Posons $Y=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. $Y\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $BY=3Y$.

Posons alors $M = Y^tX$. D'après ce qui précède $MA = BM$.

$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $MA = BM$.

Remarque.. $MA = BM = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Q3 a) Pour simplifier posons $E = \mathbb{C}^n$. $a \in \mathcal{L}(E)$.

$\zeta \in \mathbb{C}$ et $P = (X-\zeta)Q$ est un polynôme annulateur de a. $P(a) = (a - \zeta Id_E) \circ Q(a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Supposons que ζ n'est pas valeur propre. Alors $a - \zeta Id_E$ est un endomorphisme injectif de E.

$\forall x \in E, ((a-\zeta Id_E) \circ Q(a))(x) = 0_E$. $\forall x \in E, (a - \zeta Id_E)(Q(a)(x)) = 0_E$.

Alors $\forall x \in E$, $Q(a)(x) \in Ker(a - \zeta Id_E)$. Or $Ker(a - \zeta Id_E) = \{0_E\}$ car $a - \zeta Id_E$ est injectif.

Ainsi $\forall x \in E$, $Q(a)(x) = 0_E$. $Q(a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Q est un polynôme annulateur de a.

b) Le cours montre que a possède un polynôme annulateur non nul.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de a.

Posons encore $\mathcal{D} = \{\deg S ; S \in \mathcal{S}\}$. $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc $\mathcal{D}$ possède un plus petit élément d_0. $\exists S_0 \in \mathcal{S}$, $\deg S_0 = d_0$.

S_0 est un polynôme annulateur de a donc $Sp\, a \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid S_0(\zeta) = 0\}$.

Réciproquement soit ζ_0 une racine de S_0. Montrons que $\zeta_0 \in Sp\, a$.

Supposons que ζ_0 n'est pas valeur propre de a. ζ_0 est racine de S_0 donc il existe un élément Q_0 de $\mathbb{C}[X]$ tel que $S_0 = (X-\zeta_0)Q_0$.

D'après a) Q_0 est un polynôme annulateur de a. De plus $Q_0 \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ car $S_0 \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.

Alors $Q_0 \in \mathcal{S}$ donc $\deg Q_0 \in \mathcal{D}$. Or $\deg Q_0 = \deg S_0 - 1 = d_0 - 1$.

Donc $d_0 - 1 \in \mathcal{D}$ et d_0 est le plus petit élément de $\mathcal{D}$!! Ceci est impossible.

Alors $\zeta \in Sp\, A$. Ceci achève de montrer que toute racine de S_0 est une valeur propre de a. Ainsi LES racines de S_0 sont LES valeurs propres de a.

Réciproquement un polynôme annulateur (non nul) de a admet LES racines pas LES valeurs propres de a.

Remarques 1.. Supposons S_0 constant ! $\exists c \in \mathbb{C}^*$, $S_0 = c$. (S_0 n'est pas nul.)

Alors $0_{\mathcal{L}(E)} = S_0(a) = c\,Id_E$ et $c \neq 0$ donc $0_{\mathcal{L}(E)} = Id_E$. Ceci est impossible car dim $E \geq 1$. Alors $\deg S_0 \geq 1$. Comme $S_0 \in \mathbb{C}[X]$, S_0 a au moins une racine. Ainsi a admet au moins une valeur propre.

Plus généralement tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$, possède au moins une valeur propre.

2.. Soit c_0 le coefficient du terme de plus haut degré. Posons $T_0 = \frac{1}{c_0} S_0$.

T_0 est le polynôme annulateur non nul unitaire de a de degré minimum.

T_0 est le polynôme minimal de a. Exercice.. montrer l'unicité de T_0.

(Q4) a] Supposons M est inversible. $MA = BM$ donc $A = M^{-1}BM$.

Alors A et B sont semblables donc A et B ont les mêmes valeurs propres.

Soit $\hat{a}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

D'après la remarque 1, $\hat{a}$ admet au moins une valeur propre.

Ainsi A admet au moins une valeur propre α. α est également valeur propre de B.

Donc A et B ont au moins une valeur propre commune.

b] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{C}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} \beta_k X^k$.

Commençons par démontrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $MA^k = B^k M$.

- La propriété est vraie pour $k=0$ car $A^0 = B^0 = I_n$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$

$MA^{k+1} = (MA^k)A = (B^k M)A = B^k(MA) = B^k(BM) = B^{k+1}M$.

$MA^{k+1} = B^{k+1}M$ et la récurrence s'achève.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $MA^k = B^k M$.

$\Pi P(A) = \Pi\left(\sum_{\ell=0}^{r}\beta_\ell A^\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{r}\beta_\ell \Pi A^\ell = \sum_{\ell=0}^{r}\beta_\ell B^\ell \Pi = \left(\sum_{\ell=0}^{r}\beta_\ell B^\ell\right)\Pi = P(B)\Pi.$

$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \Pi P(A) = P(B)\Pi$.

c) Reprenons l'endomorphisme $\hat{a}$ de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Il existe un polynôme annulateur $\hat{S}_0$ de $\hat{a}$ tel que les racines de $\hat{S}_0$ coïncident avec les valeurs propres de $\hat{a}$. $\hat{S}_0$ est nécessairement non nul (!) car $\hat{a}$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres. Supposons que $\hat{S}_0$ est constant. $\exists \hat{c} \in \mathbb{C}^*,\ \hat{S}_0 = \hat{c}$

Alors $0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)} = \hat{S}_0(\hat{a}) = \hat{c}\, Id_{\mathbb{C}^n}$ donc $Id_{\mathbb{C}^n} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ car $\hat{c} \neq 0$. Ceci est impossible car $\dim \mathbb{C}^n = n \geqslant 1$ (raisonnement déjà fait mais que je préfère refaire ici...).

Ainsi $\deg \hat{S}_0 \geqslant 1$. $\hat{S}_0$ est un polynôme annulateur de $\hat{a}$ donc de A. $\hat{S}_0(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

D'après b) $\Pi \hat{S}_0(A) = \hat{S}_0(B)\Pi$. Alors $\hat{S}_0(B)\Pi = \Pi \hat{S}_0(A) = \Pi 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Si $\hat{S}_0(B)$ est inversible : $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = (\hat{S}_0(B))^{-1} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = (\hat{S}_0(B))^{-1}\hat{S}_0(B)\Pi = \Pi$, donc $\Pi = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$!

Ainsi $\hat{S}_0(B)$ n'est pas inversible.

$\hat{S}_0 \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg \hat{S}_0 \geqslant 1$ donc $\hat{S}_0$ est scindé.

$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists \gamma \in \mathbb{C}^*, \exists (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in \mathbb{C}^p,\ \hat{S}_0 = \gamma(X-\gamma_1)(X-\gamma_2)\dots(X-\gamma_p)$.

$\hat{S}_0(B)$ n'est pas inversible donc $\gamma(B-\gamma_1 I_n)(B-\gamma_2 I_n)\cdots(B-\gamma_p I_n)$ n'est pas inversible.

Le γ n'est pas nul donc $(B-\gamma_1 I_n)(B-\gamma_2 I_n)\cdots(B-\gamma_p I_n)$ n'est pas inversible.

Or un produit de matrices inversibles est inversible. Par conséquent il existe $k_0 \in [\![1, p]\!]$ tel que $B - \gamma_{k_0} I_n$ ne soit pas inversible. Alors γ_{k_0} est une valeur propre de B.

Mais γ_{k_0} est aussi un zéro de $\hat{S}_0$ donc une valeur propre de $\hat{a}$ ... et de A.

Donc γ_{k_0} est une valeur propre de A et de B.

A et B ont au moins une valeur propre commune .

EXERCICE 53 **N2$^+$** **Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice (resp. un endomorphisme) soit trigonalisable.**

Q1. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice triangulaire supérieure T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On pose $T = (t_{i,j})$, et pour tout r dans $[\![1, n]\!]$, $Q_r = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - t_{k,k})$.

$(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

a) Montrer par récurrence que $\forall r \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, r]\!],\ Q_r(T)\, E_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

b) En déduire que Q_n est un polynôme annulateur scindé de A.

Q2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$) et f un endomorphisme de E.

On suppose que f possède un polynôme annulateur scindé S.

a) Montrer qu'il existe au moins une racine de S qui soit une valeur propre de f. Soit λ une telle racine.

b) Montrer qu'il existe un hyperplan H de E contenant $\mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$, où Id_E désigne l'endomorphisme identité.

c) Montrer que H est stable par f. Soit h l'application de H dans H définie par : $\forall x \in H,\ h(x) = f(x)$.

Montrer que h est un endomorphisme de H et que S [illegible] est un polynôme annulateur scindé.

d) Montrer par récurrence sur n, que tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) qui admet un polynôme annulateur scindé possède une matrice triangulaire supérieure.

Q3. Montrer les propriétés suivantes.

P1 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A possède un polynôme annulateur scindé.

P2 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n ($n \geqslant 1$). Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure si et seulement si f possède un polynôme annulateur scindé.

P3 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

P4 Si f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n ($n \geqslant 1$), il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Q1 a) $T=(t_{i,j})$ est triangulaire supérieure donc $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]$, $t_{i,j}=0$ si $i>j$.
Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, TE_j est la $j^{ème}$ colonne de T.
Donc $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $TE_j=\sum_{i=1}^{n} t_{i,j}E_i=\sum_{i=1}^{j} t_{i,j}E_i$ $\quad (t_{i,j}=0$ si $i>j)$

Montrons par récurrence sur r que : $\forall r\in[\![1,n]\!]$, $\forall j\in[\![1,r]\!]$, $Q_r(T)E_j=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

- $Q_1(T)=(T_1-t_{1,1}I_n)$. $Q_1(T)E_1=T_1E_1-t_{1,1}E_1=t_{1,1}E_1-t_{1,1}E_1=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

  Ainsi la propriété est vraie pour $r=1$.

- Supposons la propriété vraie pour un élément r de $[\![1,n-1]\!]$ et montrons la pour $r+1$.

  On suppose donc que $\forall j\in[\![1,r]\!]$, $Q_r(T)E_j=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

  Notons que $Q_{r+1}=Q_r(X-t_{r+1,r+1})=(X-t_{r+1,r+1})Q_r$.

  Alors $Q_{r+1}(T)=Q_r(T)(T-t_{r+1,r+1}I_n)=(T-t_{r+1,r+1}I_n)Q_r(T)$.

  $\forall j\in[\![1,r]\!]$, $Q_{r+1}(T)E_j=(T-t_{r+1,r+1}I_n)Q_r(T)E_j\underset{\text{hypothèse de récurrence.}}{=}(T-t_{r+1,r+1}I_n)0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

  $Q_{r+1}(T)E_{r+1}=Q_r(T)(T-t_{r+1,r+1}I_n)E_{r+1}$.

  Or $(T-t_{r+1,r+1}I_n)E_{r+1}=TE_{r+1}-t_{r+1,r+1}E_{r+1}=\sum_{i=1}^{r+1}t_{i,r+1}E_i-t_{r+1,r+1}E_{r+1}=\sum_{i=1}^{r}t_{i,r+1}E_i$.

  Alors $Q_{r+1}(T)E_{r+1}=Q_r(T)\left(\sum_{i=1}^{r}t_{i,r+1}E_i\right)=\sum_{i=1}^{r}t_{i,r+1}\underbrace{Q_r(T)E_i}_{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}}=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

  ~~Finalement~~ $\forall j\in[\![1,r+1]\!]$, $Q_{r+1}(T)E_j=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.
  ceci achève la récurrence.

$\forall r\in[\![1,n]\!]$, $\forall j\in[\![1,r]\!]$, $Q_r(T)E_j=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

b) Ce qui précède donne $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $Q_n(T)E_j=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ (faire $r=n$).

Ainsi pour toute j dans $[\![1,n]\!]$, la $j^{ème}$ colonne de $Q_n(T)$ est nulle.

Alors $Q_n(T)$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est semblable à T donc il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1} T P$.

Alors $Q_n(A) = P^{-1} Q_n(T) P$ (aai connu). Donc $Q_n(A) = P^{-1} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} P = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Alors Q_n est un polynôme annulateur scindé de A.

<u>Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A possède un polynôme annulateur scindé.</u>

Q2 a) S est un polynôme annulateur de f scindé.

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{K}^*$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, $S = \alpha \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$. Posons $\hat{S} = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$.

$S(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\alpha \neq 0$ donc $\hat{S}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $(f - \lambda_1 Id_E) \circ (f - \lambda_2 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)$ est un endomorphisme non injectif car c'est l'endomorphisme nul (dim $E \geq 1$ ...). La composée d'endomorphismes injectifs étant un endomorphisme injectif, nécessairement il existe un élément k_0 de $[\![1, p]\!]$ tel que $f - \lambda_{k_0} Id_E$ ne soit pas injectif. Alors λ_{k_0} est une valeur propre de f et un zéro de S.

<u>Il existe au moins une racine de S qui soit une valeur propre de f.</u>

Soit λ une racine de S valeur propre de f (on peut prendre $\lambda = \lambda_{k_0}$).

b) dim Ker$(f - \lambda Id_E) \geq 1$ car $\lambda \in Sp f$. Alors dim Im$(f - \lambda Id_E)$ = n - dim Ker$(f - \lambda Id_E) \leq n - 1$.

Si Im$(f - \lambda Id_E) = \{0\}$, tout hyperplan de E contient Im$(f - \lambda Id_E)$.

Si dim Im$(f - \lambda Id_E) = n - 1$, Im$(f - \lambda Id_E)$ est un hyperplan de E qui contient Im$(f - \lambda Id_E)$!

Supposons que la dimension ℓ de Im$(f - \lambda Id_E)$ appartient à $[\![1, n-2]\!]$.

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ une base de Im$(f - \lambda Id_E)$. $(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ est une famille libre de E.

On peut donc la compléter en une base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de E. Posons $H = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$.

Alors Im$(f - \lambda Id_E) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_\ell) \subset \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = H$ et dim $H = n - 1$.

Par conséquent H est un hyperplan de E qui contient Im$(f - \lambda Id_E)$.

<u>Il existe un hyperplan H de E qui contient Im$(f - \lambda Id_E)$.</u>

c) Soit $x \in H$. $(f-\lambda Id_E)(x) \in \mathrm{Im}(f-\lambda Id_E)$ donc $(f-\lambda Id_E)(x) \in H$. De plus $\lambda x \in H$.

Alors $f(x) = (f-\lambda Id_E)(x) + \lambda x \in H$.

$\forall x \in H$, $f(x) \in H$. H est stable par f.

Comme H est stable par f, h est une application de H dans H.

Comme f est linéaire, h est linéaire.

Finalement h est un endomorphisme de H

S est un polynôme annulateur scindé de f. Montrons que S est un polynôme annulateur scindé de h.

1) S est scindé

2) Montrons que $S(h) = 0_{\mathcal{L}(H)}$.

$\exists m \in \mathbb{N}^*, \exists (b_0, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$, $S = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. $S(h) = \sum_{k=0}^{m} b_k h^k$.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in H$, $f^k(x) \in H$ et $f^k(x) = h^k(x)$.

- C'est clair pour $k=0$ car $f^0 = Id_E$ et $h^0 = Id_H$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $k+1$.

  On a : $\forall x \in H$, $f^k(x) \in H$ et $f^k(x) = h^k(x)$ par hypothèse de récurrence.

  Soit $x \in H$. $f^k(x) \in H$ et H est stable par f donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) \in H$.

  De plus $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = \underset{\uparrow\, f^k(x) \in H}{h(f^k(x))} = \underset{\uparrow\, \text{hypothèse de récurrence}}{h(h^k(x))} = h^{k+1}(x)$.

  Ainsi $\forall x \in H$, $f^{k+1}(x) \in H$ et $f^{k+1}(x) = h^{k+1}(x)$. Ceci achève la récurrence.

Alors $\forall x \in H$, $S(h)(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k h^k(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k f^k(x) = S(f)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$. Alors $S(h) = 0_{\mathcal{L}(H)}$.

S est un polynôme annulateur de h.

S est un polynôme annulateur scindé de h.

d) Montrons par récurrence sur n que dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$, tout endomorphisme qui admet un polynôme annulateur scindé possède une matrice triangulaire supérieure.

* La propriété est vraie pour $n=1$ car toute matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 1 est triangulaire supérieure !

* Supposons que la propriété est vraie pour $n-1$ avec $n \in [\![2,+\infty[\![$ et montrons la pour n.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ qui possède un polynôme annulateur scindé S. Montrons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure. Appliquons les résultats de a_j, b_j etc.
Il existe au moins une racine λ de S qui est valeur propre de f.
Il existe un hyperplan H de E qui contient $\operatorname{Im}(f-\lambda Id_E)$ et qui est stable par f.
Soit h l'application de H dans H définie par $\forall x \in H,\ h(x)=f(x)$. h est un endomorphisme de H.
De plus S est un polynôme annulateur scindé de h.
Comme $\dim H = n-1$, l'hypothèse de récurrence s'applique à h.
Il existe une base $\mathcal{B}_1=(e_1,e_2,\dots,e_{n-1})$ de H telle que $M_{\mathcal{B}_1}(h)$ est triangulaire supérieure.
Soit D un supplémentaire de H dans E. D est une droite vectorielle de E.
Soit e_n un vecteur non nul de D. $\mathcal{B}_2=(e_n)$ est une base de D.
Comme $E=H\oplus D$, $\mathcal{B}=$ "$\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$" $=(e_1,e_2,\dots,e_{n-1},e_n)$ est une base de E.
$M_{\mathcal{B}_1}(h)$ est triangulaire supérieure donc $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $f(e_i)=h(e_i)\in \operatorname{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_i)$.
De plus $f(e_n)\in E=\operatorname{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_n)$.
Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i)\in\operatorname{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_i)$. Alors $M_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure.
Ceci achève la récurrence.

<u>Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, tout endomorphisme, d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, qui admet un polynôme annulateur scindé possède une matrice triangulaire supérieure.</u>

(Q4) P1 A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.

* Si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{K})$ alors, d'après Q1, A possède un polynôme annulateur scindé.

* Réciproquement supposons que A possède un polynôme annulateur scindé S.

Posons $E = \mathbb{K}^n$ et notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}_0$.

$S(A) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donc $S(f) = O_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi S est un polynôme annulateur scindé de f.

Alors d'après Q2 il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f)P = P^{-1}AP$.

Ainsi A est semblable à la matrice triangulaire supérieure $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Finalement <u>A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A possède un polynôme annulateur scindé.</u>

P2 f est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

* Si f admet un polynôme annulateur scindé, d'après Q2, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure.
* Réciproquement supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure. Posons $T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
  T est semblable à elle même, donc elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure alors T possède un polynôme annulateur scindé S !
  S est alors un polynôme annulateur scindé de f.

<u>Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure si et seulement si f possède un polynôme annulateur scindé.</u>

P3 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après le cours A possède un polynôme annulateur non nul S. Supposons S constant. $\exists c \in \mathbb{C}^*$, $S = c$.

Alors $O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = S(A) = c\, I_n$ et $c \neq 0$ donc $I_n = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$!

Ainsi $S \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg S \geqslant 1$. Alors S est scindé.

S est un polynôme annulateur scindé de A. Ainsi <u>A est semblable à une matrice triangulaire supérieure</u> d'après P1.

P4 f est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n $(n \geqslant 1)$. On montre comme dans P3 que f admet un polynôme annulateur scindé. Alors d'après P2 :

<u>il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.</u>