$\boxed{\textbf{F 1}}$ Assez simple ou proche du cours.

$\boxed{\textbf{F 2}}$ Demande du travail.

$\boxed{\textbf{F 3}}$ Délicat.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2006

Question 2 D'apès HEC 2006-2 $\boxed{\textbf{F 3}}$

A, B et C sont trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe trois complexes α, β, γ, non tous nuls et tels que $\alpha\, A + \beta\, B + \gamma\, C$ admette une unique valeur propre.

Question 3 D'apès HEC 2006-3 $\boxed{\textbf{F 1}}$

$E = \mathbb{R}^3$. f est un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et -1 sont des valeurs propres.

Démontrer que f est diagonalisable.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2007

Question 2 HEC 07-2 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé.

Q1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer toutes les droites D de $\mathbb{R}^3$ stables par f, c'est à dire telles que $f(D) \subset D$.

Question 5 HEC 07-5 $\boxed{\textbf{F 1}}$

On suppose que $P = X(X+2)$ est un polynôme annulateur d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que -2 est valeur propre de A et que A est diagonalisable.

Question 19 HEC 07-19-S130 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et f, g, h trois endomorphismes de E vérifiant : $f + g + h = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = g \circ f = g \circ h = h \circ g = h \circ f = f \circ h$.

Q0. Le texte dit : montrer que f, g et h sont des projecteurs. Montrer que c'est faux.

Dans la suite on suppose que $f + g + h = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = g \circ f = g \circ h = h \circ g = h \circ f = f \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q1. Montrer que f, g et h sont des projecteurs.

Q2. Prouver que $\varphi = f + g - 2\,h$ est diagonalisable.

Q3. Donner un exemple d'un tel triplet d'endomorphismes.

Question 20 HEC 07-20-S143 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. Déterminer les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Q2. Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par f. Montrer que $\dim f(P) = 1$.

En déduire les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2009

Question 5 HEC 2009-5 $\boxed{\textbf{F 1}}$

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q1. On pose $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, -1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1, 0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$.

Q2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.

Q3. Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Question 17 HEC 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ *vu par JF*

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2010

Question 2 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit f l' application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = 3XP + (X^2 - X)P' - (X^3 - X^2)P''$, où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2. Déterminer $f(X^k)$ ($k \in \mathbb{N}$). Que peut-on dire du degré de $f(X^k)$?

Q3. f est injective ? surjective ?

Q4. a) Déterminer n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f.

b) n étant ainsi choisi, soit Φ l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$. Φ est-il diagonalisable ?

Question 5 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Q1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Q2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède une autre valeur propre, égale à 1 ou à -1.

b) Montrer que si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.

Question 6 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $f(M)$ la matrice $\begin{pmatrix} c'' & b'' & a'' \\ c' & b' & a' \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Q1. Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q2. Trouver les valeurs propres de f.

Q3. a) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le rang de $f(M)$ est égal au rang de M.

b) Cette propriété de préservation du rang est-elle vraie pour tous les automorphismes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Question 8 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit f un endomorphisme d'une espace vectoriel de dimension n supérieur ou égal à 1.

On suppose que $(f - \mathrm{Id}_E)^3 \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Étudier la digonalisisabilité de f.

Question 12 HEC 2010 D. ATTIAS et S. ALLAIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \to x^k\, e^{-x}$ pour k dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

Q2. Soit D l'application définie sur E par $\forall f \in E,\ D(f) = f' - f''$ où f' et f'' désignent les dérivées première et seconde de f.

Montrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

Q3. M est-elle inversible ? diagonalisable ?

Cours *Coefficient de corrélation linéaire : définition et propriétés*

Question 17 HEC 2010 M. PARIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

$E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément de E. $\forall M \in E,\ \Phi(M) = {}^tAM + MA$.

Q1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

Q2. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de E.

Q3. Φ est-il diagonalisable si c=b ? si a=b=d=1 et c=o ?

Cours *Définition d'un estimateur et du biais d'un estimateur.*

Question 19 HEC 2010 E. JARDIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

Montrer que si C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C^2 = D$ alors C est une matrice diagonale.

Cours *Définition de la convergence d'une intégrale. Intégrale de Riemann.*

Question 21 **HEC 2010** Vu par JFC

f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Q1. Trouver $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Q2. Montrer que 0, -1, 2 sont valeurs propres de f.

Q3. Montrer que tout polynôme annulateur de f est divisible par $P = X(X+1)(X-2)$.

JF Réciproque ?

Q4. n appartient à $\mathbb{N}^*$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par P. Calculer A^n.

Cours *Théorème de la limite centrée. Intervalle de confiance.*

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2011

Question 9 **HEC 2011** **S 109** $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Soit f une endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres. Démontrer que f est diagonalisable.

Cours *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Estimateur sans biais, convergent*

Question 10 **HEC 2011** **S 112** $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

Q1. Montrer que A admet une seule valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer le sous-espace propre associé à λ.

Q3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cours *Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires*

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2011 (suite)

Question 3 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE $\boxed{\textbf{F2}}$

$n \in [\![2, +\infty[\![$. Soient x et y deux réels et F l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(M) = x\,M + y\,{}^tM$.

Q1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un projecteur.

Q2. Donner les valeurs propres de F.

Q3. F est-il diagonalisable ?

Question 7 **HEC 2011** V. MESKHI $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Image, noyau, valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2012

Question 2 **HEC 2012-2-S9** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On suppose $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Q1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A

Q2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Question de cours. *Sommes de Riemann.*

Question 5 **HEC 2012-5-S20** $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda\, f$.

Question de cours. *Théorème de la limite centrée.*