Exercice 1 Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Q1 a) Montrer que A et B sont diagonalisables.

b) Montrer que $A^2 = I_3$ et calculer B^2.

c) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. Même chose pour B.

Q2 Trouver une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les matrices ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ soient toutes les deux diagonales.

Q3 Soit F l'application définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ F(M) = AM - MB$.

a) Montrer que l'application F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre α et V un vecteur propre de B associé à la valeur propre β.

Montrer que $U{}^tV$ est un vecteur propre de F associé à la valeur propre $\alpha - \beta$.

c) F est-elle un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

d) F est-elle diagonalisable ?

Q1 a) A et B sont deux matrices symétriques à coefficients réels donc A et B sont diagonalisables.

b) $A^2 = \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} = I_3$. $A^2 = I_3$

$B^2 = \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 30 & 12 & -6 \\ 12 & 12 & 12 \\ -6 & 12 & 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = B$.

$A^2 = I_3$ et $B^2 = B$.

c) $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A ayant pour zéros -1 et 1 donc $\mathrm{Sp}A \subset \{-1, 1\}$.

$X^2 - X$ est un polynôme annulateur de B ayant pour zéros 1 et 0 donc $\mathrm{Sp}B \subset \{0, 1\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y + 4z = -6x \\ 4x - 2y + 4z = -6y \\ 4x + 4y - 2z = -6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y + 4z = 0 \\ 4x + 4y + 4z = 0 \\ 4x + 4y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0$

Alors $-1 \in Sp\,A$ et $SEP(A,-1)$ est l'hyperplan d'équation $x+y+z=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $\dim SEP(A,-1) = 2$.
Comme A est symétrique à coefficients réels, ses sous-espaces propres sont orthogonaux et la somme de leurs dimensions est 3.
Alors A possède une seconde valeur propre nécessairement égale à 1 (car $Sp\,A \subset \{-1,1\}$) et $SEP(A,1) = SEP(A,-1)^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$Sp\,A = \{-1,1\}$. $SEP(A,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. $SEP(A,-1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$.

$$BX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y-z=6x \\ 2x+2y+2z=6y \\ -x+2y+5z=6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 2x-4y+2z=0 \\ -x+2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-2y+z=0.$$

$1 \in Sp(B)$ et $SEP(B,1)$ est l'hyperplan d'équation $x-2y+z=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
En raisonnant comme pour A on montre que $0 \in Sp\,B$ et $SEP(B,0) = SEP(B,1)^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$.

$Sp\,B = \{0,1\}$. $SEP(B,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(B,0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$.

Q2 Posons $Y_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. $Y_1 \in SEP(A,1)$, $Y_2 \in SEP(B,0)$.

Or $1-2+1=0$ et $1-2+1=0$ donc $Y_1 \in SEP(B,1)$ et $Y_2 \in SEP(A,-1)$.

Notons encore que Y_1 et Y_2 sont orthogonaux.
Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $X \in SEP(A,-1) \cap SEP(B,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=-x \end{cases}$.
Posons $Y_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. $Y_3 \in SEP(A,-1)$ et $Y_3 \in SEP(B,1)$

$Y_1 \in SEP(A,1)$ et $Y_3 \in SEP(A,-1)$ donc Y_1 et Y_3 sont orthogonaux.
$Y_2 \in SEP(B,0)$ et $Y_3 \in SEP(B,1)$ donc Y_2 et Y_3 sont orthogonaux.

(Y_1, Y_2, Y_3) est une famille orthogonale d'éléments non nuls de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc (Y_1, Y_2, Y_3) est une famille libre et orthogonale de cardinal 3 de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, (Y_1, Y_2, Y_3) est une base orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Mieux (Y_1, Y_2, Y_3) est une base orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (resp. B) associés aux valeurs propres $1, -1, -1$ (resp. $1, 0, 1$).

$\|Y_1\| = \sqrt{3}$, $\|Y_2\| = \sqrt{6}$, $\|Y_3\| = \sqrt{2}$.

Posons $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1$, $Z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} Y_2$ et $Z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_3$.

$\mathcal{B} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (resp. B) $\longrightarrow$ associés aux valeurs propres $1, -1, -1$ (resp. $1, 0, 1$).

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

1° $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

2° P est orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

3° ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et ${}^tPBP = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ soient diagonales.

Q3 a) . $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $F(M) = AM - MB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. F est une application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$F(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)B = \lambda AM + AN - \lambda MB - NB = \lambda(AM - MB) + AN - NB = \lambda F(M) + F(N)$.

Ceci achève de montrer que **F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**

b) Notons que $U\,{}^tV \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tV \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

$AU = \alpha U$ et $BV = \beta V$.

${}^tVB \underset{\ast}{=} {}^tV\,{}^tB = {}^t(BV) = {}^t(\beta V) = \beta\,{}^tV$.

$\ast$ B est symétrique

Alors $F(U\,{}^tV) = AU\,{}^tV - U\,{}^tVB = (\alpha U)\,{}^tV - U(\beta\,{}^tV) = (\alpha-\beta)\,U\,{}^tV$.

$\underline{F(U\,{}^tV) = (\alpha-\beta)\,U\,{}^tV.}$

Posons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. $\quad U\,{}^tV = (u_i v_j)_{\substack{1\le i\le 3 \\ 1\le j\le 3}}$.

U (resp. V) est un vecteur propre de A (resp. B) donc $U \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ (resp. $V \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$).

$\exists i_0 \in [\![1,3]\!]$, $u_{i_0} \neq 0$ et $\exists j_0 \in [\![1,3]\!]$, $v_{j_0} \neq 0$.

Alors $u_{i_0} v_{j_0} \neq 0$ donc $\underline{U\,{}^tV \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$.

$\underline{\text{Ainsi } U\,{}^tV \text{ est un vecteur propre de } F \text{ associé à la valeur propre } \alpha-\beta.}$

c) Z_1 est un vecteur propre de A et de B associé à la valeur propre 1.

Donc $Z_1\,{}^tZ_1$ est un vecteur propre de F associé à la valeur propre $1-1=0$.

0 est valeur propre de F. $\underline{F \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

d) Posons $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $H_{ij} = Z_i\,{}^tZ_j$.

Z_1, Z_2, Z_3 étant des vecteurs propres de A et B, $(H_{ij})_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2}$ est une famille de cardinal 9 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de F.

Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_{ij})_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2}$ une famille de réels telle que $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} H_{ij} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, Z_i\,{}^tZ_j = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall \ell \in [\![1,3]\!]$, $\underline{\underline{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, Z_i \underbrace{{}^tZ_j Z_\ell}_{\langle Z_j, Z_\ell\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } j=\ell \\ 0 \text{ si } j\neq \ell\end{cases}} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i\ell} Z_i$.

$\forall k \in [\![1,3]\!]$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} Z_i = 0$. (Z_1, Z_2, Z_3) est libre donc

$\forall k \in [\![1,3]\!]$, $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\alpha_{ik} = 0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{F} = (M_{ij})_{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2}$ est une famille libre de $M_3(\mathbb{R})$. Card $\mathcal{F} = 9 = \dim M_3(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathcal{F}$ est une base de $M_3(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de F.

<u>F est diagonalisable</u>.

<u>Exercice 1</u>.. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de $M_3(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

<u>Exercice 2</u>.. Montrer que $\mathrm{Sp}\, \mathcal{F} = \{-2, -1, 0, 1\}$

<u>Exercice 3</u>.. Généraliser.

Exercice 24 Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A est-elle diagonalisable ?

Q2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer B^n et A^n pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$L_2 \leftrightarrow L_3$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2$ donne $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$ et : $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$ qui est une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$ que nous notons R_λ.

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3$ non inversible $\Leftrightarrow R_\lambda$ non inversible $\Leftrightarrow 1-\lambda = 0$ ou $-(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

$Sp(A) = \{1\}$. Comme A n'est pas $1 \times I_3$, <u>A n'est pas diagonalisable</u>.

Confirmons. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -y-z = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -y$.

$SEP(A,1)$ est le plan vectoriel d'équation $z = -y$.

$SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. $Sp(A) = \{1\}$ et $\dim SEP(A,1) = 2$; A n'est pas diagonalisable !

Q2 Posons $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Pour montrer que A et B sont semblables il suffit de trouver une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

<u>Analyse</u> : Supposons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ solution. $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = e'_2$ et $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$.

Ainsi $e'_1 \in Ker(f - Id_E)$, $e'_2 \in Ker(f - Id_E)$ et $(f - Id_E)(e'_3) = e'_2$.

Donc <u>$e'_1 \in Ker(f - Id_E)$, $e'_2 \in Ker(f - Id_E) \cap Im(f - Id_E)$ et $(f - Id_E)(e'_3) = e'_2$.</u>

<u>Synthèse</u> : $Sp(f) = Sp(A) = \{1\}$. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$; ainsi

$SEP(f,1) = Ker(f - Id_E) = Vect(e_1, e_2 - e_3)$.

Cherchons $Im(f - Id_E)$. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f - Id_E) = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$Im(f - Id_E) = Vect\left((f - Id_E)(e_1), (f - Id_E)(e_2), (f - Id_E)(e_3)\right) = Vect(0_E, -e_2 + e_3, -e_2 + e_3)$.

$Im(f - Id_E) = Vect(e_2 - e_3) \subset Ker(f - Id_E)$. Ainsi $Im(f - Id_E) \cap Ker(f - Id_E) = Vect(e_2 - e_3)$.

Dès lors posons <u>$e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_2 - e_3$ et cherchons e'_3 tel que : $(f - Id)(e'_3) = e'_2$.</u>

Posons $e'_3 = x e_1 + y e_2 + z e_3$ avec $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$(f - Id_E)(e'_3) = e'_2 \iff (A - I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}0=0\\-y-z=1\\y+z=-1\end{cases} \iff y+z=-1$

Posons alors $x=0$, $y=0$, $z=-1$.

Alors $e'_3=-e_3$ et $(f-Id_E)(e'_3)=e'_2$.

Soit P la matrice de <u>la famille</u> (e'_1,e'_2,e'_3) dans $\mathcal{B}$; $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}$.

P est triangulaire inférieure sans zéro sur la diagonale. P est donc inversible ce qui prouve que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de E.

De plus $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = B$ car $f(e'_1)=e'_1$, $f(e'_2)=e'_2$ et $f(e'_3)=e'_2+e'_3$.

<u>A et B sont donc semblables.</u>

P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donc $M_{\mathcal{B}'}(f)=P^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)P$ d'où : $B=P^{-1}AP$

$B=P^{-1}AP$ avec $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ un calcul très simple donne $P^{-1}=P$!!

Posons $C=B-I$. $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$; $C^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Ainsi $\forall k\in[\![2,+\infty[\![$, $C^k=0$

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $B^n=(C+I_3)^n \underset{CI_3=I_3C}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}C^kI_3^{n-k} = \binom{n}{0}C^0I_3^n+\binom{n}{1}CI_3^{n-1} = I+nC$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $B^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$ ceci vaut encore pour $n=0$ et 1.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $B^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$0\notin Sp(B)$ donc B est inversible. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ montrons que $B^{-n}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Il suffit de montrer que $B^n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$ car $B^{-n}=(B^n)^{-1}$.

$B^n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n+n\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$. $B^{-n}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{Z}$, $B^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$. $\forall n\in\mathbb{Z}$, $A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}=PB^nP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1-n&-n\\0&n&n+1\end{pmatrix}$.

Exercice 34 **Réduction d'un endomorphisme** *Avec correction*

$\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

f est l'endomorphisme de E de matrice $A=\begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&5&4&-2\\0&4&5&2\\0&-2&2&8\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Q2. Construire (en justifiant) une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Q1 Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Cherchons $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)$.

Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3+te_4$ un élément de E. Posons $X=M_{\mathcal{B}}(u)$. $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$.

$$u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\Leftrightarrow (f-\lambda Id_E)(u)=0\Leftrightarrow (A-\lambda I_4)X=0_{M_{4,1}(\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{cases}(9-\lambda)x=0\\(5-\lambda)y+4z-2t=0\\4y+(5-\lambda)z+2t=0\\-2y+2z+(8-\lambda)t=0\end{cases}$$

1er cas.. $\lambda=9$

$$u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\Leftrightarrow\begin{cases}-4y+4z-2t=0\\4y-4z+2t=0\\-2y+2z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow 2y-2z+t=0$$

Si $\lambda=9$: $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)$ est l'hyperplan de E d'équation $2y-2z+t=0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Ainsi $9\in Sp\, f$ et $\dim SEP(f,9)=3$.

$SEP(f,9)=\{xe_1+ye_2+ze_3+te_4\in E \mid t=-2y+2z\}=\{xe_1+ye_2+ze_3+(-2y+2z)e_4\ ;\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$

$SEP(f,9)=\{xe_1+y(e_2-2e_4)+z(e_3+2e_4)\ ;\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=\mathrm{Vect}(e_1,\ e_2-2e_4,\ e_3+2e_4)$.

$\mathcal{B}_9=(e_1,e_2-2e_4,e_3+2e_4)$ est une famille génératrice de cardinal 3 de $SEP(f,9)$ qui est de dimension 3. $\mathcal{B}_9=(e_1,e_2-2e_4,e_3+2e_4)$ est une base de $SEP(f,9)$.

2ème cas.. $\lambda\neq 9$

$$u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\(5-\lambda)y+4z-2t=0\\4y+(5-\lambda)z+2t=0\\-2y+2z+(8-\lambda)t=0\end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=0\\(5-\lambda)y+4z-2t=0\\(9-\lambda)(y+z)=0\\-2y+2z+(8-\lambda)t=0\end{cases}$$

$$u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\overset{\lambda\neq 9}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=0\\z=-y\\0=(5-\lambda)y-4y-2t=(1-\lambda)y-2t\\0=-2y-2y+(8-\lambda)t=-4y+(8-\lambda)t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\z=-y\\t=\frac{1-\lambda}{2}y\\0=-4y+(8-\lambda)\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)y=\frac{\lambda(\lambda-9)}{2}y\end{cases}$$

$$u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\overset{\lambda\neq 9}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=0\\z=-y\\t=\frac{1-\lambda}{2}y\\\lambda y=0\end{cases}$$

a) $\lambda\neq 0$. $u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\\t=0\end{cases}\Leftrightarrow u=0_E$

λ n'est pas valeur propre de f.

b) $\lambda=0$ $u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\z=-y\\t=y/2\end{cases}$

Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f - 15 d_E) = \{y e_2 - y e_3 + \frac{y}{2} e_4 \,;\, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(e_2 - e_3 + \frac{1}{2} e_4) =$
$\operatorname{Vect}(2e_2 - 2e_3 + e_4)$.

Alors comme $2e_2 - 2e_3 + e_4 \neq 0_E$! 0 est valeur propre de f et

$\mathcal{B}_2 = (2e_2 - 2e_3 + e_4)$ est une base de $SEP(f, 0)$.

Finalement $\operatorname{Sp} f = \{0, 9\}$. $SEP(f, 0)$ est la droite vectorielle engendrée par $2e_2 - e_3 + e_4$ et $SEP(f, 3)$ est l'hyperplan de E admettant pour base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4)$.

(Q2) $\operatorname{Sp} f = \{0, 9\}$ et $\dim SEP(f, 0) + \dim SEP(f, 9) = 1 + 3 = 4 = \dim E$ donc f est diagonalisable.

$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4)$ est une base de $SEP(f, 9)$, $\mathcal{B}_2 = (2e_2 - 2e_3 + e_4)$ est une base de $SEP(f, 0)$ & $E = SEP(f, 9) \oplus SEP(f, 0)$.

Alors $\mathcal{B}' = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4, 2e_2 - 2e_3 + e_4)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 9, 9, 9 et 0.

Remarques.. 1.. $M_{\mathcal{B}'}(f) = \operatorname{Diag}(9, 9, 9, 0)$

2.. $\operatorname{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.. L'inverse de $P = \operatorname{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est : $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4.. $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P = P^{-1} A P$.

Exercice 32 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q3. Calculer A^n pour n dans $\mathbb{N}^*$.

Q1 Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - y + z - t = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z + t = 0 \\ -x + y - (1+\lambda)z + t = 0 \\ -x + y - 3z + (3-\lambda)t = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1-\lambda)x - y + z - t = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z + t = 0 \\ -\lambda(x+z) = 0 \\ -x + y - 3z + (3-\lambda)t = 0 \end{cases}$$

<u>1er cas</u> : $\lambda = 0$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x + y - 3z + 3t = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2(x+z) = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x + y - 3z + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ 0 = -x + y + 3x - 3y \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \\ t = -x \end{cases}$$. $0 \in Sp(A)$ et $SEP(A,0) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

<u>2ème cas</u> : $\lambda \neq 0$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ -\lambda x - y - t = 0 \\ t = (\lambda - 1)y \\ 0 = -x + y + 3x + (3-\lambda)(\lambda-1)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = (\lambda-1)y \\ 0 = -\lambda x - y - (\lambda-1)y = -\lambda(x+y) \\ 0 = 2x + (-\lambda^2 + 4\lambda - 2)y \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = (\lambda-1)y \\ y = -x \\ 0 = x\left[2 + \lambda^2 - 4\lambda + 2\right] = (\lambda-2)^2 x \end{cases}$$.

<u>a)</u> $\lambda = 2$ $\quad AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \\ t = y = -x \end{cases}$. $2 \in Sp(A)$ et $SEP(A,2) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

<u>b)</u> $\lambda \neq 2$ $\quad AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$; $\lambda \notin Sp(A)$.

Finalement $Sp(A)=\{0,2\}$, $SEP(A,0)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A,2)=Vect\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi A n'est pas diagonalisable car $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,2) = 2 < 4$.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ une base de $E=\mathbb{R}^4$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

Pour prouver que A est semblable à la matrice B il suffit de trouver une base $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$ de E telle que : $M_{\mathcal{B}'}(f)=B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ (1)

Notons que $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(e'_1)=0_E & (e'_1\in Ker f)\\ f(e'_2)=e'_1 \\ f(e'_3)=2e'_3 & (e'_3\in Ker(f-2Id_E))\\ f(e'_4)=e'_3+2e'_4\end{cases}$

Notons encore que $Sp(f)=\{0,2\}$, $SEP(f,0)=Vect(e_1+e_2-e_3-e_4)$ et $SEP(f,2)=Vect(-e_1+e_2+e_3+e_4)$.

Dès lors posons $e'_1=e_1+e_2-e_3-e_4$ et $e'_3=-e_1+e_2+e_3+e_4$.

Cherchons alors e'_2 et e'_4 dans E tels que $f(e'_2)=e'_1$ et $f(e'_4)=e'_3+2e'_4$.

Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3+te_4\in E$.

$$f(u)=e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\-1&1&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+z-t=1\\x+y+z+t=1\\-x+y-z+t=-1\\-x+y-3z+3t=-1\end{cases} \underset{\substack{L_3=-L_1\\L_2\leftarrow L_1+L_2\\L_4\leftarrow L_4+L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x-y+z-t=1\\2x+2z=2\\-2z+2t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=t\\z=1-x\\-y-t=1-x-z=0\end{cases}$$

$$f(u)=e'_1 \Leftrightarrow \begin{cases}z=1-x\\t=1-x\\y=x-1\end{cases}$$

En prenant $x=1$, $y=z=t=0$ on a $u=e_1$ et $f(e_1)=e'_1$.

Dès lors posons $e'_2=e_1$; $f(e'_2)=e'_1$.

Reprenons $u=xe_1+ye_2+ze_3+te_4$.

$$f(u)=e'_3+2u \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\-1&1&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+z-t=-1+2x\\x+y+z+t=1+2y\\-x+y-z+t=1+2z\\-x+y-3z+3t=1+2t\end{cases}$$

$$f(u)=e'_3+2u \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y+z-t=-1\\ x-y+z+t=1\\ -x+y-3z+t=1\\ -x+y-3z+t=1\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3=L_4}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x-y+z-t=-1\\ -2y+2z=0\\ -x+y-3z+t=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=y\\ x+t=1\\ -x-2y+t=1\end{cases}$$

$$f(u)=e'_3+2u \Leftrightarrow \begin{cases} z=y\\ t=1-x\\ -x-2y+1-x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=y\\ t=1-x\\ y=-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x\\ y=-x\\ t=1-x\end{cases}$$

Posons $x=0$, $y=0$, $z=0$ et $t=1$. Alors $u=e_4$ et $f(u)=f(e_4)=e'_3+2e_4$.

Posons alors $e'_4=e_4$. $f(e'_4)=e'_3+2e'_4$.

Ainsi si $e'_1=e_1+e_2-e_3-e_4$, $e'_2=e_1$, $e'_3=-e_1+e_2+e_3+e_4$ et $e'_4=e_4$.

alors $f(e'_1)=0_E$, $f(e'_2)=e'_1$, $f(e'_3)=2e'_3$ et $f(e'_4)=e'_3+2e'_4$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$ est une base de E.

Comme $\dim E=4$ il suffit de prouver que (e'_1,e'_2,e'_3,e'_4) est libre.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\alpha e'_1+\beta e'_2+\gamma e'_3+\delta e'_4=0_E$.

$\alpha(e_1+e_2-e_3-e_4)+\beta(e_1)+\gamma(-e_1+e_2+e_3+e_4)+\delta e_4=0_E$.

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=0\\ \alpha+\gamma=0\\ -\alpha+\gamma=0\\ -\alpha+\gamma+\delta=0\end{cases} ; \quad \begin{cases} \alpha=\gamma=0\\ \beta=0\\ \delta=0\end{cases} ; \quad \alpha=\beta=\gamma=\delta=0.$$

Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base de E et $M_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&2\end{pmatrix}=B$.

Alors $B=P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $P=\begin{pmatrix} 1&1&-1&0\\ 1&0&1&0\\ -1&0&1&0\\ -1&0&1&1\end{pmatrix}$

Donc A est semblable à B.

(Q2) $B=\begin{pmatrix} U & O_2\\ O_2 & V\end{pmatrix}$ avec $U=\begin{pmatrix} 0&1\\ 0&0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} 2&1\\ 0&2\end{pmatrix}$ et $O_2=\begin{pmatrix} 0&0\\ 0&0\end{pmatrix}$.

Un produit élémentaire par blocs donne $\forall n\in\mathbb{N},\quad B^n=\begin{pmatrix} U^n & O_2 \\ O_2 & V^n\end{pmatrix}$.

$U^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=O_2$.. $\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\},\ U^n=0$

$V=2I_2+U$. $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ V^n\underset{\substack{\uparrow\\ I_2U=UI_2=U}}{=}\sum_{k=0}^{n}C_n^k U^k(2I_2)^{n-k}=2^nI_2+2^{n-1}nU=\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\},\ B^n=\begin{pmatrix}O_2 & O_2\\ O_2 & V^n\end{pmatrix}$ avec $V^n=\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$.

Un calcul simple donne $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\2&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&-2&2\end{pmatrix}$

Alors $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\1&0&1&0\\-1&0&1&0\\-1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&0&2^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\2&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&-2&2\end{pmatrix}$

Alors $\forall n\in\underline{\underline{[\![2,+\infty[\![}},\ A^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}0&-1&n-1&-n\\0&1&-(n-1)&n\\0&1&-(n-1)&n\\0&1&-(n+1)&n+2\end{pmatrix}$.

Exercice 13

Q1. A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que ces deux matrices sont semblables si et seulement si elles "représentent" le même endomorphisme (le plus gros travail consiste à écrire correctement cela).

Q2. $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'elles sont semblables.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $E = \mathbb{R}^3$ et f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

a) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A (en profiter pour relire les exercices 4 et 6 du Td cours réduction).

b) On suppose que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E telle que B soit la matrice de f dans cette base.

Montrer que $e'_1 \in \ker(f - 4Id_E) \cap \operatorname{Im}(f - 4Id_E)$ et que $e'_3 \in \ker(f - 2Id_E)$.

c) Choisir un élément e'_1 non nul de $\ker(f-4Id_E) \cap \operatorname{Im}(f-4Id_E)$ et un élément non nul e'_3 de $\ker(f-2Id_E)$. Construire un vecteur non nul e'_2 de E tel que $f(e'_2) = 3e'_1 + 4e'_2$ (on pourra résoudre un système). Conclure !

Q1. C.N. Supposons A et B semblables. $\exists P \in GL_n(K)$, $B = P^{-1}AP$.

Posons $E = K^n$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est A.

$P = (p_{ij})$. Posons $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$.

Alors P est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$.

P est encore la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme g qui transforme la base $\mathcal{B}$ en la famille $\mathcal{B}'$.

$P = M_{\mathcal{B}}(g)$ est inversible donc g est bijective et ainsi $\mathcal{B}'$ qui est l'image par g de la base $\mathcal{B}$ est une base de E.

P est alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et alors : $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$

$M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP = B$. $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

Ainsi <u>A et B sont les matrices d'un même endomorphisme.</u>

C.S. Réciproquement supposons que A et B soient les matrices d'un même endomorphisme.

Ainsi il existe un espace vectoriel E de dimension n sur K, deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et un endomorphisme f de E tels que : $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = M_{\mathcal{B}'}(f)$.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$ et ainsi $B = P^{-1}AP$. <u>A et B sont semblables.</u>

<u>A et B sont semblables si ce sont les matrices d'un même endomorphisme.</u>

Q2 a) Soit λ un réel et soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}8x-y-5z=\lambda x\\-2x+3y+z=\lambda y\\4x-y-z=\lambda z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(8-\lambda)x-y-5z=0\\-2x+(3-\lambda)y+z=0\\4x-y-(\lambda+1)z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4-\lambda)x+(\lambda-4)z=0 & (1)-(3)\\-2x+(3-\lambda)y+z=0\\4x-y-(\lambda+1)z=0\end{cases}$$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}(\lambda-4)(z-x)=0\\-2x+(3-\lambda)y+z=0\\4x-y-(\lambda+1)z=0\end{cases}$$

1er cas : $\lambda=4$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}-2x-y+z=0\\4x-y-5z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6x+6z=0 & (1)-(2)\\4x-y-5z=0\end{cases}$$

$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\-x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow x=z=-y$. 4 est valeur propre de A et $SEP(A,4)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

2ème cas : $\lambda\neq 4$.

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\0=-2x+(3-\lambda)y+x=-x+(3-\lambda)y\\0=4x-y-(\lambda+1)x=(3-\lambda)x-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\x=(3-\lambda)y\\0=y[(3-\lambda)^2-1]\end{cases}$$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\x=(3-\lambda)y\\0=(4-\lambda)(2-\lambda)y\end{cases} \overset{\lambda\neq 4}{\Leftrightarrow} \begin{cases}z=x\\x=(3-\lambda)y\\0=(2-\lambda)y\end{cases}$$

a) $\lambda=2$ $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\x=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\y=x\end{cases}$ 2 est valeur propre de A et $SEP(A,2)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

b) $\lambda\neq 2$ $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\x=(3-\lambda)y\\y=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$. λ n'est pas valeur propre de A.

Finalement : $Sp(A)=\{2,4\}$. $SEP(A,2)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A,4)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

b) $\mathcal{M}_{B'}(f)=\begin{pmatrix}4&3&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, ainsi $f(e'_1)=4e'_1$; $f(e'_2)=3e'_1+4e'_2$ et $f(e'_3)=2e'_3$.

Alors $e'_1\in Ker(f-4Id_E)$, $e'_1=\frac{1}{3}(f-4Id_E)(e'_2)=(f-4Id_E)(\frac{1}{3}e'_2)\in Im(f-4Id_E)$

donc $e'_1\in Ker(f-4Id_E)\cap Im(f-4Id_E)$. $f(e'_3)=2e'_3$; $e'_3\in Ker(f-2Id_E)$.

c) $Sp(f)=Sp(A)=\{2,4\}$. $SEP(f,2)=Vect(e_1+e_2+e_3)$ et $SEP(f,4)=Vect(e_1-e_2+e_3)$.

$\mathcal{M}_B(f-4Id_E)=\begin{pmatrix}4&-1&-5\\-2&-1&1\\4&-1&-5\end{pmatrix}$. $Im(f-4Id_E)=Vect(4e_1-2e_2+4e_3, -e_1-e_2-e_3, -5e_1+e_2-5e_3)$

$Im(f-4Id_E)=Vect(4e_1-2e_2+4e_3, e_1+e_2+e_3)$ car

$-5e_1+2e_2-5e_3 = (-e_1-e_2-e_3)-(4e_1-2e_2+4e_3)$.

$\mathrm{Im}(f-4\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(2e_1-e_2+2e_3, e_1+e_2+e_3) \underset{(1)+(1)-2(2)}{=} \mathrm{Vect}(-3e_2, e_1+e_2+e_3) = \mathrm{Vect}(e_2, e_1+e_2+e_3)$.

$\underline{\underline{\mathrm{Im}(f-4\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_2, e_1+e_3)}}$.

Alors $\mathrm{Ker}(f-4\mathrm{Id}_E) = SEP(f,4) = \mathrm{Vect}(e_1-e_2+e_3) \subset \mathrm{Im}(f-4\mathrm{Id}_E)$.

Posons $e'_1 = e_1-e_2+e_3$; $e'_1 \in \mathrm{Ker}(f-4\mathrm{Id}_E) \cap (\mathrm{Im}(f-4\mathrm{Id}_E))$. $f(e'_1) = 4e'_1$.

Posons $e'_3 = e_1+e_2+e_3$; $e'_3 \in \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)$; $f(e'_3) = 2e'_3$.

Cherchons $e'_2 = xe_1+ye_2+ze_3 \in E$ tel que : $f(e'_2) = 3e'_1+4e'_2$ ou tel que :

$(f-4\mathrm{Id}_E)(e'_2) = 3e'_1$.

$(f-4\mathrm{Id}_E)(e'_2) = 3e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 4x-y-5z=3 \\ -2x-y+z=-3 \\ 4x-y-5z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y-5z=3 \\ 6x-6z=6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x-1 \\ y = 4x-5z-3 = 4x-5x+5-3 = -x+2 \end{cases}$

On peut donc prendre $x=1$, $y=1$ et $z=0$. Posons alors $e'_2 = e_1+e_2$.

Alors $f(e'_2) = 3e'_1+4e'_2$.

Prouvons alors que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

$\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) = \mathrm{Vect}(e_1-e_2+e_3, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3) = \mathrm{Vect}(e_1-e_2+e_3, e_1+e_2, e_3)$.

$= \mathrm{Vect}(e_1-e_2, e_1+e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(2e_1, e_1+e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1+e_2, e_3)$

$= \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = E$.

$\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une famille génératrice de trois éléments de E qui est de dimension 3, c'est donc une base de E.

$M_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$. D'après $\varphi 1$, A et B ~~sont~~ semblables.

Mieux posons $P = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $B = P^{-1}AP$.

Remarque : $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice de contrôle.. Calculer B^n et en déduire A^n.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^2 & 2\times3\times4 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^2 & 2\times3\times4 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^3 & 2\times3\times4^2+3\times4^2 & 0 \\ 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^3 & 3\times3\times4^2 & 0 \\ 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 4^n & n\times3\times4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

→ C'est vrai pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$!

→ Supposons l'égalité vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & n\times3\times4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^{n+1} & n\times3\times4^n+3\times4^n & 0 \\ 0 & 4^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^{n+1} & (n+1)\times3\times4^n & 0 \\ 0 & 4^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

ceci achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 3n4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$B = P^{-1}AP$; $A = PBP^{-1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 3n4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n & 3n4^{n-1}+4^n & 2^n \\ -4^n & -3n4^{n-1}+4^n & 2^n \\ 4^n & 3n4^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(3+\frac{3n}{2}\right)4^n - 2^n & -4^n+2^n & -\left(\frac{3n}{2}+2\right)4^n + 2^{n+1} \\ \left(1-\frac{3n}{2}\right)4^n - 2^n & 4^n+2^n & -2\left(1-\frac{3n}{4}\right)4^n + 2^{n+1} \\ \left(1+\frac{3n}{2}\right)4^n - 2^n & -4^n+2^n & -\frac{3n}{2}4^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui suit ne constitue pas des corrections mais des traces de traces de corrections

Exercice 1 Trouver a, b, c, a', b' et c' pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres (définir une stratégie simple et claire pour traiter le problème).

On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $U \neq 0$, $V \neq 0$ et $W \neq 0$.

* Supposons (a,b,c,a',b',c') solution. $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $AU = \alpha U$, $AV = \beta V$ et $AW = \gamma W$.

$\cdot \begin{cases} 1+a+a' = \alpha \\ 1+b+b' = \alpha \\ 1+c+c' = \alpha \end{cases}$ donc $\underline{a+a' = b+b' = c+c'}$; $\cdots \begin{cases} 1-a' = \beta \\ 1-b' = 0 \\ 1-c' = -\beta \end{cases}$ donc $\underline{b' = 1}$ et $\underline{a'+c' = 2}$ $L_1 + L_3$

$\cdots \begin{cases} 1-a = \gamma \\ 1-b = -\gamma \\ 1-c = 0 \end{cases}$ donc $\underline{a+b = 2 \text{ et } c = 1.}$

$\begin{cases} b' = 1 \,;\; c = 1 \,; \\ c' = 2-a' \,;\; b = 2-a \\ a+a' = b+b' = 1+2-a \\ a+a' = c+c' = 1+2-a' \end{cases}$ $\begin{cases} 2a+a' = 3 \\ a+2a' = 3 \end{cases}$ $a = a' = 1$

Ainsi $a = b = c = a' = b' = c' = 1$;

$\underline{\underline{(a,b,c,a',b',c') = (1,1,1,1,1,1)}}$... il y a au plus une solution.

* Réciproquement pour $(a,b,c,a',b',c') = (1,1,1,1,1,1)$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $AU = 3U$, $AV = 0$, $AW = 0$.

$(1,1,1,1,1,1)$ est solution ...

CCl Il y a une solution et une seule : $(a,b,c,a',b',c') = (1,1,1,1,1,1)$.

Exercice 2

Q1. $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Donner une expression simple de $Q(D)$.

Q2. A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes de A et $Q = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$. Montrer que $Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Ainsi une matrice diagonalisable admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Q3. Enoncer un résultat analogue pour les endomorphismes.

(Q1) On pose $\varphi = \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell X^\ell$ alors $\varphi(A) = \begin{pmatrix} \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell \alpha_1^\ell & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell \alpha_n^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\alpha_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varphi(\alpha_n) \end{pmatrix}$

| le produit de 2 matrices diagonales est une matrice diag.
| une CL de matrices diag. est une matrice diag.

(Q2) On pose encore $\varphi = \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell X^\ell$. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ car A est diagonalisable.

$A = PDP^{-1}$. $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{r} a_k PD^k P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{r} a_k D^k\right)P^{-1} = P\,\varphi(D)\,P^{-1}$.

$\varphi(D) \overset{Q1}{=} \begin{pmatrix} \varphi(d_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varphi(d_n) \end{pmatrix} = 0$ car $Sp(D) = Sp(A)$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!], d_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$

donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \varphi(d_i) = 0$ car $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des zéros de φ

Si $\varphi(D) = 0$; $\varphi(A) = 0$.

Q3 dim $E = n \geq 1$. $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est diagonalisable, f admet un polynôme annulateur scindé à racines ~~simples~~... mais seule la réciproque est jolie !

Exercice 3 E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E. On suppose que f a n valeurs propres distinctes.

Q1. Que dire des sous-espaces propres de f ?

Q2. Montrer que si : $f \circ g = g \circ f$, les sous-espaces propres de f (resp. g) sont stables par g (resp. f).

Q3. Montrer que : $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g se diagonalisent dans la même base.

Q1.. Ce sont des droites vectorielles (dim $E = n$ et f admet n valeurs propres distinctes).

Q2.. Soit $u \in SEP(f, \lambda)$. $f(u) = \lambda u$; $g(f(u)) = \lambda g(u)$; $f(g(u)) = \lambda g(u)$; $g(u) \in SEP(f,\lambda)$.

$SEP(f,\lambda)$ est stable par g. Cela suffit non ?

Q3 C.N. (H) $f \circ g = g \circ f$. f est diagonalisable car f possède n valeurs propres distinctes et dim $E = n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux vp $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $e_i \in SEP(f,\lambda_i)$, $e_i \neq 0$ et dim $SEP(f,\lambda_i) = 1$ alors $SEP(f,\lambda_i) = \text{Vect}(e_i)$.

D'après Q2 $g(e_i) \in SEP(f,\lambda_i) = \text{Vect}(e_i)$; $\exists \mu_i \in \mathbb{K}$, $g(e_i) = \mu_i e_i$; $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix}$ et FIN

C.S. Soit une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}}(g)$ soient diagonales.

$M_{\mathcal{B}}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(g \circ f)$; $f \circ g = g \circ f$ et FIN

deux matrices diagonales commutent.

Exercice 4 $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. f est l'application qui à tout élément P de E associe le reste dans la division de AP par B.

Q0. Rappeler le théorème concernant la division euclidienne des polynômes.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E (à faire très proprement).

Q2. Trouver la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Q0 $A \in \mathbb{K}[X]$, $B \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0$.

$\exists!\, (Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$, $A = QB + R$ et $\deg R < \deg B$.

Q1 • $\forall P \in E = \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg f(P) < \deg B = 4$; $\forall P \in E$, $f(P) \in E$.

• <u>Linéarité. A savoir faire par ♥.</u> $(P_1, P_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists ! (Q_1, R_1) \in \mathbb{R}[X]^2$, $AP_1 = Q_1 B + R_1$ et $\deg R_1 < \deg B$. $R_1 = f(P_1)$.

$\exists ! (Q_2, R_2) \in \mathbb{R}[X]^2$, $AP_2 = Q_2 B + R_2$ et $\deg R_2 < \deg B$. $R_2 = f(P_2)$.

$A(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda Q_1 + Q_2) B + \lambda R_1 + R_2$ avec $\lambda Q_1 + Q_2 \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda R_1 + R_2 \in \mathbb{R}[X]$

et $\deg(\lambda R_1 + R_2) < \deg B$ ($\deg R_1 < \deg B$ et $\deg R_2 < \deg B$)

Par UNICITÉ du reste et du quotient dans la division euclidienne de $A(\lambda P_1 + P_2)$ par B on peut dire que $\lambda R_1 + R_2$ (resp. $\lambda Q_1 + Q_2$) est le reste (resp. quotient) dans la division de $A(\lambda P_1 + P_2)$ par B. Alors $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

Q2 Sans difficulté : $M = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Sp(f) = Sp(M) = \{-1, 0\}$

$SEP(M, -1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $SEP(f, -1) = \mathrm{Vect}(-X^3 + 1)$. $SEP(M, 0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; $SEP(f, 0) = \mathrm{Vect}(X^3 + X^2 + X)$.

Exercice $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. f et g sont les endomorphismes de E ayant respectivement pour matrices dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f et g.

Q2. Trouver une base de E par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.

Q1 $Sp(f) = \{1\}$ et $SEP(f, 1) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2 - e_3)$; f n'est pas diagonalisable.

$Sp(g) = \{0, 2\}$, $SEP(g, 0) = \mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 - e_3)$ et $SEP(g, 2) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$; g n'est pas diagonalisable.

Q2 Posons $e'_1 = 2e_1 + e_2 - e_3$ et $e'_2 = e_2 - e_3$. $g(e'_1) = 0_E$ et $g(e'_2) = 2e'_2$.

De plus $e'_1 \in SEP(f, 1)$ et $e'_2 \in SEP(f, 1)$. $f(e'_1) = e'_1$ et $f(e'_2) = e'_2$

Notons que (e'_1, e'_2) est libre. ~~Posons~~ Choisissons n'importe quel vecteur e'_3 tel que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de E. Alors $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{a} \\ 0 & 2 & \hat{b} \\ 0 & 0 & \hat{c} \end{pmatrix}$

C'est fini non ?

$e'_3 = e_3$ convient ! On a alors $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $A^p = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix}$. $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & (0) \\ (0) & \lambda_n^p \end{pmatrix} = (P^{-1}AP)^p = P^{-1}A^pP = P^{-1}I_nP = I_n$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i^p = 1$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = \pm 1$; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i^2 = 1$. $D^2 = I_n$.

$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$.

Exercice 7 ♡ n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose

$$f(P) = (X^2-1)P' - nXP.$$

Q1. Prouver que f est un endomorphisme de E.

Q2. Soit λ un réel et P un élément non nul de E tels que : $f(P) = \lambda P$.

a) Soit α un zéro de P dans $\mathbb{C}$ d'ordre de multiplicité k. Montrer que nécessairement α vaut 1 ou -1.

b) En déduire que : $P = c(X-1)^p(X+1)^q$, avec c dans $\mathbb{R}^*$ et (p,q) dans $[\![0,n]\!]^2$.

Exprimer q et λ en fonction de p et de n.

c) Conclure cette première phase.

Q3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Q1 La linéarité est claire. Soit $P \in E$, montrons que $f(P) \in E$.

$\deg P \le n$; $\deg((X^2-1)P' - nXP) \le n+1$. Notons a_n le coeff. de X^n dans P (a_n n'est pas nécessairement différent de 0).

Le coefficient de X^{n+1} dans $f(P)$ est $na_n - na_n = 0$! Comme $\deg f(P) = \deg((X^2-1)P' - nXP) \le n+1$ on a $\deg f(P) \le n$! cqfd.

Q2 On part de $\lambda \in Sp(f)$ et de P vecteur propre de f associé à λ.

a) et b) Supposons $\alpha \neq 1$ et -1. $(X^2-1)P' - nXP = \lambda P$; $(X^2-1)P' = (\lambda + nX)P$.

$(X-\alpha)^k$ divise $(\lambda+nX)P$ donc $(X^2-1)P'$ donc P' car $\alpha \neq \pm 1$.

Alors α est un zéro de P' d'ordre au moins k ce qui n'est possible que si $P' = 0$.

Mais $P' = 0$ donne $(\lambda+nX)P = 0$ donc $P = 0$ ($\lambda + nX \neq 0$)!!

1 et -1 sont les seuls zéros de P dans $\mathbb{C}$. Alors $\exists c \in \mathbb{R}^*$, $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $P = c(X-1)^p(X+1)^q$.

$\deg P \le n$ donc $p \in [\![0,n]\!]$ et $q \in [\![0,n]\!]$ (on a même $p+q \le n$).

En écrivant $f(P) = \lambda P$ il vient : $\begin{cases} p+q = n \\ p-q = \lambda \end{cases}$ $\begin{cases} q = n-p \\ \lambda = 2p-n \end{cases}$ $\lambda = 2p-n$, $p \in [\![0,n]\!]$ et $P \in Vect((X-1)^p(X+1)^{n-p})$.

c) Il est fondamental de conclure proprement cette première phase.

1°/ $Sp(f) \subset \{2p-n ; p \in [\![0,n]\!]\}$ 2°/ Si $\lambda \in Sp(f)$, si $\lambda = 2p-n$ avec $p \in [\![0,n]\!]$ alors $SEP(f,\lambda) \subset Vect((X-1)^p(X+1)^{n-p})$.

Q3 .. Pour finir on prend $p \in [\![0,n]\!]$ et on vérifie que $f((X-1)^p(X+1)^{n-p}) = (2p-n)(X-1)^p(X+1)^{n-p}$.

Exercice 8 ♡ L est un élément non nul de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $n \in [\![2,+\infty[\![$. PS

On pose $A = CL$ et $a = LC$.

Q1. Calculer A^2 en fonction de a et A. Qu'en déduire pour le spectre de A ?

Q2. Montrer que A est de rang 1 (on pourra expliciter A à partir des coefficients de C et L).

Q3. Montrer que $\operatorname{Sp} A = \{0, a\}$.

Q4. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas nulle.

Q1. Notons que $LC \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et donc LC est assimilable à un élément de $\mathbb{K}$.

$A^2 = CLCL = C(a)L = aCL = aA$. $A^2 = aA$. Posons $P = X^2 - aX$. $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et

$\{\alpha \in \mathbb{K} \mid P(\alpha) = 0\} = \{0, a\}$. Ainsi $\underline{\underline{\operatorname{Sp}(A) \subset \{0, a\}}}$.

Q2. $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. $A = CL = (c_i \ell_j)$.

$\exists i_0 \in [\![1,n]\!],\ \ell_{i_0} \neq 0$

$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} c_1\ell_1 \\ c_2\ell_1 \\ \vdots \\ c_n\ell_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_1\ell_n \\ c_2\ell_n \\ \vdots \\ c_n\ell_n \end{pmatrix}}_{\text{colonnes de } A}\Bigg) = \dim \operatorname{Vect}(\ell_1 C, \ell_2 C, \dots, \ell_n C) = \dim(\operatorname{Vect}(C)) \underset{C \neq 0}{=} 1$

$\underline{\operatorname{rg} A = 1}$. $\underline{\underline{\text{Remarque}}}$. Réciproquement si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $\operatorname{rg} A = 1$: $\exists C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $\begin{cases} C \neq 0 \\ L \neq 0 \\ A = CL \end{cases}$

Q3 $\operatorname{rg} A = 1$ donc $\dim \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\} = n-1$; $0 \in \operatorname{Sp}(A)$.

$C \neq 0$ et $AC = CLC = Ca = aC$; $a \in \operatorname{Sp}(A)$.

$\{0, a\} \subset \operatorname{Sp}(A) \subset \{0, a\}$. $\operatorname{Sp}(A) = \{0, a\}$.

Q4 1er cas. $a = 0$. $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$ et $\dim \operatorname{SEP}(A, 0) = n-1$; A n'est pas diagonalisable.

2ème cas. $a \neq 0$ $\operatorname{Sp}(A) = \{0, a\}$ et $\dim \operatorname{SEP}(A, 0) = n-1$. Nécessairement $\dim \operatorname{SEP}(A, a) = 1$

et A est diagonalisable.

Donc A est diagonalisable ssi $a \neq 0$.

$A^2 \neq 0 \Leftrightarrow aA \neq 0 \underset{A \neq 0}{\Leftrightarrow} a \neq 0$. Donc A est diagonalisable ssi $A^2 \neq 0$.

Exercice 9 n est un élément de $[\![3, +\infty[\![$. $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (X^2+1)P'' - 2XP'$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver la matrice de f dans la base canononique de E. En déduire le spectre de f. Déterminer le cardinal de cet ensemble.

Q3. Montrer que : $\ker f \subset \mathbb{R}_3[X]$, puis que : $\ker f = \operatorname{Vect}(1, X^3 + 3X)$. Déterminer $\ker(f + 2Id_E)$.

Q4. Montrer que f est diagonalisable.

Q1 Aucun problème. **Q2** $f(1) = 0$, $f(X) = -2X$, $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f(X^k) = k(k-3)X^k + k(k-1)X^{k-2}$.

$A = \mathcal{M}_{(1, X, X^2, \dots, X^n)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & (0) & \\ & -2 & 0 & \ddots & & \\ & & -2 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ & (0) & & & \ddots & 0 \\ & & & & & n(n-3) \end{pmatrix}$. A est triangulaire supérieure.

$\underline{\underline{\operatorname{Sp}(A) = \{k(k-3) ; k \in [\![0, n]\!]\}}}$.

Pour $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k = k(k-3)$. $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = 2(k-1)$

Alors $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2 < \lambda_3 = 0 < \lambda_4 < \dots < \lambda_n$.

Ainsi $\mathrm{Card}\, Sp(A) = \mathrm{card}\{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\} = n-1$.

(Q3) Soit $P \in \mathrm{Ker} f$ et $P \neq 0$. Soit $a_\ell X^\ell$ le terme de plus haut degré de P ; $a_\ell \neq 0$.

$(X^2+1)P'' - 2XP' = 0$ et le coeff de X^ℓ dans $(X^2+1)P'' - 2XP'$ est : $\ell(\ell-1)a_\ell - 2\ell a_\ell$.

Ainsi $(\ell(\ell-1) - 2\ell)a_\ell = 0$; $\ell^2 - 3\ell = 0$; $\ell = 0$ ou 3 ; $\ell \leq 3$!

$\mathrm{Ker} f \subset \mathbb{R}_3[X]$. Cherchons $\mathrm{Ker} f$. Partons alors de $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$P \in \mathrm{Ker} f \iff (X^2+1)P'' - 2XP' = 0 \underset{\text{calcul}}{\iff} \begin{cases} 6a - 2c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 3a \\ b = 0 \end{cases}$$

$\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(1, X^3 + 3X)$

De même $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(X^2 - 1, X)$.

(Q4) $$n+1 = \dim E \geq \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim SEP(f,\lambda) = \dim SEP(f,\lambda_2) + \dim SEP(f,\lambda_3) + \sum_{k=4}^{n} \dim SEP(f,\lambda_k)$$

$$n+1 = \dim E \geq \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim SEP(f,\lambda) = 2 + 2 + \sum_{k=4}^{n} \dim SEP(f,\lambda_k) \geq 2 + 2 + \sum_{k=4}^{n} 1 = 4 + n - 3 = n+1.$$

Alors $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim SEP(f,\lambda)$; f est diagonalisable.

Exercice 10. . $(A,B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$. Montrer que $Sp(AB) = Sp(BA)$.

Il suffit de prouver que $Sp(AB) \subset Sp(BA)$. Soit $\lambda \in Sp(AB)$.

1er cas .. $\lambda = 0$. AB n'est pas inversible donc BA n'est pas inversible (BA inversible donne (*) B et A inversibles (ok ?!) et donc AB inversible). $\lambda \in Sp(BA)$.

2e cas .. $\lambda \neq 0$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, $X \neq 0$ et $ABX = \lambda X$.

$BABX = \lambda BX$; $(BA)(BX) = \lambda(BX)$.

$BX = 0 \Rightarrow ABX = 0 \Rightarrow \lambda X = 0 \underset{\text{car } X \neq 0}{\Rightarrow} \lambda = 0$! Alors $\begin{cases} BA(BX) = \lambda(BX) \\ \text{et} \\ BX \neq 0 \end{cases}$; $\lambda \in Sp(BA)$.

* Supposons BA inversible. $\exists C \in \mathcal{M}_n(K)$, $BAC = CBA = I_n$; $B(AC) = I_n$ donc B est inversible et $(CB)A = I_n$ donc A est inversible.

Exercice 12. E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$\forall f \in E,\quad \varphi(f)(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$

Q1.. Montrer que φ est un endomorphisme de E. φ est-il injectif ? surjectif ?

Q2.. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

Q1.. Soit $f \in E$. Montrons que $\varphi(f) \in E$. $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0. Ainsi $\varphi(f)$ est dérivable en tout point de $]0,1]$ comme produit de 2 fonctions dérivables en tout point de $]0,1]$. En particulier $\varphi(f)$ est continue en tout point de $]0,1]$.

Montrons que $\varphi(f)$ est continue en 0.

Soit F une primitive de f sur $[0,1]$. $\forall x \in]0,1],\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0) = \varphi(f)(0)$; ainsi $\varphi(f)$ est continue en 0.

Finalement : $\forall f \in E,\ \varphi(f) \in E$. Montrons alors la linéarité de φ.

Soient f et g deux éléments de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in]0,1],\ \varphi(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f+g)(t)\,dt = \lambda\, \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt = \lambda\, \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(x)$.

$$\varphi(\lambda f+g)(0) = (\lambda f+g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda\varphi(f)(0) + \varphi(g)(0) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(0)$$

Ainsi $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(\lambda f+g)(x) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(x)$ et donc $\varphi(\lambda f+g) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g)$. Ceci achève de prouver la linéarité de φ.

φ est un endomorphisme de E.

Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. $\varphi(f) = 0_E$. En particulier $\forall x \in]0,1],\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = 0$.

Donc $\forall x \in]0,1],\ \int_0^x f(t)\,dt = 0$ et par conséquent : $\forall x \in [0,1],\ \int_0^x f(t)\,dt = 0$!

En dérivant il vient : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = 0$. $f = 0_E$.

Finalement : $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$; φ est un endomorphisme injectif.

Nous avons vu que si $f \in E$, $\varphi(f)$ est dérivable sur $]0,1]$. Ainsi $\operatorname{Im}\varphi$ est contenu dans l'ensemble des éléments de E dérivables sur $]0,1]$. Posons $\forall x \in [0,1],\ g(x) = |x - \frac{1}{2}|$. g est un élément de E non dérivable en 1/2 donc $g \in E$ mais $g \notin \operatorname{Im}\varphi$. $\operatorname{Im}\varphi \subsetneq E$.

φ est un endomorphisme non surjectif.

(Q2) .. Analyse. Soit $\lambda \in Sp(\varphi)$. $\exists f \in E$, $f \neq 0_E$ et $\varphi(f) = \lambda f$.

λ n'est pas nul car $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}(\varphi - 0\,\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

Ainsi $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \frac{1}{\lambda}\varphi(f)(x) = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$. Alors f est dérivable en tout point de $]0,1]$.

$\forall x \in]0,1]$, $\lambda x f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. En dérivant il vient : $\forall x \in]0,1]$, $\lambda f(x) + \lambda x f'(x) = f(x)$

$\forall x \in]0,1]$, $f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x) = 0$ (ok?)

> Lemme .. a est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'ensemble S des applications f, dérivables de I dans $\mathbb{R}$, et telles que : $\forall x \in I$, $f'(x) - a(x)f(x) = 0$ est $\mathrm{Vect}(\omega)$ où $\omega : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{A(x)} \end{array}$ A étant une primitive de a sur I.

▲ Soit $f \in S$. $\forall x \in I$, $f'(x) - a(x)f(x) = 0$. $\forall x \in I$, $e^{A(x)}f'(x) - a(x)e^{A(x)}f(x) = 0$.

Ainsi $e^A f' - a e^A f = 0$; $e^A f' - (e^A)' f = 0$; $\frac{e^A f' - (e^A)' f}{(e^A)^2} = 0$.

Donc $\left(\frac{f}{e^A}\right)' = 0$; $\frac{f}{e^A}$ est constante sur I. $\exists c \in \mathbb{R}$, $f = c\,e^A$. $f \in \mathrm{Vect}(e^A) = \mathrm{Vect}(\omega)$.

Réciproquement. Soit $f \in \mathrm{Vect}(\omega)$. $\exists c \in \mathbb{R}$, $f = c\,e^A$.

$f' - a f = (c e^A)' - a(c e^A) = c A' e^A - c a e^A = c a e^A - c a e^A = 0$; $f \in S$.

Ceci achève de prouver le lemme. ▼

Reprenons notre démonstration : $\forall x \in]0,1]$, $f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x) = 0$.

Ce qui précède prouve que $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = c\,e^{A(x)}$ où A est une primitive de $x \mapsto \frac{1-\lambda}{\lambda x}$ sur $]0,1]$. Ainsi en prenant $\forall x \in]0,1]$, $A(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)$ nous obtenons :

$\forall x \in]0,1]$, $f(x) = c\,e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)} = c\,(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = c\,x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$

f n'étant pas nulle : c n'est pas nul. Par conséquent f ayant une limite finie en 0 : $f(0)$, $x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ admet une limite finie en 0. Ceci impose $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ donc $\lambda \in]0,1]$.

Ainsi $\lambda \in]0,1]$.

Soit alors g_λ le prolongement par continuité de la fonction : $\begin{array}{l}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \end{array}$

Notons que $g_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ lorsque $\lambda \in]0,1[$ et

$g_\lambda(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$ lorsque $\lambda = 1$.

Notons alors que $f \in \mathrm{Vect}(g_\lambda)$.

Ainsi si $\lambda \in Sp(f)$: $\lambda \in]0,1]$ et $SEP(\varphi,\lambda) \subset \mathrm{Vect}(g_\lambda)$. Cette inclusion est en fait une égalité car $\dim SEP(\varphi,\lambda) \geqslant 1$ et $\dim \mathrm{Vect}(g_\lambda) = 1$

Cette analyse nous donne alors
$$\left| \begin{array}{l} 1) \; Sp(\varphi) \subset]0,1]. \\ 2) \; \forall \lambda \in Sp(\varphi),\; SEP(\varphi,\lambda) = \mathrm{Vect}(g_\lambda). \end{array} \right.$$

"Synthèse" : Montrons que $Sp(\varphi) =]0,1]$.

Il nous suffit de prouver que $]0,1] \subset Sp(\varphi)$. Soit $\lambda \in]0,1]$.

$g_\lambda \in E$, $g_\lambda \neq 0_E$. Montrons que $\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$ et ainsi nous aurons $\lambda \in Sp(\varphi)$.

$\star$ $\lambda = 1$. $\forall x \in [0,1]$, $g_\lambda(x) = 1$.

$\varphi(g_\lambda)(0) = g_\lambda(0) = \lambda g_\lambda(0)$ car $\lambda = 1$.

$\forall x \in]0,1]$, $\varphi(g_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x 1\,dt = \frac{1}{x} \times x = 1 = 1 \times 1 = \lambda g_\lambda(x)$

Ainsi $\underline{\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda}$.

$\star$ $\lambda \in]0,1[$. $\forall x \in]0,1]$, $g_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ et $g_\lambda(0) = 0$.

$\varphi(g_\lambda)(0) = g_\lambda(0) = 0 = \lambda \times 0 = \lambda g_\lambda(0)$

$\forall x \in]0,1]$, $\varphi(g_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \frac{1}{x}\left[\lambda t^{1/\lambda}\right]_0^x = \frac{1}{x}\lambda x^{1/\lambda} = \lambda x^{1/\lambda - 1} = \lambda g_\lambda(x)$.

Donc $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(g_\lambda)(x) = \lambda g_\lambda(x)$; $\underline{\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda}$.

Donc $g_\lambda \in E$, $g_\lambda \neq 0_E$ et $\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$. $\lambda \in Sp(\varphi)$.

Finalement : $\underline{Sp(\varphi) =]0,1] \text{ et } \forall \lambda \in]0,1],\; SEP(\varphi,\lambda) = \mathrm{Vect}(g_\lambda).}$

Rappelons que si $\lambda = 1$: $\forall x \in [0,1]$, $g_\lambda(x) = 1$

si $\lambda \in]0,1[$, $g_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$.

Exercice 13.. $\dim_{\mathbb{R}} E = 2$. $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ est une base de E. $u\in\mathcal{L}(E)$ et $M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}$

Q1.. Trouver le spectre de u et ses sous-espaces propres.

Q2.. $\forall f\in\mathcal{L}(E)$. $\varphi(f)=u\circ f$. Prouver que $\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$. Trouver le spectre et les sous-espaces propres de φ.

Q1.. Soit $v=xe_1+ye_2$ un élément de E. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$u(v)=\lambda v \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x+4y=\lambda x\\x+y=\lambda y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=(\lambda-1)y\\0=(1-\lambda)x+4y=(1-\lambda)(\lambda-1)y+4y=(-\lambda^2+2\lambda+3)y\end{cases}$

$u(v)=\lambda v\Leftrightarrow \begin{cases}x=(\lambda-1)y\\-(\lambda+1)(\lambda-3)y=0\end{cases}$

1er cas.. $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,3\}$. $u(v)=\lambda v\Leftrightarrow x=y=0$; $\lambda\notin Spec(u)$

2ème cas.. $\lambda=-1$. $u(v)=\lambda v \Leftrightarrow x=-2y$; $\lambda\in Spec(u)$ et $F_\lambda=Ker(u-\lambda Id_E)=Vect(2e_1-e_2)$.

3ème cas.. $\lambda=3$. $u(v)=\lambda v\Leftrightarrow x=2y$; $\lambda\in Spec(u)$ et $F_\lambda=Vect(2e_1+e_2)$.

Finalement : $Spec(u)=\{-1,3\}$, $F_{-1}=Vect(2e_1-e_2)$ et $F_3=Vect(2e_1+e_2)$.

Notons que u est diagonalisable. $\mathcal{B}'=(2e_1-e_2, 2e_1+e_2)$ est une base de E et $M_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$

la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P=\begin{bmatrix}2&2\\-1&1\end{bmatrix}$; $P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac14&-\frac12\\\frac14&\frac12\end{bmatrix}$.

Q2.. Notons que si $f\in\mathcal{L}(E)$, $u\circ f\in\mathcal{L}(E)$ (composée de deux endomorphismes de E), par conséquent φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$. Notons que φ est linéaire.

$\forall(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f+g)=u\circ(\lambda f+g)\underset{\uparrow}{=}\lambda\, u\circ f+u\circ g=\lambda\varphi(f)+\varphi(g)$

linéarité de u

Par conséquent : $\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Posons $M_{\mathcal{B}}(f)=A=\begin{bmatrix}x&z\\y&t\end{bmatrix}$

$\varphi(f)=\lambda f\Leftrightarrow u\circ f=\lambda f\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}(u)A=\lambda A \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&z\\y&t\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x&z\\y&t\end{bmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases}x+4y=\lambda x\\x+y=\lambda y\\z+4t=\lambda z\\z+t=\lambda t\end{cases}$

Nous pourrions résoudre le système, trop banal (et occultant le fond du débat) ... de plus nous l'avons déjà fait dans Q1. Justement...!

Posons $R=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ et $S=\begin{bmatrix}z\\t\end{bmatrix}$

$\varphi(f)=\lambda f \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}[R,S]=\lambda[R,S]\Leftrightarrow \begin{cases}M_{\mathcal{B}}(u)R=\lambda R\\M_{\mathcal{B}}(u)S=\lambda S\end{cases}\Leftrightarrow$ R et S sont dans $\hat{F}_\lambda=\{X\in M_{2,1}(\mathbb{R}) \mid M_{\mathcal{B}}(u)X=\lambda X\}$

1er cas.. $\lambda\notin\{-1,3\}$. $\hat{F}_\lambda=\{0\}$; $\varphi(f)=\lambda f\Leftrightarrow f=0_{\mathcal{L}(E)}$; $\lambda\notin Spec\,\varphi$.

$2^{ème}$ Cas.. $\lambda = -1$.

$\varphi(f) = -f \Leftrightarrow R \in \hat{F}_{-1}$ et $S \in \hat{F}_{-1}$; donc $\underline{-1 \in \operatorname{Spec}\varphi}$

Précisons. $\hat{F}_{-1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

Donc $\varphi(f) = -f \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ R = \alpha\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $S = \beta\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \Pi_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}$

$\operatorname{Ker}(\varphi + \operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \Pi_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}\}$

$\underline{\operatorname{Ker}(\varphi + \operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \Pi_{\mathcal{B}}(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\}}$

$3^{ème}$ Cas. $\lambda = 3$.

$\varphi(f) = 3f \Leftrightarrow R$ et S sont dans $\hat{F}_3 = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ R = \alpha\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $S = \beta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\varphi(f) = 3f \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \Pi_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Pi_{\mathcal{B}}(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

donc $\underline{3 \in \operatorname{Spec}\varphi \text{ et } \operatorname{Ker}(\varphi - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \Pi_{\mathcal{B}}(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\}}$.

Finalement :
- $\operatorname{Spec}\varphi = \{-1, 3\} = \operatorname{Spec} u$
- $\operatorname{Ker}(\varphi + \operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \Pi_{\mathcal{B}}(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\}$ et
- $\operatorname{Ker}(\varphi - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \Pi_{\mathcal{B}}(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\}$

__Remarques__ 1.. $\operatorname{Ker}(\varphi + \operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)})$ est isomorphe à $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$ qui est un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2 ; donc $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi + \operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = 2$

De même : $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = 2$.

On a alors : $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi + \operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)})) + \dim(\operatorname{Ker}(\varphi - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathcal{L}(E)$; φ est diagonalisable.

2.. Tout cela n'est pas nouveau. Retrouvons les résultats précédents à travers une démonstration généralisée.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$: $F_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda\operatorname{Id}_E)$.

$\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow u \circ f = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in E,\ u(f(x)) = \lambda f(x) \Leftrightarrow \forall \omega \in \operatorname{Im} f,\ u(\omega) = \lambda\omega \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset F_\lambda$

ou $F_\lambda = \{0_E\}$ et : $\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \varphi(f) = \lambda f\} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$

ou $F_\lambda \neq \{0_E\}$ et : $\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \varphi(f) = \lambda f\} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Par conséquent : $\operatorname{Spec}\varphi = \operatorname{Spec} u = \{-1, 3\}$.

De plus : $\operatorname{Ker}(\varphi + \operatorname{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(2e_1 - e_2)\}$ | ce qui confirme les résultats précédents

Exercice 31 $n \in \mathbb{N}^*$. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Q1.. Montrer que si λ est un réel :

$$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda \notin [\![0, n-1]\!] \text{ et } \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1} + \dots + \frac{1}{\lambda - (n-1)} = 1.$$

Q2.. Trouver le nombre d'éléments de $Sp_{\mathbb{R}}(A)$.

Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $A = \begin{pmatrix} 1 & & (1) \\ & 2 & \\ (1) & & \ddots \; n \end{pmatrix}$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_n = \lambda x_2 \\ \dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + n x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \; x_1 + x_2 + \dots + x_n = (\lambda - k + 1) x_k$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \text{et} \\ \lambda x_1 = (\lambda + 1) x_2 = \dots = (\lambda - n + 1) x_n \end{cases}$$

1er Cas.. $\lambda \in [\![0, n-1]\!]$. $\exists i \in [\![0, n-1]\!], \; \lambda = i$; $\lambda - k + 1 = \begin{cases} i - k + 1 \neq 0 \text{ si } k \neq i+1 \\ i - k + 1 = 0 \text{ si } k = i+1 \end{cases}$

Alors $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \text{et} \\ \lambda x_1 = \dots = (\lambda - i) x_i = 0 = (\lambda - i - 2) x_{i+2} = \dots = (\lambda - n + 1) x_n \end{cases}$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \text{et} \\ \forall k \in [\![1, n]\!] - \{i+1\}, \; x_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{i+1} = \lambda x_1 \\ \text{et} \\ \forall k \in [\![1, n]\!] - \{i+1\}, \; x_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

→ dans si $i \neq 0$ car $x_1 = 0$
→ dans si $i = 0$ car $\lambda = 0$.

Ainsi si $\lambda \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda \notin Sp(A)$.

2ème Cas $\lambda \notin [\![0, n-1]\!]$. $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \forall k \in [\![2, n]\!], \; x_k = \frac{\lambda}{\lambda - k + 1} x_1 \end{cases}$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 = \lambda x_1 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x_1 \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 \right] = 0 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 \end{cases}.$$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 \right] = 0 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 \end{cases} \quad \text{car } \lambda\neq 0$$

α) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 \neq 0$. $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\lambda\notin Sp(A)$

β) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 = 0$. $AX=\lambda X \Leftrightarrow \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1$.

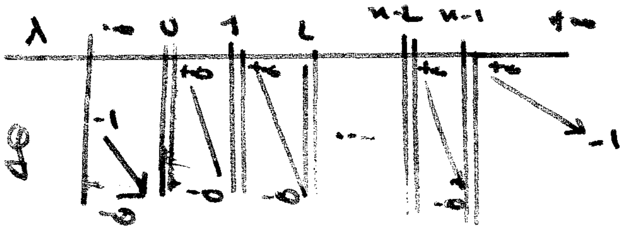
Alors $\lambda\in Sp(A)$ et $SEP(A,\lambda) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 1/(\lambda-1) \\ \vdots \\ 1/(\lambda-n+1) \end{pmatrix}\right)$.

Finalement : $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda\notin [\![0,n-1]\!]$ et $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda-1}+\dots+\dfrac{1}{\lambda-n+1} = 1$.

Q2 Montrons que $\operatorname{card} Sp(A) = n$.

V1. A est symétrique réelle donc diagonalisable. Q1 a montré que les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles. Alors A possède n valeurs propres distinctes.

V2 Posons $g : \lambda \mapsto \dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda-1}+\dots+\dfrac{1}{\lambda-n+1} - 1$. g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{0,1,\dots,n-1\}$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}-\{0,1,\dots,n-1\}$, $g'(\lambda) = -\dfrac{1}{\lambda^2} - \dots - \dfrac{1}{(\lambda-n+1)^2} < 0$.



En appliquant le théorème de la bijection sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$, …, $]n-2,n-1[$, $]n-1,+\infty[$ on montre que g a exactement n zéros (g ne s'annule pas sur $]-\infty,0[$ …). Ainsi on retrouve $\operatorname{card} Sp(A) = n$.

Exercice 33 **Racines $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q1. Donner les valeurs propres et les sous espaces de A.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^n = A$.

a) Soit B un élément de $\mathcal{R}$. Montrer que B commute avec A.

En déduire que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de B et que B est triangulaire inférieure.

Montrer l'existence de trois réels a, b et f tels que : $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

b) Déterminer $\mathcal{R}$.

Q1 A est triangulaire inférieure donc les valeurs propres de A sont les éléments de sa diagonale. $Sp(A) = \{1, -1\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x + y = y \\ -z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. $SEP(A, 1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ x + y = -y \\ -z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. $SEP(A, -1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$Sp(A) = \{1, -1\}$. $SEP(A, 1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. $SEP(A, -1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Remarque.. A n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres n'est pas 3.

Q2 a) $BA = BB^n = B^{n+1} = B^n B = AB$. $\underline{B \text{ commute avec } A}$.

Soit X un vecteur propre de A. $X \neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $\exists \lambda \in \{-1, 1\}$, $AX = \lambda X$.

$BAX = \lambda BX$ (multiplication par B de $AX = \lambda X$).

Alors $ABX = BAX = \lambda BX$; $BX \in SEP(A, \lambda)$.

Or $X \neq 0$, $X \in SEP(A, \lambda)$ et dim $SEP(A, \lambda) = 1$ donc $SEP(A, \lambda) = Vect(X)$.

Alors $BX \in Vect(X)$; $\exists \delta_\lambda \in \mathbb{R}$, $BX = \delta_\lambda X$. Comme $X \neq 0$, X est un vecteur propre de B.

Les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de B.

Soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AE_2 = E_2$; $AE_3 = -E_3$; $E_2 \neq 0$ et $E_3 \neq 0$.

E_2 et E_3 sont donc deux vecteurs propres de A donc de B.

$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $BE_2 = \alpha E_2$ et $BE_3 = \beta E_3$.

Or BE_2 (resp. BE_3) est la deuxième colonne (resp. troisième colonne) de B.

Ainsi $\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix}$. B est triangulaire inférieure.

$AB = BA$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a+b & \alpha & 0 \\ -c & 0 & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b+\alpha & \alpha & 0 \\ c & 0 & -\beta \end{pmatrix}$.

Ainsi $\alpha = a$ et $-c = c$. Donc $\alpha = a$ et $c = 0$.

$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$. Posons $f = \beta$. Alors $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

b) Ce qui précède montre que : $R \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} ; (a,b,f) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Soit $(a,b,f) \in \mathbb{R}^3$. Posons $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

$B^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \end{pmatrix}$.

$B^3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2b & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & f^3 \end{pmatrix}$.

Une récurrence simple montre que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k & 0 \\ 0 & 0 & f^k \end{pmatrix}$

Alors : $B \in R \Leftrightarrow B^n = A \Leftrightarrow \begin{cases} a^n = 1 \\ na^{n-1}b = 1 \\ f^n = -1 \end{cases}$

1er cas.. n est pair. $R = \emptyset$!

2e cas.. n est impair. $B \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ f = -1 \\ b = 1/n \end{cases}$. $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$