Exercice 1 $n \in [\![2, +\infty[\![$ et J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Diagonaliser J.

α et β sont deux réels. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diagonaliser A.

(*) Observons que $J^2 = nJ$. $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de J dont les zéros sont 0 et n. Alors $\mathrm{Sp}\, J \subset \{0, n\}$.

Notons que $\mathrm{rg}\, J = 1 < n$. Alors J n'est pas inversible donc <u>0 est valeur propre de J.</u>

De plus $\dim \mathrm{SEP}(J, 0) = n - \mathrm{rg}\, J = n - 1$. <u>$\dim \mathrm{SEP}(J,0) = n-1$.</u>

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$JX = 0 \iff x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \iff x_n = -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$.

$\mathrm{SEP}(J,0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} \end{pmatrix} ; (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}$

Notons $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\mathrm{SEP}(J,0) = \{ x_1(E_1 - E_n) + x_2(E_2 - E_n) + \cdots + x_{n-1}(E_{n-1} - E_n) ; (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \}$

$\mathrm{SEP}(J,0) = \mathrm{Vect}(E_1 - E_n, E_2 - E_n, \dots, E_{n-1} - E_n)$.

$\mathcal{B}_1 = (E_1 - E_n, E_2 - E_n, \dots, E_{n-1} - E_n)$ est une famille génératrice de cardinal $n-1$ de $\mathrm{SEP}(J,0)$ qui est de dimension $n-1$.

<u>$\mathcal{B}_1 = (E_1 - E_n, E_2 - E_n, \dots, E_{n-1} - E_n)$ est une base de $\mathrm{SEP}(J,0)$.</u>

Regardons si n est valeur propre de J.

$JX = nX \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n x_1 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n x_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n x_1 \\ n x_1 = n x_2 \\ n x_1 = n x_3 \\ \cdots \\ n x_1 = n x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_n \\ \text{et} \\ \underbrace{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}_{n x_1} = n x_1 \end{cases}$

$JX = nX \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Donc <u>$n \in \mathrm{Sp}\, J$ et $\mathrm{SEP}(J, n) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(E_1 + E_2 + \cdots + E_n)$.</u>

$B_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(J, n)$.

$Sp(J) = \{0, n\}$ et $\dim SEP(J,0) + \dim SEP(J,n) = n-1+1 = n$.

Ainsi J est diagonalisable (ce qui n'est pas une surprise car J est symétrique et à coefficients réels).

- $SEP(J,0) \oplus SEP(J,n) = M_{n,1}(\mathbb{R})$
- $B_1 = (E_1 - E_n, \dots, E_{n-1} - E_n)$ est une base de $SEP(J,0)$.
- $B_2 = (E_1 + E_2 + \dots + E_n)$ est une base de $SEP(J,n)$.

Alors $B =$ "$B_1 \cup B_2$" est une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J respectivement associés aux valeurs propres $0, 0, \dots, 0, n$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base B.

1° $P = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix}1\\\vdots\\1\end{matrix} \\ \hline -1 \;\cdots\; -1 & 1 \end{array}\right)$ 2° P est inversible comme matrice de passage.

3° $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(0, 0, \dots, 0, n)$.

(*) $A = (\alpha - \beta) I_n + \beta J$. donc $P^{-1}AP = (\alpha-\beta) P^{-1} I_n P + \beta P^{-1} J P$.

$P^{-1}AP = (\alpha-\beta) I_n + \beta\, \mathrm{Diag}(0, 0, \dots, 0, n) = (\alpha - \beta)\, \mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1) + \beta\, \mathrm{Diag}(0, 0, \dots, 0, n)$.

donc $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\alpha-\beta, \alpha-\beta, \dots, \alpha-\beta, \alpha-\beta+n\beta)$.

Ainsi A est diagonalisable

Notons que $Sp A = \{\alpha-\beta, \alpha-\beta+n\beta\}$ et que B est aussi une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\alpha-\beta, \alpha-\beta, \dots, \alpha-\beta, \alpha-\beta+n\beta$.

Remarque.. A est inversible si et seulement si $\alpha - \beta \neq 0$ et $\alpha - \beta + n\beta \neq 0$.

Exercice 2 Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

A est-elle diagonalisable ?

Q2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Calculer B^n et A^n pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\0&-\lambda&-1\\0&1&2-\lambda\end{pmatrix}$

$L_2 \leftrightarrow L_3$ puis $L_3 \leftarrow L_3+\lambda L_2$ donne $\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1&2-\lambda\\0&-\lambda&-1\end{pmatrix}$ & : $\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1&2-\lambda\\0&0&-(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$ qui est une réduite de Gauss de $A-\lambda I_3$ que nous notons R_λ.

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow A-\lambda I_3$ non inversible $\Leftrightarrow R_\lambda$ non inversible $\Leftrightarrow 1-\lambda = 0$ ou $-(\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

$Sp(A) = \{1\}$. Comme A n'est pas $1 \times I_3$, A n'est pas diagonalisable.

Confirmons. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -y-z = 0 \\ y+z = 0\end{cases} \Leftrightarrow z = -y$.

$SEP(A,1)$ est le plan vectoriel d'équation $z=-y$.

$SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$. $Sp(A)=\{1\}$ et $\dim SEP(A,1) = 2$; A n'est pas diagonalisable !

Q2 Posons $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Pour montrer que A et B sont semblables il suffit de trouver une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

Analyse : Supposons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ solution. $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = e'_2$ et $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$.

Ainsi $e'_1 \in Ker(f - Id_E)$, $e'_2 \in Ker(f-Id_E)$ et $(f - Id_E)(e'_3) = e'_2$.

Donc $e'_1 \in Ker(f-Id_E)$, $e'_2 \in Ker(f-Id_E) \cap Im(f-Id_E)$ et $(f-Id_E)(e'_3) = e'_2$.

Synthèse : $Sp(f) = Sp(A) = \{1\}$. $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$; ainsi

$SEP(f,1) = Ker(f - Id_E) = Vect(e_1, e_2 - e_3)$.

Cherchons $Im(f-Id_E)$. $M_{\mathcal{B}}(f - Id_E) = A - I_3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

$Im(f-Id_E) = Vect((f-Id_E)(e_1), (f-Id_E)(e_2), (f-Id_E)(e_3)) = Vect(0_E, -e_2+e_3, -e_2+e_3)$.

$Im(f-Id_E) = Vect(e_2 - e_3) \subset Ker(f - Id_E)$. Ainsi $Im(f-Id_E) \cap Ker(f-Id_E) = Vect(e_2-e_3)$.

D'où nous posons $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_2 - e_3$ et cherchons e'_3 tel que : $(f - Id)(e'_3) = e'_2$.

Posons $e'_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ avec $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$(f - 3\,\mathrm{id}_E)(e'_3) = e'_2 \Leftrightarrow (A - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow y + z = -1$

Posons alors $x = 0$, $y = 0$, $z = -1$.

Alors $e'_3 = -e_3$ et $(f - 3\,\mathrm{id}_E)(e'_3) = e'_2$.

Soit P la matrice de la famille (e'_1, e'_2, e'_3) dans $\mathcal{B}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

P est triangulaire inférieure sans zéro sur la diagonale. P est donc inversible ce qui prouve que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

De plus $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$ car $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = e'_2$ et $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$.

A et B sont donc semblables.

P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donc $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$ d'où : $B = P^{-1}AP$

$B = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ un calcul très simple donne $P^{-1} = P$!!

Posons $C = B - I$. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $C^k = 0$

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $B^n = (C + I_3)^n \underset{\substack{\uparrow \\ CI_3 = I_3C}}{=} \sum_{k=0}^{n} C_n^k C^k I_3^{n-k} = C_n^0 C^0 I_3^n + C_n^1 C I_3^{n-1} = I + nC$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ceci vaut encore pour $n = 0$ et 1.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$0 \notin Sp(B)$ donc B est inversible. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrons que $B^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il suffit de montrer que $B^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ car $B^{-n} = (B^n)^{-1}$.

$B^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. $B^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{Z}$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} = PB^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-n & -n \\ 0 & n & n+1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 **Réduction d'un endomorphisme**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Q2. Construire (en justifiant) une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)$.

Soit $u = xe_1+ye_2+ze_3+te_4$ un élément de E. Posons $X = M_{\mathcal{B}}(u)$. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow (f-\lambda Id_E)(u) = 0 \Leftrightarrow (A-\lambda I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-\lambda)x = 0 \\ (5-\lambda)y + 4z - 2t = 0 \\ 4y + (5-\lambda)z + 2t = 0 \\ -2y + 2z + (8-\lambda)t = 0 \end{cases}$

<u>1er cas : $\lambda = 9$</u>

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} -4y + 4z - 2t = 0 \\ 4y - 4z + 2t = 0 \\ -2y + 2z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2y - 2z + t = 0$

Si $\lambda = 9$: $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)$ est l'hyperplan de E d'équation $2y - 2z + t = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Ainsi <u>$9 \in Sp\, f$ et $\dim SEP(f, 9) = 3$.</u>

$SEP(f,9) = \{xe_1+ye_2+ze_3+te_4 \in E \mid t = -2y+2z\} = \{xe_1+ye_2+ze_3+(-2y+2z)e_4 \,;\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$SEP(f,9) = \{xe_1 + y(e_2-2e_4) + z(e_3+2e_4) \,;\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2-2e_4, e_3+2e_4)$.

$\mathcal{B}_9 = (e_1, e_2-2e_4, e_3+2e_4)$ est une famille génératrice de cardinal 3 de $SEP(f,9)$ qui est de dimension 3. <u>$\mathcal{B}_9 = (e_1, e_2-2e_4, e_3+2e_4)$ est une base de $SEP(f,9)$.</u>

<u>2ème cas : $\lambda \neq 9$</u>

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (5-\lambda)y + 4z - 2t = 0 \\ 4y + (5-\lambda)z + 2t = 0 \\ -2y + 2z + (8-\lambda)t = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ (5-\lambda)y + 4z - 2t = 0 \\ (9-\lambda)(y+z) = 0 \\ -2y + 2z + (8-\lambda)t = 0 \end{cases}$

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \underset{\lambda \neq 9}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ 0 = (5-\lambda)y - 4y - 2t = (1-\lambda)y - 2t \\ 0 = -2y - 2y + (8-\lambda)t = -4y + (8-\lambda)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = \frac{1-\lambda}{2} y \\ 0 = -4y + (8-\lambda)\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) y = \frac{\lambda(\lambda-9)}{2} y \end{cases}$

$u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \underset{\lambda \neq 9}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = \frac{1-\lambda}{2} y \\ \lambda y = 0 \end{cases}$

a) $\lambda \neq 0$. $u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 0_E$

λ n'est pas valeur propre de f.

b) $\lambda = 0$ $u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = y/2 \end{cases}$

donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(f - 15\,\mathrm{Id}_E) = \{y e_2 - y e_3 + \frac{y}{2} e_4 \,;\, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3 + \frac{1}{2} e_4) =$
$\mathrm{Vect}(2e_2 - 2e_3 + e_4)$.

Alors comme $2e_2 - 2e_3 + e_4 \neq 0_E$! 0 est valeur propre de f et

$\mathcal{B}_2 = (2e_2 - 2e_3 + e_4)$ est une base de $SEP(f, 0)$.

Finalement $Sp\, f = \{0, 9\}$. $SEP(f, 0)$ est la droite vectorielle engendrée par $2e_2 - e_3 + e_4$ et $SEP(f, 3)$ est l'hyperplan de E admettant pour base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4)$.

(Q2) $Sp\, f = \{0, 9\}$ et $\dim SEP(f, 0) + \dim SEP(f, 9) = 1 + 3 = 4 = \dim E$ donc

f est diagonalisable.

$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4)$ est une base de $SEP(f, 9)$, $\mathcal{B}_2 = (2e_2 - 2e_3 + e_4)$ est une base de $SEP(f, 0)$ et $E = SEP(f, 9) \oplus SEP(f, 0)$.

Alors $\mathcal{B}' = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4, 2e_2 - 2e_3 + e_4)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 9, 9, 9 et 0.

Remarques.. 1.. $M_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Diag}(9, 9, 9, 0)$

2.. $\mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.. L'inverse de $P = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est : $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4.. $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P = P^{-1}AP$.

Exercice 4 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q3. Calculer A^n pour n dans $\mathbb{N}^*$.

Q1 Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - y + z - t = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z + t = 0 \\ -x + y - (1+\lambda)z + t = 0 \\ -x + y - 3z + (3-\lambda)t = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1-\lambda)x - y + z - t = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z + t = 0 \\ -\lambda(x+z) = 0 \\ -x + y - 3z + (3-\lambda)t = 0 \end{cases}$$

1er cas.. $\lambda = 0$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x + y - 3z + 3t = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2(x+z) = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x + y - 3z + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ 0 = -x + y + 3x - 3y \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \\ t = -x \end{cases}$$. $0 \in Sp(A)$ et $SEP(A,0) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

2ème cas.. $\lambda \neq 0$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ -\lambda x - y - t = 0 \\ t = (\lambda - 1)y \\ 0 = -x + y + 3x + (3-\lambda)(\lambda-1)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = (\lambda-1)y \\ 0 = -\lambda x - y - (\lambda-1)y = -\lambda(x+y) \\ 0 = 2x + (-\lambda^2 + 4\lambda - 3)y \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = (\lambda-1)y \\ y = -x \\ 0 = x[2 + \lambda^2 - 4\lambda + 2] = (\lambda-2)^2 x \end{cases}$$

a) $\lambda = 2$ $\quad AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \\ t = y = -x \end{cases}$. $2 \in Sp(A)$ et $SEP(A,2) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

b) $\lambda \neq 2$ $\quad AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$; $\lambda \notin Sp(A)$.

Finalement $Sp(A) = \{0, 2\}$, $SEP(A,0) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $SEP(A,2) = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi A n'est pas diagonalisable car $\dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,2) = 2 < 4$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $E = \mathbb{R}^4$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

Pour prouver que A est semblable à la matrice B il suffit de trouver une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de E telle que : $M_{\mathcal{B}'}(f) = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (1)

Notons que
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(e'_1) = 0_E & (e'_1 \in Ker f) \\ f(e'_2) = e'_1 \\ f(e'_3) = 2e'_3 & (e'_3 \in Ker(f - 2Id_E)) \\ f(e'_4) = e'_3 + 2e'_4 \end{cases}$$

Notons encore que $Sp(f) = \{0, 2\}$, $SEP(f,0) = Vect(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$ et $SEP(f,2) = Vect(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$

Dès lors posons $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ et $e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

Cherchons alors e'_2 et e'_4 dans E tels que $f(e'_2) = e'_1$ et $f(e'_4) = e'_3 + 2e'_4$.

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in E$.

$$f(u) = e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x + y + z + t = 1 \\ -x + y - z + t = -1 \\ -x + y - 3z + 3t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ -2z + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = t \\ z = 1 - x \\ -y - t = 1 - x - z = 0 \end{cases}$$

$L_3 = -L_1$
$L_2 \leftarrow L_1 + L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

$$f(u) = e'_1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ t = 1 - x \\ y = x - 1 \end{cases}$$

En posant $x = 1$, $y = z = t = 0$ on a $u = e_1$ et $f(e_1) = e'_1$.

Dès lors posons $e'_2 = e_1$; $f(e'_2) = e'_1$.

Reprenons $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$.

$$f(u) = e'_3 + 2u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = -1 + 2x \\ x + y + z + t = 1 + 2y \\ -x + y - z + t = 1 + 2z \\ -x + y - 3z + 3t = 1 + 2t \end{cases}$$

$f(u) = e'_3 + 2u \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y+z-t = -1 \\ x-y+z+t = 1 \\ -x+y-3z+t = 1 \\ -x+y-3z+t = 1 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 = L_4}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x-y+z-t=-1 \\ -2y+2z = 0 \\ -x+y-3z+t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x+t = 1 \\ -x-2y+t = 1 \end{cases}$

$f(u) = e'_3 + 2u \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ t = 1-x \\ -x-2y+1-x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ t = 1-x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \\ t = 1-x \end{cases}$

Posons $x = 0, y = 0, z = 0$ et $t = 1$. Alors $u = e_4$ et $f(u) = f(e_4) = e'_3 + 2e_4$.

Posons alors $e'_4 = e_4$. $f(e'_4) = e'_3 + 2e'_4$.

Ainsi si $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$, $e'_2 = e_1$, $e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ et $e'_4 = e_4$.

alors $f(e'_1) = 0_E$, $f(e'_2) = e'_1$, $f(e'_3) = 2e'_3$ et $f(e'_4) = e'_3 + 2e'_4$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base de E.

Comme $\dim E = 4$ il suffit de prouver que (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 + \delta e'_4 = 0_E$.

$\alpha(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) + \beta(e_1) + \gamma(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + \delta e_4 = 0_E$.

$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma + \delta = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \alpha = \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} ; \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$

Ainsi B' est une base de E et $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$.

Alors $B = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de B à B'. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc A est semblable à B.

(Q2) $B = \begin{pmatrix} U & O_2 \\ O_2 & V \end{pmatrix}$ avec $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Un produit élémentaire par blocs donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} U^n & O_2 \\ O_2 & V^n \end{pmatrix}$.

$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \ldots$ $\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$, $U^n = 0$

$V = 2I_2 + U$. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $V^n \underset{\substack{\uparrow \\ I_2U = UI_2 = U}}{=} \sum_{k=0}^{n} C_n^k U^k (2I_2)^{n-k} = 2^n I_2 + 2^{n-1} n U = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$, $B^n = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & V^n \end{pmatrix}$ avec $V^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Un calcul simple donne $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Alors $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Alors $\forall n \in \underline{\underline{[\![2,+\infty[\![}}$, $A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & n-1 & -n \\ 0 & 1 & -(n-1) & n \\ 0 & 1 & -(n-1) & n \\ 0 & 1 & -(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Q1. A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que ces deux matrices sont semblables si et seulement si elles "représentent" le même endomorphisme (le plus gros travail consiste à écrire correctement cela).

Q2. $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'elles sont semblables.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $E = \mathbb{R}^3$ et f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

a) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A (en profiter pour relire les exercices 4 et 6 du Td cours réduction).

b) On suppose que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E telle que B soit la matrice de f dans cette base.

Montrer que $e'_1 \in \ker(f - 4Id_E) \cap \mathrm{Im}(f - 4Id_E)$ et que $e'_3 \in \ker(f - 2Id_E)$.

c) Choisir un élément e'_1 non nul de $\ker(f-4Id_E)\cap\mathrm{Im}(f-4Id_E)$ et un élément non nul e'_3 de $\ker(f-2Id_E)$. Construire un vecteur non nul e'_2 de E tel que $f(e'_2) = 3e'_1 + 4e'_2$ (on pourra résoudre un système). Conclure !

Q1 C.N. Supposons A et B semblables. $\exists P \in GL_n(K)$, $B = P^{-1}AP$.

Posons $E = K^n$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est A.

$P = (p_{ij})$. Posons $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$.

Alors P est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$.

P est encore la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme g qui transforme la base $\mathcal{B}$ en la famille $\mathcal{B}'$.

$P = M_{\mathcal{B}}(g)$ est inversible donc g est bijective et ainsi $\mathcal{B}'$ qui est l'image par g de la base $\mathcal{B}$ est une base de E.

P est alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et alors : $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$

$M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP = B$. $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

Ainsi <u>A et B sont les matrices d'un même endomorphisme.</u>

C.S. Réciproquement supposons que A et B soient les matrices d'un même endomorphisme.

Ainsi il existe un espace vectoriel E de dimension n sur K, deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et un endomorphisme f de E tels que : $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = M_{\mathcal{B}'}(f)$.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$ et ainsi $B = P^{-1}AP$. <u>A et B sont semblables.</u>

<u>A et B sont semblables si ce sont les matrices d'un même endomorphisme.</u>

Q2 a) Soit λ un réel et soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}8x-y-5z=\lambda x\\-2x+3y+z=\lambda y\\4x-y-z=\lambda z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(8-\lambda)x-y-5z=0\\-2x+(3-\lambda)y+z=0\\4x-y-(\lambda+1)z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4-\lambda)x+(\lambda-4)z=0 & (1)-(3)\\-2x+(3-\lambda)y+z=0\\4x-y-(\lambda+1)z=0\end{cases}$$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}(\lambda-4)(z-x)=0\\-2x+(3-\lambda)y+z=0\\4x-y-(\lambda+1)z=0\end{cases}$$

1er cas : $\lambda=4$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}-2x-y+z=0\\4x-y-5z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6x+6z=0 & (1)-(2)\\4x-y-5z=0\end{cases}$$

$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\-x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow x=z=-y$. 4 est valeur propre de A et $SEP(A,4)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

2ème cas : $\lambda\neq 4$. $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\0=-2x+(3-\lambda)y+x=-x+(3-\lambda)y\\0=4x-y-(\lambda+1)x=(3-\lambda)x-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\x=(3-\lambda)y\\0=y[(3-\lambda)^2-1]\end{cases}$

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\x=(3-\lambda)y\\0=(4-\lambda)(2-\lambda)y\end{cases} \underset{\lambda\neq 4}{\Leftrightarrow} \begin{cases}z=x\\x=(3-\lambda)y\\0=(2-\lambda)y\end{cases}$$

a) $\lambda=2$ $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\x=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\y=x\end{cases}$ 2 est valeur propre de A et $SEP(A,2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

b) $\lambda\neq 2$ $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\x=(3-\lambda)y\\y=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$. λ n'est pas valeur propre de A.

Finalement : $Sp(A)=\{2,4\}$. $SEP(A,2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A,4)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

b) $M_{B'}(f)=\begin{pmatrix}4&3&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, ainsi $f(e'_1)=4e'_1$; $f(e'_2)=3e'_1+4e'_2$ et $f(e'_3)=2e'_3$.

Alors $e'_1\in \mathrm{Ker}(f-4Id_E)$, $e'_1=\frac{1}{3}(f-4Id_E)(e'_2)=(f-4Id_E)(\frac{1}{3}e'_2)\in \mathrm{Im}(f-4Id_E)$

donc $e'_1\in\mathrm{Ker}(f-4Id_E)\cap\mathrm{Im}(f-4Id_E)$. $f(e'_3)=2e'_3$; $e'_3\in\mathrm{Ker}(f-2Id_E)$.

c) $Sp(f)=Sp(A)=\{2,4\}$. $SEP(f,2)=\mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)$ et $SEP(f,4)=\mathrm{Vect}(e_1-e_2+e_3)$.

$M_B(f-4Id_E)=\begin{pmatrix}4&-1&-5\\-2&-1&1\\4&-1&-5\end{pmatrix}$. $\mathrm{Im}(f-4Id_E)=\mathrm{Vect}(4e_1-2e_2+4e_3, -e_1-e_2-e_3, -5e_1+e_2-5e_3)$

$\mathrm{Im}(f-4Id_E)=\mathrm{Vect}(4e_1-2e_2+4e_3, e_1+e_2+e_3)$ car

$-5e_1+e_2-5e_3 = (-e_1-e_2-e_3)-(4e_1-2e_2+4e_3)$.

$\mathrm{Im}(f-4Id_E) = \mathrm{Vect}(2e_1-e_2+2e_3, e_1+e_2+e_3) \underset{(1)\leftarrow(1)-2(2)}{=} \mathrm{Vect}(-3e_2, e_1+e_2+e_3) = \mathrm{Vect}(e_2, e_1+e_2+e_3)$.

$\mathrm{Im}(f-4Id_E) = \mathrm{Vect}(e_2, e_1+e_3)$.

Alors $\mathrm{Ker}(f-4Id_E) = SEP(f,4) = \mathrm{Vect}(e_1-e_2+e_3) \subset \mathrm{Im}(f-4Id_E)$.

Posons $e'_1 = e_1-e_2+e_3$; $e'_1 \in \mathrm{Ker}(f-4Id_E) \cap (\mathrm{Im}(f-4Id_E))$. $f(e'_1)=4e'_1$.

Posons $e'_3 = e_1+e_2+e_3$; $e'_3 \in \mathrm{Ker}(f-2Id_E)$; $f(e'_3)=2e'_3$.

Cherchons $e'_2 = xe_1+ye_2+ze_3 \in E$ tel que : $f(e'_2)=3e'_1+4e'_2$ ou tel que :

$(f-4Id_E)(e'_2) = 3e'_1$.

$(f-4Id_E)(e'_2)=3e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 4x-y-5z=3 \\ -2x-y+z=-3 \\ 4x-y-5z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y-5z=3 \\ 6x-6z=6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x-1 \\ y = 4x-5z-3 = 4x-5x+5-3 = -x+2 \end{cases}$

On peut prendre $x=1$, $y=1$ et $z=0$. Posons alors $e'_2 = e_1+e_2$.

Alors $f(e'_2) = 3e'_1+4e'_2$.

Prouvons alors que $B'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de E.

$\mathrm{Vect}(e'_1,e'_2,e'_3) = \mathrm{Vect}(e_1-e_2+e_3, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3) = \mathrm{Vect}(e_1-e_2+e_3, e_1+e_2, e_3)$.

$= \mathrm{Vect}(e_1-e_2, e_1+e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(2e_1, e_1+e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1+e_2, e_3)$

$= \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3) = E$.

$B'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une famille génératrice de trois éléments de E qui est de dimension 3, c'est donc une base de E.

$M_B(f)=A$ et $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$. D'après Q1, A et B sont semblables.

Mieux posons $P = \mathrm{Pas}(B,B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $B = P^{-1}AP$.

Remarque : $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice de contrôle.. Calculer B^n et en déduire A^n.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^2 & 2\times3\times4 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^2 & 2\times3\times4 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^3 & 2\times3\times4^2+3\times4^2 & 0 \\ 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^3 & 3\times3\times4^2 & 0 \\ 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

Montrons alors par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ B^n = \begin{pmatrix} 4^n & n\times3\times4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

→ C'est vrai pour $n \in \{0,1,2,3\}$!

→ Supposons l'égalité vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & n\times3\times4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^{n+1} & n\times3\times4^n+3\times4^n & 0 \\ 0 & 4^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^{n+1} & (n+1)\times3\times4^n & 0 \\ 0 & 4^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

ceci achève la récurrence.

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 3n4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$B = P^{-1}AP$; $A = PBP^{-1}$; $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 3n4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n & 3n4^{n-1}+4^n & 2^n \\ -4^n & -3n4^{n-1}+4^n & 2^n \\ 4^n & 3n4^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(3+\frac{3n}{2}\right)4^n-2^n & -4^n+2^n & -\left(\frac{3n}{2}+2\right)4^n+2^{n+1} \\ \left(1-\frac{3n}{2}\right)4^n-2^n & 4^n+2^n & -2\left(1-\frac{3n}{4}\right)4^n+2^{n+1} \\ \left(1+\frac{3n}{2}\right)4^n-2^n & -4^n+2^n & -\frac{3n}{2}4^n+2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui suit ne constitue pas des corrections mais des traces de traces de corrections

Exercice 6. Trouver a, b, c, a', b' et c' pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres (définir une stratégie simple et claire pour traiter le problème).

On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $U \neq 0$, $V \neq 0$ et $W \neq 0$.

* Supposons (a,b,c,a',b',c') solution. $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $AU = \alpha U$, $AV = \beta V$ et $AW = \gamma W$.

- $\begin{cases} 1+a+a' = \alpha \\ 1+b+b' = \alpha \\ 1+c+c' = \alpha \end{cases}$ donc $\underline{a+a' = b+b' = c+c'}$; ... $\begin{cases} 1-a' = \beta \\ 1-b' = 0 \\ 1-c' = -\beta \end{cases}$ donc $\underline{b' = 1}$ et $\underline{a'+c' = 2}$ L_1+L_3

... $\begin{cases} 1-a = \gamma \\ 1-b = -\gamma \\ 1-c = 0 \end{cases}$ donc $\underline{a+b = 2 \text{ et } c = 1}$.

$\begin{cases} b' = 1 ; c = 1 ; \\ c' = 2-a' ; \quad b = 2-a \\ a+a' = b+b' = 1+2-a \\ a+a' = c+c' = 1+2-a' \end{cases}$ $\begin{cases} 2a+a' = 3 \\ a+2a' = 3 \end{cases}$ $a = a' = 1$

Ainsi $a = b = c = a' = b' = c' = 1$;

$\underline{\underline{(a,b,c,a',b',c') = (1,1,1,1,1,1)}}$ ... il y a au plus une solution.

* Réciproquement pour $(a,b,c,a',b',c') = (1,1,1,1,1,1)$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $AU = 3U$, $AV = 0$, $AW = 0$.

$(1,1,1,1,1,1)$ est solution ...

CCL Il y a une solution et une seule : $(a,b,c,a',b',c') = (1,1,1,1,1,1)$.

Exercice 7

Q1. $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Donner une expression simple de $Q(D)$.

Q2. A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres distinctes de A et $Q = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$. Montrer que $Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Ainsi une matrice diagonalisable admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Q3. Enoncer un résultat analogue pour les endomorphismes.

(Q1) On pose $\varphi = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ alors $\varphi(A) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{r} a_k \alpha_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^{r} a_k \alpha_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\alpha_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varphi(\alpha_n) \end{pmatrix}$

| le produit de 2 matrices diagonales est une matrice diag.
| une CL de matrices diag. est une matrice diag.

(Q2) On pose encore $\varphi = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ car A est diagonalisable.

$A = PDP^{-1}$. $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{r} a_k P D^k P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{r} a_k D^k\right) P^{-1} = P\,\varphi(D)\,P^{-1}$.

$\varphi(D) = \begin{pmatrix} \varphi(d_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varphi(d_n)\end{pmatrix} = 0$ car $Sp(D) = Sp(A)$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!], d_i \in \{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\}$

donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(d_i)=0$ car $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ sont les zéros de φ

Si $\varphi(D)=0$; $\varphi(A)=0$.

Q3 $\dim E = n \geq 1$. $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est diagonalisable, f admet un polynôme annulateur scindé à racines ~~simples~~... mais seule la réciproque est jolie !

Exercice E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E. On suppose que f a n valeurs propres distinctes.

Q1. Que dire des sous-espaces propres de f ?

Q2. Montrer que si : $f \circ g = g \circ f$, les sous-espaces propres de f (resp. g) sont stables par g (resp. f).

Q3. Montrer que : $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g se diagonalisent dans la même base.

Q1.. Ce sont des droites vectorielles ($\dim E = n$ et f admet n valeurs propres distinctes).

Q2.. Soit $u \in SEP(f,\lambda)$. $f(u)=\lambda u$; $g(f(u)) = \lambda g(u)$; $f(g(u)) = \lambda g(u)$; $g(u) \in SEP(f,\lambda)$.

$SEP(f,\lambda)$ est stable par g. Ça suffit non ?

Q3 C.N. (H) $f\circ g = g \circ f$. f est diagonalisable car f possède n valeurs propres distinctes et $\dim E = n$. Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux vp $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$. $M_{\mathcal B}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ (0) & \lambda_n\end{pmatrix}$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $e_i \in SEP(f,\lambda_i)$, $e_i \neq 0$ et $\dim SEP(f,\lambda_i)=1$ alors $SEP(f,\lambda_i) = Vect(e_i)$.

D'après Q2 $g(e_i) \in SEP(f,\lambda_i) = Vect(e_i)$; $\exists \mu_i \in K$, $g(e_i) = \mu_i e_i$; $M_{\mathcal B}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & (0) \\ (0) & \mu_n\end{pmatrix}$ et FIN.

C.S. Il existe une base $\mathcal B$ de E telle que $M_{\mathcal B}(f)$ et $M_{\mathcal B}(g)$ soient diagonales.

$M_{\mathcal B}(f\circ g) = M_{\mathcal B}(f)M_{\mathcal B}(g) = M_{\mathcal B}(g)M_{\mathcal B}(f) = M_{\mathcal B}(g\circ f)$; $f\circ g = g\circ f$ et FIN.

deux matrices diagonales commutent.

Exercice $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. f est l'application qui à tout élément P de E associe le reste dans la division de AP par B.

Q0. Rappeler le théorème concernant la division euclidienne des polynômes.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E (à faire très proprement).

Q2. Trouver la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Q0 $A \in K[X]$, $B \in K[X]$ et $\underline{B \neq 0}$.

$\exists ! (Q,R) \in K[X]^2$, $A = QB+R$ et $\deg R < \deg B$.

Q1 • $\forall P \in E = \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg f(P) < \deg B = 4$. $\forall P \in E$, $f(P) \in E$.

• Linéarité. A savoir faire par ♡. $(P_1, P_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists!(Q_1, R_1) \in \mathbb{R}[X]^2$, $AP_1 = Q_1 B + R_1$ et $\deg R_1 < \deg B$. $R_1 = f(P_1)$.

$\exists!(Q_2, R_2) \in \mathbb{R}[X]^2$, $AP_2 = Q_2 B + R_2$ et $\deg R_2 < \deg B$. $R_2 = f(P_2)$.

$A(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda Q_1 + Q_2)B + \lambda R_1 + R_2$ avec $\lambda Q_1 + Q_2 \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda R_1 + R_2 \in \mathbb{R}[X]$

et $\deg(\lambda R_1 + R_2) < \deg B$ ($\deg R_1 < \deg B$ et $\deg R_2 < \deg B$)

Par UNICITÉ du reste et du quotient dans la division euclidienne de $A(\lambda P_1 + P_2)$ par B on peut dire que $\lambda R_1 + R_2$ (resp. $\lambda Q_1 + Q_2$) est le reste (resp. quotient) dans la division de $A(\lambda P_1 + P_2)$ par B. Alors $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

Q2 Sans difficulté : $M = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Sp(f) = Sp(M) = \{-1, 0\}$

$SEP(M,-1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $SEP(f,-1) = Vect(-X^3+1)$. $SEP(M,0) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; $SEP(f,0) = Vect(X^3+X^2+X)$.

Exercice 10 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. f et g sont les endomorphismes de E ayant respectivement pour matrices dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f et g.

Q2. Trouver une base de E par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.

Q1 $Sp(f) = \{1\}$ et $SEP(f,1) = Vect(e_1, e_2 - e_3)$; f n'est pas diagonalisable.

$Sp(g) = \{0, 2\}$, $SEP(g,0) = Vect(2e_1 + e_2 - e_3)$ et $SEP(g,2) = Vect(e_2 - e_3)$; g n'est pas diagonalisable.

Q2 Posons $e'_1 = 2e_1 + e_2 - e_3$ et $e'_2 = e_2 - e_3$. $g(e'_1) = 0_E$ et $g(e'_2) = 2e'_2$.

De plus $e'_1 \in SEP(f,1)$ et $e'_2 \in SEP(f,1)$. $f(e'_1) = e'_1$ et $f(e'_2) = e'_2$

Notons que (e'_1, e'_2) est libre. Ceci étant donnons n'importe quel vecteur e'_3 tel que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de E. Alors $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{a} \\ 0 & 2 & \hat{b} \\ 0 & 0 & \hat{c} \end{pmatrix}$

C'est fini non ?

$e'_3 = e_3$ convient ! On a alors $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1,5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P = P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.