Exercice 13 A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $A^p = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^p \end{pmatrix} = (P^{-1}AP)^p = P^{-1}A^pP = P^{-1}I_nP = I_n$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i^p = 1$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = \pm 1$; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i^2 = 1$. $D^2 = I_n$.

$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$.

Exercice 14 ♡ n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose

$$f(P) = (X^2-1)P' - nXP.$$

Q1. Prouver que f est un endomorphisme de E.

Q2. Soit λ un réel et P un élément non nul de E tels que : $f(P) = \lambda P$.

a) Soit α un zéro de P dans $\mathbb{C}$ d'ordre de multiplicité k. Montrer que nécessairement α vaut 1 ou -1.

b) En déduire que : $P = c(X-1)^p(X+1)^q$, avec c dans $\mathbb{R}^*$ et (p,q) dans $[\![0,n]\!]^2$.

Exprimer q et λ en fonction de p et de n.

c) Conclure cette première phase.

Q3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Q1 La linéarité est claire. Soit $P \in E$, montrons que $f(P) \in E$.

$\deg P \leq n$; $\deg((X^2-1)P' - nXP) \leq n+1$. Notons a_n le coeff. de X^n dans P (a_n n'est pas nécessairement différent de 0).

Le coefficient de X^{n+1} dans $f(P)$ est $na_n - na_n = 0$! Comme $\deg f(P) = \deg((X^2-1)P' - nXP) \leq n+1$ on a $\deg f(P) \leq n$! cqfd.

Q2 On part de $\underline{\lambda \in Sp(f)}$ et de P vecteur propre de f associé à λ.

a) et b) Supposons $\alpha \neq 1$ et -1. $(X^2-1)P' - nXP = \lambda P$; $(X^2-1)P' = (\lambda + nX)P$.

$(X-\alpha)^k$ divise $(\lambda+nX)P$ donc $(X^2-1)P'$ donc P' car $\alpha \neq \pm 1$.

Alors α est un zéro de P' d'ordre au moins k ce qui n'est possible que si $P' = 0$.

Mais $P' = 0$ donne $(\lambda+nX)P = 0$ donc $P = 0$ $(\lambda + nX \neq 0)$!!

1 et -1 sont les seuls zéros de P dans $\mathbb{C}$. Alors $\exists c \in \mathbb{R}^*$, $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $P = c(X-1)^p(X+1)^q$

$\deg P \leq n$ donc $p \in [\![0,n]\!]$ et $q \in [\![0,n]\!]$ (on a même $p+q \leq n$).

En écrivant $f(P) = \lambda P$ il vient : $\begin{cases} p+q = n \\ p-q = \lambda \end{cases}$ $\begin{cases} q = n-p \\ \lambda = 2p-n \end{cases}$ $\lambda = 2p-n$, $p \in [\![0,n]\!]$ et $P \in \mathrm{Vect}((X-1)^p(X+1)^{n-p})$.

c) Il est fondamental de conclure proprement cette première phase.

1°/ $Sp(f) \subset \{2p-n \,;\, p \in [\![0,n]\!]\}$ 2°/ Si $\lambda \in Sp(f)$, si $\lambda = 2p-n$ avec $p \in [\![0,n]\!]$ alors $SEP(f,\lambda) \subset \mathrm{Vect}((X-1)^p(X+1)^{n-p})$.

Q3 .. Réciproquement on prend $p \in [\![0,n]\!]$ et on vérifie que $f((X-1)^p(X+1)^{n-p}) = (2p-n)(X-1)^p(X+1)^{n-p}$.

Alors $Sp(f) = \{2p-n \,;\, p \in [\![0,n]\!]\}$ et $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $SEP(f, 2p-n) = \mathrm{Vect}((X-1)^p(X+1)^{n-p})$.

Exercice 13 ♡ L est un élément non nul de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $n \in [\![2,+\infty[\![$. p19

On pose $A = CL$ et $a = LC$.

Q1. Calculer A^2 en fonction de a et A. Qu'en déduire pour le spectre de A ?

Q2. Montrer que A est de rang 1 (on pourra expliciter A à partir des coefficients de C et L).

Q3. Montrer que $\operatorname{Sp} A = \{0, a\}$.

Q4. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas nulle.

Q1. Notons que $LC \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et donc LC est assimilable à un élément de $\mathbb{K}$.

$A^2 = CLCL = C(a)L = aCL = aA$. $A^2 = aA$. Posons $P = X^2 - aX$. $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et

$\{\alpha \in \mathbb{K} \mid P(\alpha) = 0\} = \{0, a\}$. Ainsi $\underline{\underline{\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, a\}}}$.

Q2. $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ | \\ c_n \end{pmatrix}$. $A = CL = (c_i \ell_j)$.

$\exists i_0 \in [\![1,n]\!],\ \ell_{i_0} \neq 0$

$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} c_1\ell_1 \\ c_2\ell_1 \\ | \\ c_n\ell_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_1\ell_n \\ c_2\ell_n \\ | \\ c_n\ell_n \end{pmatrix}}_{\text{colonnes de } A}\Big) = \dim \operatorname{Vect}(\ell_1 C, \ell_2 C, \dots, \ell_n C) = \dim(\operatorname{Vect}(C)) \underset{C \neq 0}{=} 1$

$\underline{\operatorname{rg} A = 1}$. $\underline{\underline{\text{Remarque}}}$: Réciproquement si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $\operatorname{rg} A = 1$: $\exists C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}), \begin{cases} C \neq 0 \\ L \neq 0 \\ A = CL \end{cases}$

Q3. $\operatorname{rg} A = 1$ donc $\dim \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\} = n-1$; $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

$C \neq 0$ et $AC = CLC = Ca = aC$; $a \in \mathrm{Sp}(A)$.

$\{0, a\} \subset \mathrm{Sp}(A) \subset \{0, a\}$. $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$.

Q4. 1er cas : $a = 0$. $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et $\dim \mathrm{SEP}(A, 0) = n-1$; A n'est pas diagonalisable.

2e cas : $a \neq 0$ $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$ et $\dim \mathrm{SEP}(A, 0) = n-1$. Nécessairement $\dim \mathrm{SEP}(A, a) = 1$

et A est diagonalisable.

Donc A est diagonalisable ssi $a \neq 0$.

$A^2 \neq 0 \Leftrightarrow aA \neq 0 \underset{A \neq 0}{\Leftrightarrow} a \neq 0$. Donc A est diagonalisable ssi $A^2 \neq 0$.

Exercice 14 n est un élément de $[\![3, +\infty[\![$. $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (X^2 + 1)P'' - 2XP'$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver la matrice de f dans la base canononique de E. En déduire le spectre de f. Déterminer le cardinal de cet ensemble.

Q3. Montrer que : $\ker f \subset \mathbb{R}_3[X]$, puis que : $\ker f = \operatorname{Vect}(1, X^3 + 3X)$. Déterminer $\ker(f + 2Id_E)$.

Q4. Montrer que f est diagonalisable.

Q1 Aucun problème. Q2 $f(1) = 0$, $f(X) = -2X$, $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f(X^k) = k(k-3)X^k + k(k-1)X^{k-2}$.

$A = \mathcal{M}_{(1, X, X^2, \dots, X^n)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & (0) \\ & -2 & 0 & \ddots & \\ & & -2 & \ddots & n(n-1) \\ & & & \ddots & 0 \\ & (0) & & & n(n-3) \end{pmatrix}$. A est triangulaire supérieure.

$\underline{\underline{\mathrm{Sp}(A) = \{k(k-3) ; k \in [\![0, n]\!]\}}}$.

Pour $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k = k(k-3)$. $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\lambda_{k+1}-\lambda_k = 2(k-1)$

Alors $\lambda_0=0, \lambda_1=-2, \lambda_2=-2 < \lambda_3=0 < \lambda_4 < \cdots < \lambda_n$.

Ainsi $\operatorname{card} Sp(A) = \operatorname{card}\{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\} = n-1$.

Q3 Soit $P\in\operatorname{Ker} f$ et $P\neq 0$. Soit $a_k X^k$ le terme de plus haut degré de P ; $a_k \neq 0$.

$(X^2+1)P''-2XP'=0$ et le coeff de X^k dans $(X^2+1)P''-2XP'$ est : $k(k-1)a_k-2ka_k$.

Ainsi $(k(k-1)-2k)a_k=0$; $k^2-3k=0$. $k=0$ ou 3 ; $k\leq 3$!

$\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}_3[X]$. Cherchons $\operatorname{Ker} f$. Partons alors de $P=aX^3+bX^2+cX+d\in\mathbb{R}_3[X]$.

$$P\in\operatorname{Ker} f \iff (X^2+1)P''-2XP'=0 \underset{\text{calcul}}{\iff} \begin{cases} 6a-2c=0 \\ 2b=0\end{cases} \iff \begin{cases} c=3a \\ b=0\end{cases}$$

<u>$\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(1, X^3+3X)$</u>

De même $\operatorname{Ker}(f+2Id_E)\subset\mathbb{R}_2[X]$ et <u>$\operatorname{Ker}(f+2Id_E)=\operatorname{Vect}(X^2-1, X)$</u>.

Q4 $n+1=\dim E \geq \sum_{\lambda\in Sp(f)} \dim SEP(f,\lambda) = \dim SEP(f,\lambda_2)+\dim SEP(f,\lambda_3)+\sum_{k=4}^{n}\dim SEP(f,\lambda_k)$

$$\underline{n+1}=\dim E\geq \sum_{\lambda\in Sp(f)}\dim SEP(f,\lambda)=2+2+\sum_{k=4}^{n}\dim SEP(f,\lambda_k)\geq 2+2+\sum_{k=4}^{n}1=4+n-3=\underline{n+1}.$$

Alors $\dim E=\sum_{\lambda\in Sp(f)}\dim SEP(f,\lambda)$; f est diagonalisable.

<u>Exercice 15</u>.. $(A,B)\in M_n(K)^2$. Montrer que $Sp(AB)=Sp(BA)$.

Il suffit de prouver que $Sp(AB)\subset Sp(BA)$. Soit $\lambda\in Sp(AB)$.

1er cas.. $\lambda=0$. AB n'est pas inversible donc BA n'est pas inversible (BA inversible donne (*) B et A inversibles (ok ?!) et donc AB inversible). $\lambda\in Sp(BA)$.

2e cas.. $\lambda\neq 0$. $\exists X\in M_{n,1}(K)$, $X\neq 0$ et $ABX=\lambda X$.

$BABX=\lambda BX$; $(BA)(BX)=\lambda(BX)$.

$BX=0 \Rightarrow ABX=0\Rightarrow \lambda X=0 \underset{\text{car } X\neq 0}{\Rightarrow} \lambda=0$! Alors $\begin{cases} BA(BX)=\lambda(BX) \\ \text{et} \\ BX\neq 0\end{cases}$; $\lambda\in Sp(BA)$.

* Supposons BA inversible. $\exists C\in M_n(K)$, $BAC=CBA=I_n$; $B(AC)=I_n$ donc B est inversible et $(CB)A=I_n$ donc A est inversible.

<u>Exercice 10</u> E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\forall f \in E,\quad \varphi(f)(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

Q1.. Montrer que φ est un endomorphisme de E. φ est-il injectif ? surjectif ?

Q2.. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

Q1.. Soit $f \in E$. Montrons que $\varphi(f) \in E$. $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0. Ainsi $\varphi(f)$ est dérivable en tout point de $]0,1]$ comme produit de 2 fonctions dérivables en tout point de $]0,1]$. En particulier $\varphi(f)$ est continue en tout point de $]0,1]$.

Montrons que $\varphi(f)$ est continue en 0.

Soit F une primitive de f sur $[0,1]$. $\forall x \in]0,1]$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$.

Donc $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0) = \varphi(f)(0)$; ainsi $\varphi(f)$ est continue en 0.

Finalement : $\forall f \in E$, $\varphi(f) \in E$. Montrons alors la linéarité de φ.

Soient f et g deux éléments de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in]0,1]$, $\varphi(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f + g)(t)\,dt = \lambda \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt = \lambda\varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(x)$.

$$\varphi(\lambda f+g)(0) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda\varphi(f)(0) + \varphi(g)(0) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(0)$$

Ainsi $\forall x \in [0,1]$ $\varphi(\lambda f+g)(x) = (\lambda\varphi(f)+\varphi(g))(x)$ et donc $\varphi(\lambda f+g) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g)$. Ceci achève de prouver la linéarité de φ.

<u>φ est un endomorphisme de E.</u>

Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. $\varphi(f) = 0_E$. En particulier $\forall x \in]0,1]$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = 0$.

Donc $\forall x \in]0,1]$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$ et par conséquent : $\forall x \in [0,1]$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$!

En dérivant il vient : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 0$. $f = 0_E$.

Finalement : $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$; <u>$\varphi$ est un endomorphisme injectif.</u>

Nous avons vu que si $f \in E$, $\varphi(f)$ est dérivable sur $]0,1]$. Ainsi $\operatorname{Im}\varphi$ est contenu dans l'ensemble des éléments de E dérivables sur $]0,1]$. Posons $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$. g est un élément de E non dérivable en $1/2$ donc $g \in E$ mais $g \notin \operatorname{Im}\varphi$. $\operatorname{Im}\varphi \neq E$.

<u>φ est un endomorphisme non surjectif.</u>

Q2 .. Analyse. Soit $\lambda \in Sp(\varphi)$. $\exists f \in E$, $f \neq 0_E$ et $\varphi(f) = \lambda f$.

λ n'est pas nul car $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}(\varphi - 0\,Id_E) = \{0_E\}$.

Ainsi $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \frac{1}{\lambda}\varphi(f)(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$. Alors f est dérivable en tout point de $]0,1]$.

$\forall x \in]0,1]$, $\lambda x f(x) = \int_0^x f(t)dt$. En dérivant il vient : $\forall x \in]0,1]$, $\lambda f(x) + \lambda x f'(x) = f(x)$

$\forall x \in]0,1]$, $f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x) = 0$ (OK?)

Lemme .. a est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'ensemble S des applications f, dérivables de I dans $\mathbb{R}$, et telles que : $\forall x \in I$, $f'(x) - a(x)f(x) = 0$ est $\operatorname{Vect}(\omega)$ où $\omega : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{A(x)} \end{array}$ A étant une primitive de a sur I.

▲ (a) Soit $f \in S$. $\forall x \in I$, $f'(x) - a(x)f(x) = 0$. $\forall x \in I$, $e^{A(x)} f'(x) - a(x)e^{A(x)} f(x) = 0$.

Ainsi $e^A f' - a e^A f = 0$; $e^A f' - (e^A)' f = 0$; $\frac{e^A f' - (e^A)' f}{(e^A)^2} = 0$.

Donc $\left(\frac{f}{e^A}\right)' = 0$; $\frac{f}{e^A}$ est constante sur I. $\exists c \in \mathbb{R}$, $f = c e^A$. $f \in \operatorname{Vect}(e^A) = \operatorname{Vect}(\omega)$.

Réciproquement. Soit $f \in \operatorname{Vect}(\omega)$. $\exists c \in \mathbb{R}$, $f = c e^A$.

$f' - a f = (c e^A)' - a(c e^A) = c A' e^A - c a e^A = c a e^A - c a e^A = 0$; $f \in S$.

Ceci achève de prouver le lemme. ▼

Reprenons notre démonstration : $\forall x \in]0,1]$, $f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x) = 0$.

Ce qui précède prouve que $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = c\, e^{A(x)}$ où A est une primitive de $x \mapsto \frac{1-\lambda}{\lambda x}$ sur $]0,1]$. Ainsi en prenant $\forall x \in]0,1]$, $A(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)$ nous obtenons :

$\forall x \in]0,1]$, $f(x) = c\, e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)} = c\,|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = c\, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$

f n'étant pas nulle : c n'est pas nul. Par conséquent f ayant une limite finie en 0 : $f(0)$, $x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ admet une limite finie en 0. Ceci implique $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ donc $\lambda \in]0,1]$.

Ainsi $\lambda \in]0,1]$.

Soit alors g_λ le prolongement par continuité de la fonction : $\begin{array}{l}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \end{array}$

Notons que $g_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ lorsque $\lambda \in]0,1[$ et

$g_\lambda(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$ lorsque $\lambda = 1$.

Notons alors que $f \in \mathrm{Vect}(g_\lambda)$.

Ainsi si $\lambda \in Sp(\varphi)$: $\lambda \in]0,1]$ et $SEP(\varphi,\lambda) \subset \mathrm{Vect}(g_\lambda)$. Cette inclusion est en fait une égalité car $\dim SEP(\varphi,\lambda) \geqslant 1$ et $\dim \mathrm{Vect}(g_\lambda) = 1$

Cette analyse nous donne alors

i) $Sp(\varphi) \subset]0,1]$.

ii) $\forall \lambda \in Sp(\varphi)$, $SEP(\varphi,\lambda) = \mathrm{Vect}(g_\lambda)$.

"Synthèse" : Notons que $Sp(\varphi) =]0,1]$.

Il nous suffit de prouver que $]0,1] \subset Sp(\varphi)$. Soit $\lambda \in]0,1]$.

$g_\lambda \in E$, $g_\lambda \neq 0_E$. Notons que $\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$ et ainsi aurons nous $\lambda \in Sp(\varphi)$.

* $\lambda = 1$. $\forall x \in [0,1]$, $g_\lambda(x) = 1$.

$\varphi(g_\lambda)(0) = g_\lambda(0) = \lambda g_\lambda(0)$ car $\lambda = 1$.

$\forall x \in]0,1]$, $\varphi(g_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x 1\,dt = \frac{1}{x} \times x = 1 = 1 \times 1 = \lambda g_\lambda(x)$

Ainsi $\underline{\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda}$.

* $\lambda \in]0,1[$. $\forall x \in]0,1]$, $g_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ et $g_\lambda(0) = 0$.

$\varphi(g_\lambda)(0) = g_\lambda(0) = 0 = \lambda \times 0 = \lambda g_\lambda(0)$

$\forall x \in]0,1]$, $\varphi(g_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \frac{1}{x}\left[\lambda t^{1/\lambda}\right]_0^x = \frac{1}{x}\lambda x^{1/\lambda} = \lambda x^{1/\lambda - 1} = \lambda g_\lambda(x)$.

Donc $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(g_\lambda)(x) = \lambda g_\lambda(x)$; $\underline{\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda}$.

Donc $g_\lambda \in E$, $g_\lambda \neq 0_E$ et $\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$. $\lambda \in Sp(\varphi)$.

Finalement : $\underline{Sp(\varphi) =]0,1] \text{ et } \forall \lambda \in]0,1],\ SEP(\varphi,\lambda) = \mathrm{Vect}(g_\lambda)}$.

Rappelons que si $\lambda = 1$: $\forall x \in [0,1]$, $g_\lambda(x) = 1$

si $\lambda \in]0,1[$, $g_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$

Exercice 27.. $\dim_{\mathbb{R}} E = 2$. $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ est une base de E. $u\in\mathcal{L}(E)$ et $M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}$

Q1.. Trouver le spectre de u et ses sous-espaces propres.

Q2.. $\forall f\in\mathcal{L}(E)$. $\varphi(f)=u\circ f$. Prouver que $\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$. Trouver le spectre et les sous-espaces propres de φ.

Q1.. Soit $v=xe_1+ye_2$ un élément de E. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$u(v)=\lambda v \iff \begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \iff \begin{cases}x+4y=\lambda x\\ x+y=\lambda y\end{cases} \iff \begin{cases}x=(\lambda-1)y\\ 0=(1-\lambda)x+4y=(1-\lambda)(\lambda-1)y+4y=(-\lambda^2+2\lambda+3)y\end{cases}$$

$$u(v)=\lambda v \iff \begin{cases}x=(\lambda-1)y\\ -(\lambda+1)(\lambda-3)y=0\end{cases}$$

1er cas.. $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,3\}$. $u(v)=\lambda v \iff x=y=0$; $\lambda\notin Spec(u)$

2ème cas.. $\lambda=-1$. $u(v)=\lambda v \iff x=-2y$; $\lambda\in Spec(u)$ et $F_\lambda=Ker(u-\lambda Id_E)=Vect(2e_1-e_2)$.

3ème cas.. $\lambda=3$. $u(v)=\lambda v \iff x=2y$; $\lambda\in Spec(u)$ et $F_\lambda=Vect(2e_1+e_2)$.

Finalement : $Spec(u)=\{-1,3\}$, $F_{-1}=Vect(2e_1-e_2)$ et $F_3=Vect(2e_1+e_2)$.

Notons que u est diagonalisable. $\mathcal{B}'=(2e_1-e_2,2e_1+e_2)$ est une base de E et $M_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P=\begin{bmatrix}2&2\\-1&1\end{bmatrix}$; $P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac14&-\frac12\\ \frac14&\frac12\end{bmatrix}$.

Q2.. Notons que si $f\in\mathcal{L}(E)$, $u\circ f\in\mathcal{L}(E)$ (composée de deux endomorphismes de E), par conséquent φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$. Notons que φ est linéaire.

$\forall (f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f+g)=u\circ(\lambda f+g)\underset{\uparrow}{=}\lambda\, u\circ f+u\circ g=\lambda\varphi(f)+\varphi(g)$

linéarité de u

Par conséquent : $\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Posons $M_{\mathcal{B}}(f)=A=\begin{bmatrix}x&z\\y&t\end{bmatrix}$

$$\varphi(f)=\lambda f \iff u\circ f=\lambda f \iff M_{\mathcal{B}}(u)A=\lambda A \iff \begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&z\\y&t\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x&z\\y&t\end{bmatrix} \iff \begin{cases}x+4y=\lambda x\\ x+y=\lambda y\\ z+4t=\lambda z\\ z+t=\lambda t\end{cases}$$

Nous pourrions résoudre le système, trop banal (et occultant le fond du débat) ... de plus nous l'avons déjà fait dans Q1. Justement...!

Posons $R=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ et $S=\begin{bmatrix}z\\t\end{bmatrix}$

$$\varphi(f)=\lambda f \iff \begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}[R,S]=\lambda\,[R,S] \iff \begin{cases}M_{\mathcal{B}}(u)R=\lambda R\\ M_{\mathcal{B}}(u)S=\lambda S\end{cases}$$
$\iff$ R et S sont dans $\hat{F}_\lambda=\{X\in M_{2,1}(\mathbb{R}) \mid M_{\mathcal{B}}(u)X=\lambda X\}$

1er cas.. $\lambda\notin\{-1,3\}$. $\hat{F}_\lambda=\{0\}$; $\varphi(f)=\lambda f \iff f=0_{\mathcal{L}(E)}$; $\lambda\notin Spec\,\varphi$.

2ème cas. $\lambda = -1$.

$\varphi(f) = -f \Leftrightarrow R \in \hat{F}_{-1}$ et $S \in \hat{F}_{-1}$; donc $\underline{-1 \in \operatorname{Spec}\varphi}$

Précisons. $\hat{F}_{-1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

Donc $\varphi(f) = -f \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ R = \alpha\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $S = \beta\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}$

$\operatorname{Ker}(\varphi + Id_{\mathcal{L}(E)}) = \left\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} \right\}$

$\underline{\operatorname{Ker}(\varphi + Id_{\mathcal{L}(E)}) = \left\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid M_{\mathcal{B}}(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \right\}}$

3ème cas. $\lambda = 3$.

$\varphi(f) = 3f \Leftrightarrow R$ et S sont dans $\hat{F}_3 = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ R = \alpha\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $S = \beta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\varphi(f) = 3f \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

donc $\underline{3 \in \operatorname{Spec}\varphi \text{ et } \operatorname{Ker}(\varphi - 3Id_{\mathcal{L}(E)}) = \left\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid M_{\mathcal{B}}(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right\}}$.

Finalement : || $\operatorname{Spec}\varphi = \{-1, 3\} = \operatorname{Spec} u$
|| $\operatorname{Ker}(\varphi + Id_{\mathcal{L}(E)}) = \left\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid M_{\mathcal{B}}(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \right\}$ et
|| $\operatorname{Ker}(\varphi - 3Id_{\mathcal{L}(E)}) = \left\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid M_{\mathcal{B}}(f) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right\}$

<u>Remarques</u> 1.. $\operatorname{Ker}(\varphi + Id_{\mathcal{L}(E)})$ est isomorphe à $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$ qui est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ de dimension 2 ; donc $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi + Id_{\mathcal{L}(E)})) = 2$

De même : $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi - 3Id_{\mathcal{L}(E)})) = 2$.

On a alors : $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi + Id_{\mathcal{L}(E)})) + \dim(\operatorname{Ker}(\varphi - 3Id_{\mathcal{L}(E)})) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathcal{L}(E)$; φ est diagonalisable.

2.. Tout cela n'est pas nouveau. Retrouvons les résultats précédents à travers une démonstration généralisée.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $F_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E)$.

$\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow u \circ f = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in E,\ u(f(x)) = \lambda f(x) \Leftrightarrow \forall w \in \operatorname{Im} f,\ u(w) = \lambda w \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset F_\lambda$

ou $F_\lambda = \{0_E\}$ et : $\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \varphi(f) = \lambda f \} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$

ou $F_\lambda \neq \{0_E\}$ et : $\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \varphi(f) = \lambda f \} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Par conséquent : $\operatorname{Spec}\varphi = \operatorname{Spec} u = \{-1, 3\}$.

De plus : $\operatorname{Ker}(\varphi + Id_{\mathcal{L}(E)}) = \{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} f \in \operatorname{Vect}(2e_1 - e_2) \}$ | ce qui confirme les résultats

et $\operatorname{Ker}(\varphi - 3Id_{\mathcal{L}(E)}) = \{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} f \in \operatorname{Vect}(2e_1 + e_2) \}$ | précédents.

Exercice 18 $n\in\mathbb{N}^*$. $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $a_{ij}=\begin{cases} i & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i\neq j\end{cases}$.

Q1.. Montrer que si λ est un réel :
$\lambda\in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda\notin [\![0,n-1]\!]$ et $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\dots+\frac{1}{\lambda-(n-1)}=1$.

Q2.. Trouver le nombre d'éléments de $Sp_{\mathbb{R}}(A)$.

Q1 Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $A=\begin{pmatrix}1 & & (1)\\ & 2 & \\ (1) & & \ddots_n\end{pmatrix}$

$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n=\lambda x_1\\ x_1+2x_2+x_3+\dots+x_n=\lambda x_2\\ \dots\\ x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+nx_n=\lambda x_n\end{cases} \Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ x_1+x_2+\dots+x_n=(\lambda-k+1)x_k$

$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n=\lambda x_1\\ \text{et}\\ \lambda x_1=(\lambda-1)x_2=\dots=(\lambda-n+1)x_n\end{cases}$

1er Cas.. $\lambda\in[\![0,n-1]\!]$. $\exists i\in[\![0,n-1]\!]$, $\lambda=i$; $\lambda-k+1=\begin{cases} i-k+1\neq 0 \text{ si } k\neq i+1\\ i-k+1=0 \text{ si } k=i+1\end{cases}$

Alors $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n=\lambda x_1\\ \text{et}\\ \lambda x_1=\dots=(\lambda-i)x_i=0=(\lambda-i-1)x_{i+2}=\dots=(\lambda-n+1)x_n\end{cases}$

$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+\dots+x_n=\lambda x_1\\ \text{et}\\ \forall k\in[\![1,n]\!]-\{i+1\},\ x_k=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{i+1}=\lambda x_1\\ \text{et}\\ \forall k\in[\![1,n]\!]-\{i+1\},\ x_k=0\end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2=\dots=x_n=0$

→ dans si $i\neq 0$ car $x_1=0$
→ dans si $i=0$ car $\lambda=0$.

Ainsi si $\lambda\in[\![0,n-1]\!]$, $\lambda\notin Sp(A)$.

2ème Cas $\lambda\notin[\![0,n-1]\!]$. $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+\dots+x_n=\lambda x_1\\ \forall k\in[\![2,n]\!],\ x_k=\frac{\lambda}{\lambda-k+1}x_1\end{cases}$

$$AX=\lambda X \iff \begin{cases} x_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 = \lambda x_1 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda x_1 \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 \right] = 0 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 \end{cases}$$

$$AX=\lambda X \iff \begin{cases} x_1 \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 \right] = 0 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1 \end{cases} \quad \text{car } \lambda \neq 0$$

α) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 \neq 0$. $AX=\lambda X \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = 0 \end{cases} \iff X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\lambda \notin Sp(A)$

β) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-k+1} - 1 = 0$. $AX=\lambda X \iff \forall k\in [\![2,n]\!],\ x_k = \dfrac{\lambda}{\lambda-k+1} x_1$.

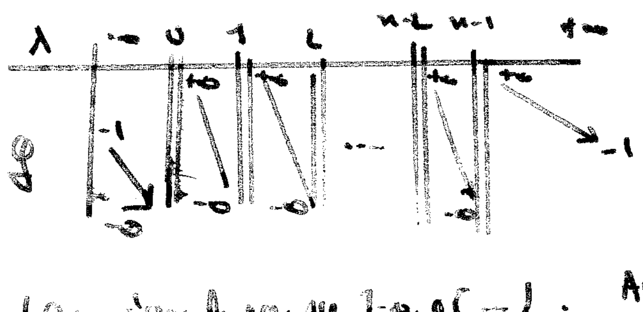
Alors $\lambda \in Sp(A)$ et $SEP(A,\lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 1/(\lambda-1) \\ \vdots \\ 1/(\lambda-n+1) \end{pmatrix} \right)$.

Finalement : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in Sp(A) \iff \lambda \notin [\![0,n-1]\!]$ et $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda-1} + \dots + \dfrac{1}{\lambda-n+1} = 1$.

Q2 Montrons que $\mathrm{card}\, Sp(A) = n$.

V1. A est symétrique réelle donc diagonalisable. Q1 a montré que les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles. Alors A possède n valeurs propres distinctes.

V2 Posons $g : \lambda \mapsto \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda-1} + \dots + \dfrac{1}{\lambda-n+1} - 1$. g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{0,1,\dots,n-1\}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}-\{0,1,\dots,n-1\}$, $g'(\lambda) = -\dfrac{1}{\lambda^2} - \dots - \dfrac{1}{(\lambda-n+1)^2} < 0$.



En appliquant le théorème de la bijection sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$, …, $]n-2,n-1[$, $]n-1,+\infty[$ on montre que g a exactement n zéros (g ne s'annule pas sur $]-\infty,0[$ …). Ainsi on retrouve $\mathrm{card}\, Sp(A) = n$.

Exercice 4.3 **Racines $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q1. Donner les valeurs propres et les sous espaces de A.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^n = A$.

a) Soit B un élément de $\mathcal{R}$. Montrer que B commute avec A.

En déduire que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de B et que B est triangulaire inférieure.

Montrer l'existence de trois réels a, b et f tels que : $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

b) Déterminer $\mathcal{R}$.

Q1) A est triangulaire inférieure donc les valeurs propres de A sont les éléments de sa diagonale. $Sp(A) = \{1, -1\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x + y = y \\ -z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ x + y = -y \\ -z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. $SEP(A,-1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$Sp(A) = \{1, -1\}$. $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. $SEP(A,-1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

__Remarque.__ A n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres n'est pas 3.

Q2) a) $BA = BB^n = B^{n+1} = B^n B = AB$. __B commute avec A.__

Soit X un vecteur propre de A. $X \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $\exists \lambda \in \{-1, 1\}$, $AX = \lambda X$.

$BAX = \lambda BX$ (multiplication par B de $AX = \lambda X$).

Alors $ABX = BAX = \lambda BX$; $BX \in SEP(A, \lambda)$.

Or $X \neq 0$, $X \in SEP(A,\lambda)$ et $\dim SEP(A,\lambda) = 1$ donc $SEP(A,\lambda) = Vect(X)$.

Alors $BX \in Vect(X)$. $\exists \delta_\lambda \in \mathbb{R}$, $BX = \delta_\lambda X$. Comme $X \neq 0$, X est un vecteur propre de B.

__Les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de B.__

Soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AE_2 = E_2$; $AE_3 = -E_3$, $E_2 \neq 0$ et $E_3 \neq 0$.

E_2 et E_3 sont donc deux vecteurs propres de A donc de B.

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $BE_2 = \alpha E_2$ et $BE_3 = \beta E_3$.

Or BE_2 (resp. BE_3) est la deuxième colonne (resp. troisième colonne) de B.

Ainsi $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix}$. <u>B est triangulaire inférieure.</u>

$AB = BA$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a+b & \alpha & 0 \\ -c & 0 & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b+\alpha & \alpha & 0 \\ c & 0 & -\beta \end{pmatrix}$.

Ainsi $\alpha = a$ et $-c = c$. Donc $\alpha = a$ et $c = 0$.

$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$. Posons $t = \beta$. Alors $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$.

b) Ce qui précède montre que : $R \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} ; (a,b,t) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Soit $(a,b,t) \in \mathbb{R}^3$. Posons $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2b & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}.$$

Une récurrence simple montre que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ k a^{k-1} b & a^k & 0 \\ 0 & 0 & t^k \end{pmatrix}$

Alors : $B \in R \Leftrightarrow B^n = A \Leftrightarrow \begin{cases} a^n = 1 \\ n a^{n-1} b = 1 \\ t^n = -1 \end{cases}$

1er cas... n est pair. $R = \emptyset$!

2e cas... n est impair. $B \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ t = -1 \\ b = 1/n \end{cases}$. $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$