Exercice 25 f est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice, dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?

Q2. On suppose que g est un endomorphisme de E vérifiant : $g \circ g = f$.

a) Montrer que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et 4. En déduire que e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de g. g est-il diagonalisable ?

b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de g est $\{1, 2\}$ ou $\{-1, -2\}$ ou $\{1, -2\}$ ou $\{-1, 2\}$.

c) Montrer qu'il existe deux réel δ et ε tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/(2\delta) & \delta & 0 \\ 1/(\delta + 2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

Q3. Résoudre l'équation :

$$X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad X^2 = A$$

Q1) A est triangulaire inférieure donc son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux. $Sp(f) = Sp(A) = \{1, 4\}$. Un calcul simple donne $SEP(f,1) = Vect(e_2)$ et $SEP(f,4) = Vect(e_3)$.

Ainsi f n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas égale à dim E.

Q2) a) $f(g(e_2)) = g^3(e_2) = g(f(e_2)) = g(e_2)$. De plus $g(e_2)$ n'est pas nul car $g(e_2) = 0_E$ donne $g(g(e_2)) = 0_E$ qui donne $e_2 = f(e_2) = g(g(e_2)) = 0_E$!

Donc $g(e_2)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

De même $g(e_3)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 4.

$g(e_2) \in SEP(f,1) = Vect(e_2)$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $g(e_2) = \lambda e_2$ et $e_2 \neq 0_E$. Alors e_2 est un vecteur propre de g. Notons que : $e_2 = f(e_2) = g(g(e_2)) = \lambda^2 e_2$ donc $\lambda^2 = 1$.

e_2 est un vecteur propre de g associé à une valeur propre λ vérifiant $\lambda^2 = 1$. De même e_3 est un vecteur propre de g associé à une valeur propre μ vérifiant $\mu^2 = 4$.

Supposons g diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $D = M_{\mathcal{B}'}(g)$ soit diagonale.

Alors $M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'}(g^2) = D^2$ est diagonale et ainsi f est diagonalisable.

g n'est pas diagonalisable.

c) λ et μ sont deux valeurs propres distinctes ($\lambda^2=1$ et $\mu^2=4$) de g. Or g ne peut pas avoir trois valeurs propres distinctes car g n'est pas diagonalisable.

Alors $Sp(g)=\{\lambda,\mu\}$. Comme $\lambda^2=1$ et $\mu^2=4$: $\lambda=1$ ou -1 et $\mu=2$ ou -2.

Ainsi $\underline{\underline{Sp(g)=\{1,2\} \text{ ou } \{-1,-2\} \text{ ou } \{1,-2\} \text{ ou } \{-1,2\}}}$.

En clair $\delta=\lambda$ et $\varepsilon=\frac{\mu}{2}$!!

Posons $\delta=1$ si $\lambda=1$ et $\delta=-1$ si $\lambda=-1$; posons $\varepsilon=1$ si $\mu=2$ et $\varepsilon=-1$ si $\mu=-2$

$g(e_2)=\lambda e_2=\delta e_2$ et $g(e_3)=\mu e_3=2\varepsilon e_3$. Notons que $\delta\in\{-1,1\}$ et $\varepsilon\in\{-1,1\}$.

De plus $\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $g(e_1)=ae_1+be_2+ce_3$. $M_B(g)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ b & \delta & 0\\ c & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&4\end{pmatrix}=A=M_B(f)=M_B(g^2)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ b & \delta & 0\\ c & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ ba+\delta b & \delta^2 & 0\\ ac+2\varepsilon c & 0 & 4\varepsilon^2\end{pmatrix}.$$

Alors $a^2=1$, $ba+\delta b=1$ et $c(a+2\varepsilon)=1$

Comme $b(a+\delta)=1$: $a\neq-\delta$. $a^2=1=\delta^2$ donc alors nécessairement $a=\delta$.

Donc $a=\delta$, $b=\frac{1}{2\delta}$ et $c=\frac{1}{\delta+2\varepsilon}$. $M_B(g)=\begin{pmatrix}\delta & 0 & 0\\ 1/2\delta & \delta & 0\\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}$ avec $\varepsilon\in\{-1,1\}$ et $\delta\in\{-1,1\}$.

Q3) Soit $X\in M_3(\mathbb{R})$ tel que $X^2=A$. Notons h l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est X. $M_B(h^2)=X^2=A=M_B(f)$. $h^2=f$. $h\circ h=f$.

D'après Q2 $\exists\varepsilon\in\{-1,1\}$, $\exists\delta\in\{-1,1\}$, $X=\begin{pmatrix}\delta & 0 & 0\\ 1/2\delta & \delta & 0\\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}$.

Réciproquement soit $(\delta,\varepsilon)\in\{-1,1\}^2$. Posons $X=\begin{pmatrix}\delta & 0 & 0\\ 1/2\delta & \delta & 0\\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}$.

$$X^2=\begin{pmatrix}\delta & 0 & 0\\ 1/2\delta & \delta & 0\\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\delta^2 & 0 & 0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \delta^2 & 0\\ \frac{\delta}{\delta+2\varepsilon}+\frac{2\varepsilon}{\delta+2\varepsilon} & 0 & 4\varepsilon^2\end{pmatrix}$$

Donc $X^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&4\end{pmatrix}=A$.

Ainsi $\{X\in M_{3,3}(\mathbb{R})\mid X^2=A\}=\left\{\begin{pmatrix}\delta & 0 & 0\\ 1/2\delta & \delta & 0\\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix};(\delta,\varepsilon)\in\{-1,1\}^2\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\1/3&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\-1&0&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1/2&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\-\frac{1}{2}&-1&0\\-\frac{1}{3}&0&-2\end{pmatrix}\right\}.$

Exercice 2 E est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

On définit pour tout élément $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ de E la suite $v = \Delta(u)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)\cdot$$

Q1 Montrer que l'application Δ ainsi définie est un endomorphisme de E.

Q2 On considère un réel λ n'appartenant pas à l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{p+1}\ ;\ p \in \mathbb{N}\right\}$.

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de $\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda\ \mathrm{Id}_E)$. Montrer par une récurrence adaptée que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.

Qu'en déduire pour le spectre de Δ ? Δ est-il injectif ?

Q3 On rappelle que si r et s sont deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $s \geqslant r$: $\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{s}{r} = \binom{s+1}{r+1}$.

a) Soit p un élément de $\mathbb{N}$. On pose $\lambda = \frac{1}{p+1}$ et on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{si } n \geqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que $\Delta(u) = \lambda u$.

b) Préciser le spectre de Δ.

Q4 Soit p un élément de $\mathbb{N}$. On pose $\lambda = \frac{1}{p+1}\cdot$ Déterminer SEP (Δ, λ).

Q5 **Facultatif** Étudier la surjectivité de Δ.

Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $u' = (u'_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de E.

$$\Delta(\lambda u + u') = \Delta\left((\lambda u_n + u'_n)_{n\geqslant 0}\right) = \left(\frac{(\lambda u_0 + u'_0) + (\lambda u_1 + u'_1) + \cdots + (\lambda u_n + u'_n)}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$$

$$\Delta(\lambda u + u') = \left(\lambda\,\frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1} + \frac{u'_0+u'_1+\cdots+u'_n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0} = \lambda\left(\frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0} + \left(\frac{u'_0+u'_1+\cdots+u'_n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$$

$\Delta(\lambda u + u') = \lambda\,\Delta(u) + \Delta(u')$. Ainsi Δ est linéaire.

Δ étant une application de E dans E (si $u \in E$, $v = \Delta(u)$ est bien une suite de réels indexée par $\mathbb{N}$), Δ est alors un endomorphisme de E.

Q2 Montrons à l'aide d'une récurrence "forte" que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.

Remarquons d'abord que $u \in \mathrm{Ker}(\Delta - \lambda \mathrm{Id}_E)$ donc $\Delta(u) = \lambda u$ et ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1} = \lambda u_n$.

- $u_0 = \lambda u_0$; $(\lambda-1)u_0 = 0$. Or $\lambda \notin S = \{\frac{1}{p+1} ; p \in \mathbb{N}\}$ donc λ est différent de $\frac{1}{0+1} = 1$. Ainsi $u_0 = 0$.

- Supposons que pour n dans $\mathbb{N}$ on ait : $u_0 = u_1 = \dots = u_n = 0$. Montrons alors que $u_{n+1} = 0$.

$$\lambda u_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n+1}}{n+2} \overset{HR}{=} \frac{u_{n+1}}{n+2} \text{ ; alors } \left(\lambda - \frac{1}{n+2}\right) u_{n+1} = 0.$$

Or $\lambda \notin S$ donc $\lambda \neq \frac{1}{n+2}$; ainsi $u_{n+1} = 0$. Ceci achève la récurrence.

Finalement $u = 0_E$. Par conséquent $\operatorname{Ker}(\Delta - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

Ce qui précède montre que les éléments de $\mathbb{R} \setminus S$ ne sont pas des éléments du spectre de Δ. Alors le spectre de Δ est contenu dans $S = \{\frac{1}{p+1} ; p \in \mathbb{N}\}$.

$0 \notin S$ donc $0 \notin \operatorname{Sp} \Delta$ et ainsi Δ est injectif.

Q3 a) Posons $v = (v_n)_{n \geq 0} = \Delta(u)$. Montrons que $v = \lambda u$ où $\lambda = \frac{1}{p+1}$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda u_n$.

Si $p \geq 1$: $\forall n \in [\![0, p-1]\!]$, $u_n = 0$

Si $p \geq 1$: $\forall n \in [\![0, p-1]\!]$, $v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1} = 0 = \lambda \times 0 = \lambda u_n$.

Montrons alors que $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $v_n = \lambda u_n$ ou $v_n = \frac{1}{p+1} u_n$.

Soit $n \in [\![p, +\infty[\![$.

$$v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + \dots + u_n) = \frac{1}{n+1}(u_p + u_{p+1} + \dots + u_n) = \frac{1}{n+1}\left[\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n}{p}\right]$$

$$\text{Alors } v_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rappel}}}{=} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{p+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{classique}}}{=} \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p} = \frac{1}{p+1}\binom{n}{p} = \frac{1}{p+1} u_n = \lambda u_n.$$

Finalement $\underline{\underline{\Delta(u) = \lambda u}}$. Or $u \neq 0_E$ (par exemple $u_p = 1$) donc

$\lambda = \frac{1}{p+1}$ est une valeur propre de Δ et u est un vecteur propre associé.

b) Nous venons de voir que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{p+1} \in Sp\,\Delta$.

Ainsi $\mathcal{S} \subset Sp\,\Delta$. Dans Q2 nous avons vu que $Sp\,\Delta \subset \mathcal{S}$.

Finalement $\underline{\underline{Sp\,\Delta = \mathcal{S} = \{\frac{1}{p+1}\ ;\ p \in \mathbb{N}\}}}$.

Q4 Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(p) = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q3 nous a montré que $(u_n(p))_{n \geq 0}$ est un élément non nul de $SEP(\Delta, \frac{1}{p+1})$

Alors $Vect\left((u_n(p))_{n\geq 0}\right) \subset SEP(\Delta, \frac{1}{p+1})$. Nous allons montrer l'inclusion contraire. Posons $\lambda = \frac{1}{p+1}$ et prenons un élément $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de $SEP(\Delta, \frac{1}{p+1}) = SEP(\Delta, \lambda)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \lambda u_n$.

Si $u = 0_E$ il est alors clair que $u \in Vect\left((u_n(p))_{n\geq 0}\right)$.

Supposons $u \neq 0_E$. Soit k le plus petit élément de $\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0\}$ (k existe car $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$).

A ce stade nous pouvons écrire que $u_0 = u_1 = \cdots = u_{k-1} = 0$.

Dans tous les cas nous avons $\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_k}{k+1} = \frac{u_k}{k+1}$ et $\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_k}{k+1} = \lambda u_k$.

Ainsi $\frac{u_k}{k+1} = \lambda u_k = \frac{u_k}{p+1}$. Comme u_k n'est pas nul : $\frac{1}{k+1} = \frac{1}{p+1}$; $k = p$.

Montrons alors que $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_p \times u_n(p)}$ (ok ?!).

C'est déjà clair pour $n \in [\![0, p-1]\!]$ (si cet ensemble n'est pas vide ...)

car $u_0 = u_1 = \cdots = u_{p-1} = 0$ et $u_0(p) = u_1(p) = \cdots = u_{p-1}(p) = 0$.

Montrons à l'aide d'une récurrence forte que $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $u_n = u_p\, u_n(p)$

• La propriété est vraie pour $p=1$ car $u_p = u_p \times 1 = u_p \times u_p(p)$.

• Soit $n \in [\![p, +\infty[\![$. Supposons la propriété vraie pour tous les éléments de $[\![p, n]\!]$ et montrons-la pour $n+1$.

$(u_n)_{n \geq 0} \in SEP(\Delta, \lambda)$ donc $\dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1}}{n+2} = \lambda u_{n+1}$ et ainsi

↑↑ désolé...

$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (\lambda(n+2) - 1)\, u_{n+1}$. De même comme $(u_n(p))_{n \geq 0} \in SEP(\Delta, \lambda)$

$u_0(p) + u_1(p) + \cdots + u_n(p) = (\lambda(n+2) - 1)\, u_{n+1}(p)$.

Ainsi $(\lambda(n+2) - 1)\, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \underset{\uparrow}{=} u_p \left[u_0(p) + u_1(p) + \cdots + u_n(p) \right]$.

$\underline{\underline{HR}}$

Donc $(\lambda(n+2) - 1)\, u_{n+1} = u_p\, (\lambda(n+2) - 1)\, u_{n+1}(p)$.

Ou $(\lambda(n+2) - 1) \left[u_{n+1} - u_p\, u_{n+1}(p) \right] = 0$.

Or $\lambda = \dfrac{1}{p+1}$ et $n+2 \geq p+2$ donc $\lambda(n+2) \geq \dfrac{p+2}{p+1} > 1$.

Alors $\lambda(n+2) - 1 \neq 0$. Ainsi $u_{n+1} = u_p\, u_{n+1}(p)$ et la récurrence s'achève.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p\, u_n(p)$. Posons $\sigma = u_p$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = \sigma\, u_n(p)$; $\quad (u_n)_{n \geq 0} = \sigma\, (u_n(p))_{n \geq 0}$.

Donc $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathrm{Vect}\left((u_n(p))_{n \geq 0} \right)$ et ceci achève de montrer que

$SEP\left(\Delta, \dfrac{1}{p+1}\right) = \mathrm{Vect}\left((u_n(p))_{n \geq 0} \right)$.

$\underline{\underline{\forall p \in \mathbb{N}, \; SEP\left(\Delta, \frac{1}{p+1}\right) = \mathrm{Vect}\left((u_n(p))_{n \geq 0} \right)}}$ où $\underline{\underline{(u_n(p))_{n \geq 0}}}$ est la suite

$\underline{\underline{\text{définie par : } \forall n \in \mathbb{N}, \; u_n(p) = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}}$.

(Q5) • Une petite analyse pour commencer.

Soit $u=(u_n)_{n\geq 0}\in E$. Posons $v=(v_n)_{n\geq 0}=\Delta(u)$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}=v_n$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_0+u_1+\cdots+u_n=(n+1)v_n$.

Alors $u_0=v_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(u_0+\cdots+u_n)-(u_0+\cdots+u_{n-1})=(n+1)v_n-nv_{n-1}$.

Donc $u_0=v_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(n+1)v_n-nv_{n-1}$

Remarque.. Ceci montre qu'un élément de E a au plus un antécédent par Δ dans E, non ? On retrouve ainsi l'injectivité de Δ et cela donne surtout la possibilité de montrer que Δ est surjectif.

• Montrons que Δ est surjectif. Soit $\omega=(\omega_n)_{n\geq 0}\in E$.

Posons $u_0=\omega_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(n+1)\omega_n-n\omega_{n-1}$.

Posons encore $u=(u_n)_{n\geq 0}$. $u\in E$. Montrons que $\Delta(u)=\omega$.

Soit à montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}=\omega_n$.

Cette égalité est claire pour $n=0$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\left[\omega_0+\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)\omega_k-k\omega_{k-1}\right)\right]=\frac{1}{n+1}\left[\omega_0+(n+1)\omega_n-\omega_0\right]=\omega_n.$$

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}=\omega_n$. $\Delta(u)=\omega$.

Nous venons de montrer que : $\forall\omega\in E$, $\exists u\in E$, $\Delta(u)=\omega$.

Ainsi Δ est surjectif.

Δ est un endomorphisme injectif et surjectif de E. Δ est un automorphisme de E.

Remarque.. Soit $u=(u_n)_{n\geq 0}\in E$. Posons $v=(v_n)_{n\geq 0}=\Delta^{-1}(u)$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\begin{cases}u_0 & \text{si } n=0\\ (n+1)u_n-nu_{n-1} & \text{si } n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

Exercice 2 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.

f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?

On pose $u_1 = e_2 - e_3$ et $u_2 = e_1 + e_2 - e_3$.

$\boxed{\text{Q3}}$ On se propose de déterminer les sous-espaces vectoriels F de E stables par f ($f(F) \subset F$).

a) Déterminer les droites vectorielles de E stables par f.

b) On pose $P_1 = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ et $P_2 = \operatorname{Im} f$. Montrer que P_1 et P_2 sont stables par f.

c) Soit P un plan de E stable par f différent de P_2. Montrer que $P \cap P_2$ est une droite vectorielle de E stable par f. En déduire que u_2 appartient à P.

Montrer que $f(P) \neq P$. En déduire que u_1 appartient à P.

d) Donner tous les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Q1 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}(-e_1 - e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_1 - e_2)$.

Ainsi $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(-e_1 - e_2 + e_3, e_1 - e_2)$ ou $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$.

$(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Notons que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(e_1 + e_2 - e_3) + \beta(e_1 - e_2) = 0_E$.

$(\alpha + \beta)e_1 + (\alpha - \beta)e_2 - \alpha e_3 = 0_E$. Comme (e_1, e_2, e_3) est libre : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \end{cases}$; ainsi $\alpha = \beta = 0$.

ceci achève de montrer que $(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$.

Finalement $(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$. $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle.

Observons que $f(e_2) = f(e_3)$. Alors $f(e_2 - e_3) = 0_E$. $e_2 - e_3$ est donc un élément non nul de la droite vectorielle $\operatorname{Ker} f$.

Ainsi $(e_2 - e_3)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

$(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et $(e_2 - e_3)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ donc pour montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E il suffit de prouver que la famille $\mathcal{B} = (e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2, e_2 - e_3)$ est une base de E.

$\mathcal{B}$ étant une famille de cardinal 3 et E étant de dimension 3, pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(e_1+e_2-e_3)+\beta(e_1-e_2)+\gamma(e_2-e_3)=0_E$.

Alors $(\alpha+\beta)e_1+(\alpha-\beta-\gamma)e_2+(-\alpha-\gamma)e_3=0_E$.

(e_1,e_2,e_3) étant libre : $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta-\gamma=0\\ -\alpha-\gamma=0\end{cases}$; $\begin{cases}\beta=-\alpha\\ \gamma=-\alpha\\ \alpha+\alpha+\alpha=0\end{cases}$; alors $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Ceci achève de montrer que 1) $\mathcal{B}$ est libre

2) $\mathcal{B}$ est une base de E

3) <u>Im f et Ker f sont supplémentaires dans E</u>.

Q2 $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(e_2+e_3)$ donc 0 est valeur propre de f et $SEP(f,0)=\operatorname{Vect}(e_2+e_3)$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $u=xe_1+ye_2+ze_3$ un élément de E.

$f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}(-1-\lambda)x+y+z=0\\ -x-(1+\lambda)y-z=0\\ x-\lambda z=0\end{cases}$

$f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda z\\ 0=-(1+\lambda)\lambda z+y+z=y+(-\lambda^2-\lambda+1)z\\ -(1+\lambda)z-(1+\lambda)y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda z\\ (1+\lambda)(z+y)=0\\ y=(\lambda^2+\lambda-1)z\end{cases}$

<u>1^{er} cas</u>.. $\lambda=-1$. $f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases}x=-z\\ y=-z\end{cases}$.

Alors -1 est valeur propre de f et $SEP(f,-1)=\operatorname{Vect}(e_1+e_2-e_3)$

<u>2^e cas</u>.. $\lambda\neq-1$ $f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda z\\ z+y=0\\ y=(\lambda^2+\lambda-1)z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda z\\ y=-z\\ -z=+(\lambda^2+\lambda-1)z\end{cases}$

$f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda z\\ y=-z\\ (\lambda+1)\lambda z=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$. $\uparrow \begin{cases}\lambda\neq0\\ \lambda\neq-1\end{cases}$

Alors λ n'est pas valeur propre de f.

<u>Finalement f admet deux valeurs propres 0 et -1.</u>

<u>De plus $SEP(f,0)=Vect(e_2-e_3)$ et $SEP(f,-1)=Vect(e_1+e_2-e_3)$.</u>

$\dim SEP(f,0)+\dim SEP(f,-1)=2\neq 3$! <u>f n'est pas diagonalisable.</u>

(Q3) a) Notons que $SEP(f,0)=Vect(u_1)$ et $SEP(f,-1)=Vect(u_2)$.

- Posons $D_1=Vect(u_1)$ et $D_2=Vect(u_2)$. D_1 et D_2 sont deux droites vectorielles de E.

  De plus $f(D_1)=f(Vect(u_1))=Vect(f(u_1))=Vect(0_E)=\{0_E\}\subset D_1$ et
  $f(D_2)=f(Vect(u_2))=Vect(f(u_2))=Vect(-u_2)=Vect(u_2)=D_2$.

  Ainsi D_1 et D_2 sont deux droites vectorielles de E stables par f. (1)

- Réciproquement soit D une droite vectorielle de E stable par f.

  $\exists u\in E$, $u\neq 0_E$ et $D=Vect(u)$.

  $u\in D$ (!) donc $f(u)\in D=Vect(u)$; $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $f(u)=\lambda u$.

  Or u n'est pas nul donc λ est une valeur propre de f et u est un vecteur propre associé.

  1er cas.. $\lambda=0$. Alors $u\in SEP(f,0)=D_1$. Comme u n'est pas nul et que D_1 est une droite vectorielle : $D_1=Vect(u)$.
  Ainsi $D_1=D$ .. ou $D=D_1$!

  2ième cas.. $\lambda=-1$ Alors $u\in SEP(f,-1)=D_2$. Comme u n'est pas nul et que D_2 est une droite vectorielle : $D_2=Vect(u)$.
  Alors $D=D_2$.

  Donc si D est une droite vectorielle stable par f : $D=D_1$ ou $D=D_2$ (2).

<u>(1) et (2) montrent que LES droites vectorielles stables par f sont</u>

<u>$D_1=Vect(u_1)=Vect(e_2-e_3)$ et $D_2=Vect(u_2)=Vect(e_1+e_2-e_3)$.</u>

b) $f(P_1) = f(\mathrm{Vect}(u_1,u_2)) = \mathrm{Vect}(f(u_1), f(u_2)) = \mathrm{Vect}(0_E, -u_2) = \mathrm{Vect}(-u_2) = \mathrm{Vect}(u_2) \subset P_1$.
P_1 est stable par f.

$f(\mathrm{Im} f) = f(f(E))$. Or $f(E) \subset E$ donc $f(f(E)) \subset f(E)$; $f(\mathrm{Im} f) \subset \mathrm{Im} f$.

$\mathrm{Im} f$ est stable par f ! Normal car plus simplement : $\forall x \in \mathrm{Im} f$, $f(x) \in \mathrm{Im} f$!!!

<u>P_1 et $\mathrm{Im} f$ sont stables par f.</u>

Remarque.. (u_1, u_2) est libre car u_1 et u_2 sont deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes. Ainsi P_1 est un plan vectoriel.

Nous avons également vu plus haut que $\mathrm{Im} f$ est un plan vectoriel.

<u>P_1 et $\mathrm{Im} f$ sont deux plans vectoriels stables par f.</u>

Ici c'est plus délicat mais c'est bien compris.

c) $P \cap P_2 \subset P_2$ donc $\dim P \cap P_2 \leq \dim P_2 = 2$.

Supposons $\dim P \cap P_2 = 0$. Alors $P \cap P_2 = \{0_E\}$. P et P_2 sont donc en somme directe. Ainsi $\dim(P + P_2) = \dim P + \dim P_2 = 4$ et $P + P_2$ est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension 3 !!

Ainsi $\dim P \cap P_2 \neq 0$

Supposons $\dim(P \cap P_2) = 2$.

Alors $P \cap P_2 \subset P_2$, $P \cap P_2 \subset P$, $\dim(P \cap P_2) = \dim P_2$ et $\dim(P \cap P_2) = \dim P$.

Ainsi $P \cap P_2 = P_2$ et $P \cap P_2 = P$. Alors $P_2 = P$!!

donc $\dim(P \cap P_2) \neq 2$

$\dim(P \cap P_2) \leq 2$, $\dim(P \cap P_2) \neq 0$ et $\dim(P \cap P_2) \neq 2$. Alors $\dim(P \cap P_2) = 1$.

<u>$P \cap P_2$ est une droite vectorielle.</u>

$P \cap P_2 \subset P$ et $P \cap P_2 \subset P_2$ donc $f(P \cap P_2) \subset f(P) \subset P$ et $f(P \cap P_2) \subset f(P_2) \subset P_2$. Alors $f(P \cap P_2) \subset P \cap P_2$.

<u>$P \cap P_2$ est une droite vectorielle stable par f.</u>

Alors $P \cap P_2 = D_1$ ou D_2.

Supposons $P \cap P_2 = D_1$. Alors $\operatorname{Ker} f = D_1 = P \cap P_2 \subset P = \operatorname{Im} f$. Ceci est impossible car $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

Finalement $P \cap P_2 = D_2$. $u_2 \in D_2 = P \cap P_2$; $\underline{\underline{u_2 \text{ appartient à } P}}$.

Montrons que $f(P) \neq P$.

Supposons $f(P) = P$. Alors $P = f(P) \subset f(E) = \operatorname{Im} f = P_2$.

Donc $P \subset P_2$ et $\dim P = \dim P_2 = 2$. Ainsi $P = P_2$!!

Par conséquent $\underline{\underline{f(P) \neq P}}$ ou $f(P) \subsetneq P$.

$f(P)$ est un sous-espace de P, distinct de P et P est de dimension 2.

Alors $\dim f(P) = 1$ ou 0.

Si $\dim f(P) = 0$ alors $f(P) = \{0_E\}$ donc $P \subset \operatorname{Ker} f$ et ainsi $2 = \dim P \leq \dim \operatorname{Ker} f$.

Or $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Ainsi $\dim f(P) \neq 0$. Alors $\dim f(P) = 1$.

$f(P)$ est une droite vectorielle que nous noterons Δ.

Soit (u,v) une base de P. $f(u) \in \Delta$, $f(v) \in \Delta$ et Δ est une droite vectorielle.

Par conséquent $(f(u), f(v))$ est nécessairement liée.

Ainsi $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f(u) + \beta f(v) = 0_E$ $\underline{\underline{\text{et}}}$ $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

Posons $w = \alpha u + \beta v$.

w n'est pas nul ($w = 0_E \Rightarrow \alpha u + \beta v = 0_E \overset{(u,v) \text{ libre}}{\Rightarrow} \alpha = \beta = 0$!) et

$f(w) = f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = 0_E$.

w est donc un vecteur non nul de la droite vectorielle $\operatorname{Ker} f$. Alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(w)$.

De plus $w = \alpha u + \beta v \in P$ car (u,v) est une base de P.

Ainsi $\operatorname{Vect}(u_1) = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(w) \subset P$. Par conséquent $\underline{\underline{u_1 \in P}}$.

$u_1 \in P$, $u_2 \in P$ et (u_1,u_2) est libre (... vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes). Comme P est de dimension 2, (u_1,u_2) est une base de P. Ainsi $P = \operatorname{Vect}(u_1,u_2)$. Par conséquent $\underline{\underline{P = P_1}}$.

Remarque.. Nous venons de voir que :

1°/ P_1 et P_2 sont stables par f ;

2°/ si P est un plan de E stable par f et distinct de P_2 alors $P = P_1$.

Ainsi les plans de E stables par f sont exactement P_1 et P_2 ; c'est à dire $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $\mathrm{Im} f$.

d) Notons que le seul sous-espace vectoriel de dimension 0 (resp. 3) de E est $\{0_E\}$ (resp. E) et il est stable par f.

Ainsi un sous-espace vectoriel de E est soit $\{0_E\}$, soit E, soit une droite vectorielle soit un plan vectoriel.

Il résulte de ce qui précède que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont : $\{0_E\}$, D_1, D_2, P_1, P_2 et E.

Rappelons que : $D_1 = \mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3)$, $D_2 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$, $P_1 = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3)$ et $P_2 = \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2)$.

PREMIER PROBLÈME

On note n un entier naturel, $n > 2$, $B = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, I l'identité de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

1. a) Exprimer $f \circ f$ en fonction de I et de n.
   b) En déduire que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, et calculer f^{-1} en fonction de f.

2. Écrire la matrice de f relativement à B.

3. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 5$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ; f est-il diagonalisable ?

4. On revient au cas général.
   a) Pour tout entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}]$ et tout réel λ, calculer $f(e_k + \lambda e_{n-k+1})$.
   b) Montrer que, pour chaque entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}[$, il existe deux réels distincts a_k et b_k, que l'on calculera, tels que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f. Examiner le cas où $2k = n + 1$.
   c) Montrer que f est diagonalisable.

Nous poserons $E = \mathbb{R}^n$ et $I = Id_E$

Message perso :

C'est encore pour toi mon Archag. Mais là je fais un gros effort. C'est de l'algèbre linéaire de Lyon !!
Faire ça est aussi jouissif que de sortir avec Arlette Chabaud. Bon, j'avale mon viagra et je m'y colle... pas à Arlette, à l'exo tu penses bien !
En plus c'est de la réduction ça peut pas faciliter la chose.

Q1 a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$ et $f(e_{n-k+1}) = 2^{n-k+1-1} e_{n-(n-k+1)+1}$

$f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$ et $f(e_{n-k+1}) = 2^{n-k} e_k$.

Alors $f^2(e_k) = 2^{k-1} f(e_{n-k+1}) = 2^{k-1} 2^{n-k} e_k = 2^{n-1} e_k = 2^{n-1} Id_E(e_k)$

Ainsi les deux endomorphismes f^2 et $2^{n-1} Id_E$ de E coïncident sur la base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E. Ils sont égaux. $\underline{\underline{f^2 = 2^{n-1} Id_E}}$.

b) $f^2 = 2^{n-1} Id_E$ donc $\left(\frac{1}{2^{n-1}} f\right) \circ f = f \circ \left(\frac{1}{2^{n-1}} f\right) = Id_E$.

Alors 1°) f est bijectif 2°) $f^{-1} = \frac{1}{2^{n-1}} f$.

<u>f est un isomorphisme de E, ce qui doit vaguement s'appeler un automorphisme de E</u>

$\underline{\underline{f^{-1} = \frac{1}{2^{n-1}} f}}$.

Q2 $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$

$$\begin{pmatrix} & (0) & & 2^{n-1} \\ & & \iddots & \\ & 2 & & (0) \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

Q3 $f^2 = 2^{5-1} Id_E$; $x^2 - 2^4$ est un polynôme annulateur de f.

Ainsi $Sp\, f \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 16 = 0\} = \{-4, 4\}$.

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 + ve_5$ un élément de E.

$$f(u) = 4u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 16v = 4x \\ 8t = 4y \\ 4z = 4z \\ 2y = 4t \\ x = 4v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4v \\ y = 2t \end{cases}$$

Alors $\underline{4 \in Sp\, f}$.

De plus $SEP(f,4) = \{4ve_1 + 2te_2 + ze_3 + te_4 + ve_5 ,\ (z,t,v) \in \mathbb{R}^3\}$

$SEP(f,4) = \{v(4e_1 + e_5) + t(2e_2 + e_4) + ze_3 ,\ (z,t,v) \in \mathbb{R}^3\}$

$\underline{SEP(f,4) = Vect(4e_1 + e_5,\ 2e_2 + e_4,\ e_3)}$.

Il est aisé de montrer que $(4e_1 + e_5,\ 2e_2 + e_4,\ e_3)$ est une famille libre de E.

Ainsi $(4e_1 + e_5,\ 2e_2 + e_4,\ e_3)$ est une base de $SEP(f,4)$ et $\dim SEP(f,4) = 3$.

$$f(u) = -4u \Leftrightarrow \begin{cases} 16v = -4x \\ 8t = -4y \\ 4z = -4z \\ 2y = -4t \\ x = -4v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4v \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Alors $\underline{-4 \in Sp\, f}$ et $SEP(f,-4) = \cdots = Vect(-4e_1 + e_5 ,\ -2e_2 + e_4)$.

$(-4e_1 + e_5 ,\ -2e_2 + e_4)$ est clairement libre.

Ainsi $(-4e_1 + e_5,\ -2e_2 + e_4)$ est une base de $SEP(f,-4)$ et $\dim SEP(f,-4) = 2$.

$Sp\, f = \{-4, 4\}$ et $\dim SEP(f,4) + \dim SEP(f,-4) = 3 + 2 = 5 = \dim E$.

Alors f est diagonalisable. $(4e_1 + e_5,\ 2e_2 + e_4,\ e_3)$ est une base de $SEP(f,4)$, $(-4e_1 + e_5,\ -2e_2 + e_4)$ est une base de $SEP(f,-4)$ et $E = SEP(f,4) \oplus SEP(f,-4)$ donc $B' = (4e_1 + e_5,\ 2e_2 + e_4,\ e_3,\ -4e_1 + e_5,\ -2e_2 + e_4)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $4, 4, 4, -4, -4$.

Ainsi $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & & & & (0) \\ & 4 & & & \\ & & 4 & & \\ & & & -4 & \\ (0) & & & & -4 \end{pmatrix}$. $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Notons que $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/8 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4 a) $k \in \mathbb{N} \cap [1, \frac{n+1}{2}]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(e_k + \lambda e_{n-k+1}) = 2^{k-1} e_{n-k+1} + \lambda 2^{n-k} e_k$$

b) Soit $k \in \mathbb{N} \cap [1, \frac{n+1}{2}[$. Soit λ un réel.

Notons que $e_k + \lambda e_{n-k+1}$ n'est pas le vecteur nul. Alors :

$e_k + e_{n-k+1}$ vecteur propre de f

$\Updownarrow$ $\exists \ \in \mathbb{R},\ f(e_k + \lambda e_{n-k+1}) = \gamma\,(e_k + \lambda e_{n-k+1})$

$\Updownarrow$ $\exists \gamma \in \mathbb{R},\quad 2^{k-1} e_{n-k+1} + \lambda 2^{n-k} e_k = \gamma e_k + \gamma \lambda e_{n-k+1}$

$\Updownarrow \leftarrow$ (e_k, e_{n-k+1}) est libre comme sous-famille d'une famille libre $\triangle$ $k \neq n-k+1$!

$\exists \gamma \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \lambda 2^{n-k} = \gamma \\ 2^{k-1} = \gamma \lambda \end{cases}$

$\Updownarrow$ $\exists \gamma \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \gamma = \lambda 2^{n-k} \\ \lambda^2 2^{n-k} = 2^{k-1} \end{cases}$

(*) $\Updownarrow$ ok ?!

$\lambda^2 = \dfrac{2^{k-1}}{2^{n-k}} = 2^{2k-1-n}$

$\Updownarrow$ $\lambda = \pm\ 2^{k - \frac{n+1}{2}}$.

(*) équivalence à établir à chaque étape.

Conclusion.. Il existe deux réels distincts $a_k = 2^{k - \frac{n+1}{2}}$ et $b_k = -2^{k - \frac{n+1}{2}}$ tels que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f.

Remarque.. Le premier est associé à la valeur propre $2^{\frac{n-1}{2}}$ et le second à la valeur propre $-2^{\frac{n-1}{2}}$.

$\triangle$ résulte de $\gamma = \lambda 2^{n-k}$.

Supposons que $2k = n+1$. Alors nécessairement n est impair.

Dans ce cas $e_k = e_{\frac{n+1}{2}}$ et $e_{n-k+1} = e_{n-\frac{n+1}{2}+1} = e_{\frac{n+1}{2}} = e_k$.

Donc $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1} = 2^{k-1} e_k = 2^{\frac{n+1}{2}-1} e_k = 2^{\frac{n-1}{2}} e_k$.

Si $2k = n+1$: e_k est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $2^{\frac{n-1}{2}}$.

b) 1er Cas.– n est impair. $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $n = 2p+1$. $n+1 = 2p+2$. et $\frac{n+1}{2} = p+1$.

Pour tout $k \in [\![1,p]\!] = [\![1, \frac{n+1}{2}[\![\cap \mathbb{N}$ notons P_k le plan vectoriel engendré par (e_k, e_{n-k+1}). Notons D_{p+1} la droite vectorielle engendrée par $e_{p+1} = e_{\frac{n+1}{2}}$.

"$(e_1, e_n) \cup (e_2, e_{n-1}) \cup \dots \cup (e_p, e_{p+2}) \cup (e_{p+1})$" est une base de E car elle se déduit de $(e_1, \dots, e_n)$ par une permutation des vecteurs de cette famille.

Alors $E = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_p \oplus D_{p+1}$.

Soit $k \in [\![1,p]\!]$, $\mathcal{B}_k = (e_k + a_k e_{n-k+1}, e_k + b_k e_{n-k+1})$ est une famille de deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes ; $\mathcal{B}_k$ est donc une famille libre de $P_k = \mathrm{Vect}(e_k, e_{n-k+1})$ constituée de vecteurs propres de f.

Comme $\dim P_k = 2$, $\mathcal{B}_k$ est une base de P_k constituée de vecteurs propres de f.

$\mathcal{B}_{p+1} = (e_{p+1})$ est clairement une base de D_{p+1} et e_{p+1} est un vecteur propre de f.

Comme $E = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_p \oplus D_{p+1}$, $\hat{\mathcal{B}} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$" $\cup \mathcal{B}_{p+1}$" est une base de E constituée de vecteurs propres de f. Alors f est diagonalisable.

Exercice de contrôle 1. Traiter le cas n pair.

C'est la même chose ... sauf qu'il n'y a pas D_{p+1} !

On pose $n = 2p$ et pour tout k dans $[\![1,p]\!]$ on considère le plan P_k engendré par e_k et e_{n-k+1}.

2.. Ecrire la matrice de f dans $\hat{\mathcal{B}}$ lorsque $n = 2p+1$

3.. Même chose si $n = 2p$.

Exercice 35 **L'endomorphisme $\varphi : \mathbf{M} \to \mathbf{AM} - \mathbf{MA}$** *Avec correction*

Q1 $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

a) Montrer que la famille $(E_i{}^tE_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ sont deux **bases** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Montrer que si i et j sont deux éléments de $[\![1,n]\!] : E_i{}^tE_j$ est combinaison linéaire de la famille $(X_p{}^tY_q)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$.

En déduire proprement et simplement que $(X_p{}^tY_q)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans la suite A est une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On pose, pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = AM - MA$.

Q2 Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q3 Soit X est un vecteur propre de A associé à la valeur λ et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur μ

a) Montrer que $X{}^tY$ est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $X{}^tY$ est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda - \mu$.

Q4 a) Montrer que toute valeur propre de A est une valeur propre de ${}^tA$. Comparer $\operatorname{Sp} A$ et $\operatorname{Sp}{}^tA$.

b) Montrer que ${}^tA$ est digonalisable (on pourra utiliser la semblablité... et retrouver les résultats de a) !)

Q5 a) Utiliser Q4 b), Q1 b) et Q3 b) pour montrer que φ est digonalisable.

b) Écrire le $\operatorname{Sp}\varphi$ avec les éléments de $\operatorname{Sp} A$. φ est-il un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Q1 a) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. Posons $E_i := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $E_j := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $x_\ell = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $y_\ell = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Notons que $E_i{}^tE_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $E_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et ${}^tE_j \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Posons $E_i{}^tE_j = (a_{p,q})_{\substack{1\leq p\leq n \\ 1\leq q\leq n}}$. $\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{p,q} = x_p y_q$

Ainsi $\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } (p,q) = (i,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j}$ est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_i{}^tE_j = E_{i,j}$.

Donc $(E_i{}^tE_j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$X{}^tY$ est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) $AX = \lambda X$ et ${}^tAY = \mu Y$. Alors $AX = \lambda X$ et ${}^tYA = {}^t({}^tAY) = \mu\,{}^tY$.

Ainsi $\varphi(X{}^tY) = AX{}^tY - X{}^tYA = (\lambda X){}^tY - X(\mu{}^tY) = (\lambda-\mu)(X{}^tY)$.

$X{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X{}^tY \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et $\varphi(X{}^tY) = (\lambda-\mu)X{}^tY$.

Alors $X{}^tY$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda-\mu$.

Q4 **a)** Soit λ une valeur propre de A.

$A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Ainsi ${}^tA - \lambda I_n = {}^t(A-\lambda I_n)$ n'est pas inversible.

Alors λ est valeur propre de ${}^tA$.

Toute valeur propre de A est une valeur propre de ${}^tA$.

Donc $\mathrm{Sp}\,A \subset \mathrm{Sp}\,{}^tA$

Mais alors $\mathrm{Sp}\,{}^tA \subset \mathrm{Sp}\,{}^t({}^tA)$ $\quad$ ($A := {}^tA$!!!) ; donc $\mathrm{Sp}\,{}^tA \subset \mathrm{Sp}\,A$.

Finalement $\mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\,{}^tA$.

b) A est diagonalisable. Il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $P^{-1}AP = D$.

Alors ${}^t(P^{-1}AP) = {}^tD$ donc ${}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1} = {}^tD = D$!

Posons $Q = {}^tP^{-1}$. P^{-1} étant inversible : Q est inversible

et $Q^{-1} = {}^t(P^{-1})^{-1} = {}^tP$

Alors $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1} = Q^{-1}\,{}^tA\,Q$.

Donc ${}^tA$ est semblable à la matrice diagonale D.

${}^tA$ est diagonalisable.

Remarque .. $\mathrm{Sp}\,{}^tA = \mathrm{Sp}\,D = \mathrm{Sp}\,A$; $\mathrm{Sp}\,{}^tA = \mathrm{Sp}\,A$.

On retrouve le résultat de a)

Notons que cette démonstration utilise le fait que A est diagonalisable mais pas celle de a) ...

b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$(X_1,\dots,X_n)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $E_i \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ donc $\exists (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$E_i = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p X_p$. De même $\exists (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $E_j = \sum_{q=1}^{n} \beta_q Y_q$.

Alors $E_i {}^tE_j = \left(\sum_{p=1}^{n} \alpha_p X_p\right) {}^t\left(\sum_{q=1}^{n} \beta_q Y_q\right) = \left(\sum_{p=1}^{n} \alpha_p X_p\right)\left(\sum_{q=1}^{n} \beta_q {}^tY_q\right)$

Donc $E_i {}^tE_j = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \alpha_p \beta_q X_p {}^tY_q$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_i {}^tE_j$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $(X_p {}^tY_q)_{\substack{1\le p\le n\\ 1\le q\le n}}$.

Alors $M_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left((E_i {}^tE_j)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}\right) \subset \mathrm{Vect}\left((X_p {}^tY_q)_{\substack{1\le p\le n\\ 1\le q\le n}}\right) \subset M_n(\mathbb{K})$

donc $M_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left((X_p {}^tY_q)_{\substack{1\le p\le n\\ 1\le q\le n}}\right)$. Alors la famille $(X_p {}^tY_q)_{\substack{1\le p\le n\\ 1\le q\le n}}$ est une famille génératrice de cardinal n^2 de $M_n(\mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2.

Ainsi $(X_p {}^tY_q)_{\substack{1\le p\le n\\ 1\le q\le n}}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$.

Q2 • $\forall M \in M_n(\mathbb{K})$, $AM - MA \in M_n(\mathbb{K})$; φ est une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$.

• Soit $(M,N) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\varphi(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda AM + AN - \lambda MA - NA = \lambda(AM - MA) + AN - NA = \lambda\varphi(M) + \varphi(N)$.

φ est donc linéaire.

φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.

Q3 a) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et ${}^tY \in M_{1,n}(\mathbb{K})$.

Ainsi $X{}^tY \in M_n(\mathbb{K})$. Mieux $X{}^tY = (x_i y_j)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$.

X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. ${}^tA$) donc $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}$ (resp. $Y \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}$)

Ainsi $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $x_{i_0} \neq 0$ et $\exists j_0 \in [\![1,n]\!]$, $y_{j_0} \neq 0$.

Alors $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$. $X{}^tY$ possède donc un coefficient non nul.

Q5 a) A (resp. ${}^tA$) est diagonalisable donc il existe une base $(X_1,\dots,X_n)$ (resp. $(Y_1,\dots,Y_n)$) de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A (resp. ${}^tA$) associées aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (resp. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$).

Alors 1) $(X_p{}^tY_q)_{\substack{1\le p\le n\\ 1\le q\le n}}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$ d'après Q 1 b

2) Pour tout (p,q) dans $[\![1,n]\!]^2$, $X_p{}^tY_q$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\alpha_p - \beta_q$ d'après Q 3 b

Alors $(X_p{}^tY_q)_{\substack{1\le p\le n\\ 1\le q\le n}}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de φ.

Ainsi $\underline{\underline{\varphi \text{ est diagonalisable}}}$.

b) 1) et 2) de a) permettent de dire que :

$$Sp\,\varphi = \{\alpha_i - \beta_j \;;\; (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}.$$

Or $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\} = Sp\,A = Sp\,{}^tA = \{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$.

Ainsi $\underline{\underline{Sp\,\varphi = \{\lambda - \mu \;;\; (\lambda,\mu) \in (Sp\,A)^2\}}}$.

Alors $\{\lambda - \lambda \;;\; \lambda \in Sp\,A\} \subset Sp\,\varphi$!!

Donc $\{0\} \subset Sp\,\varphi$. $0 \in Sp\,\varphi$

0 est valeur propre de φ. φ n'est pas injectif.

$\underline{\underline{\varphi \text{ n'est pas un automorphisme de } M_n(\mathbb{K})}}$.