Exercice 1 **Edhec 2011 ex1**

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, notée n ($n \in N^*$) et u un endomorphisme de E.

On note Id_E l'identité de E.

Si $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme suivant :

$P(u) = a_0 \ \mathrm{Id}_E + a_1 \, u + ... + a_p \, u^p$ où u^k est la composée $\underbrace{u \circ u \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$ ($u^0 = \mathrm{Id}_E$ par convention).

Dans toute la suite Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$.

Ainsi on peut écrire $Q(X) = (X-1)\, Q_1(X)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

Q1. Montrer que l'image de $(u - \mathrm{Id}_E)$ est contenue dans $\mathrm{Ker}(Q_1(u))$.

Q2. On note $E_1 = Ker(u - \mathrm{Id}_E)$.

a) Montrer que si $x \in E_1$ alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x$.

b) En déduire que $E_1 \cap \mathrm{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$.

c) En déduire l'aide du théorème du rang que $E = E_1 \oplus \mathrm{Ker}(Q_1(u))$.

Q3. Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u.

Q4. On suppose dans cette question que $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u ; on note E_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1.

Montrer que si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de E_1 est égale 2 ou égale 3).

---

1. $Q(X) = (X-1)\, Q_1(X) = Q_1(X)\,(X-1)$. Alors $Q(u) = Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id}_E)$.

Comme $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit y un élément de l'image de $u - \mathrm{Id}_E$. Il existe un élément x de E tel que $y = (u - \mathrm{Id}_E)(x)$.

Donc $Q_1(u)(y) = Q_1(u)\Big((u - \mathrm{Id}_E)(x)\Big) = \Big(Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id}_E)\Big)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$.

Ainsi y est dans le noyau de $Q_1(u)$.

$\forall y \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E),\ y \in \mathrm{Ker}\, Q_1(u)$.

$$\boxed{\text{L'image de } u - \mathrm{Id}_E \text{ est contenue dans } \mathrm{Ker}\, Q_1(u).}$$

Remarque C'est une bonne occasion pour redémontrer que si f et g sont deux endomorphismes de E :

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f.$$

On peut encore généraliser au cas où $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $g \in \mathcal{L}(E', E'')$.

2. (a) Soit x un élément de E_1. $(u - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$ donc $u(x) = x$.

Le programme de seconde année (voir I 2) a)) nous permet alors de dire que $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x$.

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est un élément de } E_1 \text{ alors } Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x.}$$

Remarque *Redonnons une preuve de ce que nous avons affirmé (à juste titre...) et même un peu plus.*

Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et $r+1$ réels a_0, a_1, ..., a_r tel que $Q_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$. $Q_1(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, u^k$.

Soient λ un réel et x un élément de E tel que $u(x) = \lambda\, x$. Un récurrence simple montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k\, x$.

Alors $Q_1(u)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, u^k(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k\, \lambda^k\, x = \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\, \lambda^k\right) x = Q_1(\lambda)\, x$.

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ u(x) = \lambda\, x \Rightarrow Q_1(u)(x) = Q_1(\lambda)\, x$.

(b) • Est-il vraiment utile de dire que E_1 et $\operatorname{Ker} Q_1(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E donc contiennent tous les deux 0_E et qu'ainsi $\{0_E\} \subset E_1 \cap \operatorname{Ker} Q_1(u)$?

• Soit x un élément de $E_1 \cap \operatorname{Ker} Q_1(u)$. $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x$ d'après **(a)** et $Q_1(u)(x) = 0_E$.

Donc $Q_1(1)\, x = 0_E$. Comme $Q_1(1) \neq 0$ il vient $x = 0_E$. Ceci achève de montrer que $E_1 \cap \operatorname{Ker} Q_1(u) \subset \{0_E\}$ Finalement

$$\boxed{E_1 \cap \operatorname{Ker} Q_1(u) = \{0_E\}.}$$

(c) $E_1 \cap \operatorname{Ker} Q_1(u) = \{0_E\}$ et E est de dimension finie. Donc pour montrer que E_1 et $\operatorname{Ker} Q_1(u)$ sont supplémentaires il ne reste plus qu'à montrer que $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E$.

$E_1 + \operatorname{Ker} Q_1(u)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\dim \big(E_1 + \operatorname{Ker} Q_1(u)\big) \leqslant \dim E$.

E_1 et $\operatorname{Ker} Q_1(u)$ sont en somme directe donc $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim \big(E_1 + \operatorname{Ker} Q_1(u)\big) \leqslant \dim E$.

Or $\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker} Q_1(u)$ donc $\dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \leqslant \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

On obtient alors $\dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Ou encore $\dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \leqslant \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Le théorème du rang appliqué à $u - \operatorname{Id}_E$ donne $\dim E = \dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E)$.

Alors $\dim E \leqslant \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Or nous avons vu que $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) \leqslant \dim E$. Donc $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E$.

Ceci achève de montrer la supplémentarité de E_1 et de $\operatorname{Ker} Q_1(u)$.

$$\boxed{E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} Q_1(u).}$$

3. Rappelons que $E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} Q_1(u)$. Donc $\dim E = \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

$\operatorname{Ker} Q_1(u)$ est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie donc $\operatorname{Ker} Q_1(u) = E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E$.

Alors : $Q_1(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} Q_1(u) = E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Ainsi : $Q_1(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \dim E_1 = 0 \Leftrightarrow E_1 = \{0_E\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) = \{0_E\} \Leftrightarrow$ 1 n'est pas valeur propre de u.

$$\boxed{Q_1(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de } u.}$$

4. Ici $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$ donc $Q_1 = (X+1)^2$. Supposons que E_1 est de dimension supérieure ou égale à deux et montrons que u est diagonalisable.

• Premier cas : $\dim E_1 = 2$.

$Q = (X-1)(X+1)^2$ est un polynôme annulateur de u dont les zéros sont 1 et -1. Alors les seules valeurs propres **possibles** de u sont 1 et -1.

$\dim E_1 = 2$ donc 1 est valeur propre de u et le sous-espace propre associé est de dimension 2. Montrons que -1 est également valeur propre de u.

$\dim \operatorname{Ker}\Big((u+\operatorname{Id}_E)^2\Big) = \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E - \dim E_1 = 3-2 = 1$. Alors $\operatorname{Ker}\Big((u+\operatorname{Id}_E)^2\Big)$ n'est pas réduit au vecteur nul donc $(u+\operatorname{Id}_E)^2$ est un endomorphisme de E non injectif.

Supposons que l'endomorphisme $u+\operatorname{Id}_E$ est injectif. Alors $(u+\operatorname{Id}_E)^2 = (u+\operatorname{Id}_E)\circ(u+\operatorname{Id}_E)$ est injectif comme composée de deux endomorphismes injectifs ce qui n'est pas. Donc $u+\operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif. Alors -1 est valeur propre de u.

Ainsi les valeurs propres de u sont 1 et -1. Notons E_{-1} le sous-espace propre de u associé à la valeur propre -1.

$\dim E_{-1} \geqslant 1$ et $\dim E_1 + \dim E_{-1} \leqslant \dim E = 3$. Comme $\dim E_1 = 2$ nécessairement $\dim E_{-1} = 1$.

Alors $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 3 = \dim E$ et u est diagonalisable.

• Deuxième cas : $\dim E_1 = 3$.

Alors $\dim E_1 = \dim E < +\infty$ donc $E_1 = E$. Ainsi $\operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}_E) = E$. Ceci donne : $u - \operatorname{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Par conséquent $u = \operatorname{Id}_E$ et u est diagonalisable !

Si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable.

Exercice 2 **Ecricome 2004 ex1**

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geqslant 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$. $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$!

On considère une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ distinctes deux à deux.

L'objet de l'exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S. Dans la dernière question on étudiera un contre-exemple.

Dans toute la suite k est un entier naturel impair fixé.

Q1 Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale (on expliquera la manière dont on construit P).

Q2 On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$f(T) = \big(T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \dots, , T(\lambda_n^k)\big)$$

a) Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :

$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1,\ U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \dots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n$$

Q3 Prouver que le polynôme R, défini par $R(X) = U(X^k) - X$ est un polynôme annulateur de D puis de S.

JF Ainsi $S = U(S^k)$.

Q4 Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, $\quad AS^{pk} = S^{pk}A$.

b) En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que : $\quad AS = SA$.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ On considère les deux matrices A et S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.

b) Montrer que A commute avec toute puissance paire de S, mais ne commute pas avec S.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ S est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes donc S est diagonalisable. Alors :

$$\boxed{\text{il existe une matrice inversible } P \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } P^{-1}SP \text{ soit une matrice diagonale } D.}$$

$\boxed{\textbf{Q2}}$ a) • Soient V et W deux éléments de E et α un réel.

$f(\alpha\, V + W) = \Big((\alpha\, V + W)(\lambda_1^k), (\alpha\, V + W)(\lambda_2^k), \dots, (\alpha\, V + W)(\lambda_n^k)\Big)$.

$f(\alpha\, V + W) = \Big(\alpha\, V(\lambda_1^k) + W(\lambda_1^k), \alpha\, V(\lambda_2^k) + W(\lambda_2^k), \dots, \alpha\, V(\lambda_n^k) + W(\lambda_n^k)\Big)$.

$f(\alpha\, V + W) = \alpha\, \Big(V(\lambda_1^k), V(\lambda_2^k), \dots, V(\lambda_n^k)\Big) + \Big(W(\lambda_1^k), W(\lambda_2^k), \dots, W(\lambda_n^k)\Big)$.

$f(\alpha\, V + W) = \alpha\, f(V) + f(W)$. f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^n$.

• Soit T un élément de $\operatorname{Ker} f$. $f(T) = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ T(\lambda_i^k) = 0$.

Rappelons alors que $x \to x^k$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car k est $\boxed{\text{impair}}$. Cette application est donc injective.

Les réels λ_1, λ_2, ..., λ_n étant deux à deux distincts il en est alors de même pour les réels λ_1^k, λ_2^k, ..., λ_n^k.

T est donc un polynôme de degré au plus $n-1$ qui a au moins n racines distinctes. Ainsi T est le polynôme nul.

Par conséquent $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et f est injective.

f est alors une application linéaire injective de E dans $\mathbb{R}^n$ et $\dim E = (n-1) + 1 = n = \dim \mathbb{R}^n < +\infty$ donc :

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de } E \text{ sur } \mathbb{R}^n.}$$

b) Soit T un élément de E.

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ T(\lambda_i^k) = \lambda_i \iff f(T) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \iff T = f^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{il existe un unique élément } U \text{ de } E \text{ tel que } \forall i \in [\![1, n]\!],\ U(\lambda_i^k) = \lambda_i\ ;\ U = f^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).}$$

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Montrons que $R(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, c'est à dire que $U(D^k) = D$.

Jouons la “difficulté” en reprenant la logique de la première question et en supposant que P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice diagonale D (et pas plus...).

Il existe alors un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Nous écrirons plus simplement $D = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

S et D sont semblables donc ont même spectre. Alors $\{\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n\} = \operatorname{Sp} D = \operatorname{Sp} S = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n\}$.

Il existe un élément $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $U = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u_i\, X^i$.

$$U(D^k) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i\,(D^k)^i = \sum_{i=0}^{n-1} u_i\, D^{ki} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}^{ki} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \begin{pmatrix} \alpha_1^{ki} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{ki} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n^{ki} \end{pmatrix}.$$

$$U(D^k) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u_i\,(\alpha_1^k)^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u_i\,(\alpha_2^k)^i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u_i\,(\alpha_n^k)^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(\alpha_1^k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U(\alpha_2^k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & U(\alpha_n^k) \end{pmatrix}.$$

Ainsi $U(D^k) = \mathrm{Diag}\big(U(\alpha_1^k), U(\alpha_2^k), \dots, U(\alpha_n^k)\big)$.

Pour montrer que $U(D^k) = D$ il ne reste plus qu'à montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ U(\alpha_i^k) = \alpha_i$.

Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. Il existe un élément j de $[\![1,n]\!]$ tel que $\alpha_i = \lambda_j$. Alors $U(\alpha_i^k) = U(\lambda_j^k) = \lambda_j = \alpha_i$.

Finalement $U(D^k) = \mathrm{Diag}\big(U(\alpha_1^k), U(\alpha_2^k), \dots, U(\alpha_n^k)\big) = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D$.

Donc $R(D) = U(D^k) - D = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{R \text{ est un polynôme annulateur de } D.}$$

Il existe un élément $(r_0, r_1, \dots, r_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $R = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} r_i\, X^i$.

Rappelons que $D = P^{-1}SP$ donc $S = PDP^{-1}$ et $\forall i \in \mathbb{N},\ S^i = PD^iP^{-1}$ (récurrence simple).

$$R(S) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i\, S^i = \sum_{i=0}^{n-1} r_i\, PD^iP^{-1} = P\left(\sum_{i=0}^{n-1} r_i\, D^i\right)P^{-1} = PR(D)P^{-1} = P0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

$$\boxed{R \text{ est un polynôme annulateur de } S.}$$

Q4 a) Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N},\ AS^{pk} = S^{pk}A$.

• L'égalité est vraie pour $p = 0$ car dans ce cas $S^{pk} = I_n$.

• Supposons l'égalité vraie pour p dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$AS^{pk} = S^{pk}A$. En multipliant à droite par S^k il vient $AS^{pk}S^k = S^{pk}AS^k$ ou $AS^{(p+1)k} = S^{pk}AS^k$.

En remarquant que $AS^k = S^kA$ on obtient : $AS^{(p+1)k} = S^{pk}S^kA = S^{(p+1)k}A$ ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ AS^{pk} = S^{pk}A.}$$

b) Rappelons que $U = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u_p\, X^p$ et que $U(S^k) - S = R(S) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $S = U(S^k) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u_p\,(S^k)^p = \sum_{p=0}^{n-1} u_p\, S^{pk}$.

Alors $AS = AU(S_k) = A\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u_p\, S^{pk}\right) = \sum_{p=0}^{n-1} u_p\, AS^{pk} = \sum_{p=0}^{n-1} u_p\, S^{pk}A = \left(\sum_{p=0}^{n-1} u_p\, S^{pk}\right)A = U(S^k)A = SA$.

$$\boxed{A \text{ et } S \text{ commutent.}}$$

Q5 a) Observons que $S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; alors 1 est valeur propre de S.

De même $S\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; -1 est valeur propre de S.

Notons que 1 et -1 sont alors LES valeurs propres de S car S est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{S \text{ possède deux valeurs propres distinctes.}}$$

b) $S^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$. Alors $\forall r\in\mathbb{N},\ S^{2r}=(S^2)^r=I_2^r=I_2$. Il est alors clair que :

$$\boxed{A \text{ commute avec toute puissance paire de } S.}$$

$AS=\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&2\end{pmatrix}$ et $SA=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$. Alors $AS\neq SA$ et ainsi :

$$\boxed{A \text{ ne commute pas avec } S.}$$

Exercice 3 **EDHEC 2005 ex 1**

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1 On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr})=\mathbb{R}$.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

c) Etablir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})\oplus\mathrm{Vect}(I)$.

Q2 Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M)=M+\mathrm{tr}(M)I$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f.

En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q3 Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M)=M+\mathrm{tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle. On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Etablir que le polynôme X^2-2X+1 est un polynôme annulateur de g.

b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

c) g est-il diagonalisable ?

---

1) a) $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est de dimension 1. Alors $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}$ est de dimension 0 ou 1.

Or $\mathrm{tr}(I)=n\neq 0_{\mathbb{R}}$ donc $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}$ n'est pas égal à $\{0_{\mathbb{R}}\}$ et ainsi sa dimension n'est pas 0.

Par conséquent $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}$ est de dimension 1. Ainsi $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\subset\mathbb{R}$ et $\dim\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}=1=\dim\mathbb{R}$. Il en résulte que :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}=\mathbb{R}.}$$

b) Le théorème du rang donne alors $\dim\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}=\dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R})-\dim\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}=n^2-1$.

$$\boxed{\dim\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}=n^2-1.}$$

c) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, pour montrer que les deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$ et $\mathrm{Vect}(I)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}\cap\mathrm{Vect}(I)=\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et que

$\dim \operatorname{Ker} \operatorname{tr} + \dim \operatorname{Vect}(I) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le second point est clair car $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$, $\dim \operatorname{Ker} \operatorname{tr} = n^2 - 1$ et $\dim \operatorname{Vect}(I) = 1$ (puisque I n'est pas la matrice nulle). Montrons le premier point.

Soit M un élément commun à $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ et à $\operatorname{Vect}(I)$. $\operatorname{tr}(M) = 0$ et il existe un réel α tel que $M = \alpha\, I$.

Alors $0 = \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(\alpha\, I) = \alpha\, \operatorname{tr}(I) = \alpha\, n$. Comme n n'est pas nul, α l'est nécessairement.

Ainsi $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ceci achève de montrer que $\operatorname{Ker} \operatorname{tr} \cap \operatorname{Vect}(I) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

Cela achève également de montrer que $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect}(I)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \operatorname{tr} \oplus \operatorname{Vect}(I).}$$

2) a) • Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\operatorname{tr}(M)$ est un réel et I est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $f(M) = M + \operatorname{tr}(M)\, I$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire de deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

f est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel. Rappelons que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$f(\lambda\, M + N) = \lambda\, M + N + \big(\operatorname{tr}(\lambda\, M + N)\big)\, I = \lambda\, M + N + \big(\lambda \operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(N)\big)\, I = \lambda\, \big(M + \operatorname{tr}(M)\, I\big) + \big(N + \operatorname{tr}(N)\, I\big)$.

Ainsi $f(\lambda\, M + N) = \lambda\, f(M) + f(N)$.

f est donc une application linéaire. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

b) *Version 1* • $\forall M \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr},\ f(M) = M + \operatorname{tr}(M)\, I = M$.

• Soit M un élément de $\operatorname{Vect}(I)$. Il existe un réel α tel que $M = \alpha\, I$.

$f(M) = \alpha\, f(I) = \alpha\big(I + \operatorname{tr}(I)\, I\big) = \alpha\,(1+n)\, I = (n+1)(\alpha\ I) = (n+1)\, M$.

Ainsi $\forall M \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr},\ f(M) = M$ et $\forall M \in \operatorname{Vect}(I),\ f(M) = (n+1)\, M$.

$\mathcal{B}_2 = (I)$ est base de $\operatorname{Vect}(I)$. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$.

$\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect}(I)$ étant supplémentaires, en concaténant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans laquelle f a pour matrice la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ oui de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$!

Ainsi f est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et $n+1$.

De plus 0 n'est pas valeur propre de f donc f est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Finalement f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont 1 et $n+1$.

Version 2 Cherchons les valeurs propres de f.

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ un réel.

Il existe un unique élément (M_1, α) de $\operatorname{Ker} \operatorname{tr} \times \mathbb{R}$ tel que $M = M_1 + \alpha\, I$.

$f(M) = f(M_1 + \alpha\, I) = f(M_1) + \alpha\, f(I) = M_1 + \operatorname{tr}(M_1)\, I + \alpha\big(I + \operatorname{tr}(I)\, I\big) = M_1 + \alpha\,(1+n)\, I = M_1 + \alpha\,(n+1)\, I$.

$f(M) = \lambda M \iff M_1 + \alpha\,(n+1)\,I = \lambda\,M_1 + \lambda\,\alpha\,I.$

Or M_1 et $\lambda\,M_1$ sont deux éléments de $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$, $\alpha(n+1)\,I$ et $\lambda\,\alpha\,I$ sont deux éléments de $\operatorname{Vect}(I)$, et $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect}(I)$ sont en somme directe. Alors :

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} M_1 = \lambda\,M_1 \\ \alpha\,(n+1)\,I = \lambda\,\alpha\,I \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)\,M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ \alpha\,((n+1)-\lambda)\,I = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \end{cases}.$$

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} (1-\lambda)\,M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ \alpha\,((n+1)-\lambda) = 0 \end{cases}$$

• <u>Premier cas</u> Supposons $\lambda = 1$. $f(M) = \lambda\,M \iff \alpha\,n = 0 \iff \alpha = 0 \iff M \in \operatorname{Ker}\operatorname{tr}$.

Comme $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ n'est pas réduit au vecteur nul, 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$.

• <u>Deuxième cas</u> Supposons $\lambda \neq 1$.

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ \alpha\,((n+1)-\lambda) = 0 \end{cases}.$$

Si $\lambda \neq n+1$, $f(M) = \lambda\,M \iff M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\alpha = 0 \iff M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et λ n'est pas valeur propre de f.

Si $\lambda = n+1$, $f(M) = \lambda\,M \iff M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \iff M \in \operatorname{Vect}(I)$; alors $\lambda = n+1$ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est $\operatorname{Vect}(I)$.

Finalement f admet deux valeurs propres 1 et $n+1$, et les deux sous-espace propres respectivement associés sont $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect}(I)$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}\operatorname{tr} \oplus \operatorname{Vect}(I)$, f est diagonalisable.

De plus 0 n'est pas valeur propre de f donc f est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme diagonalisable de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et ses valeurs propres sont } 1 \text{ et } n+1.}$$

3) a) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$g\big(g(M)\big) = g(M) + \operatorname{tr}\big(g(M)\big)\,J = M + \operatorname{tr}(M)\,J + \operatorname{tr}\big(M + \operatorname{tr}(M)\,J\big)\,J = M + \operatorname{tr}(M)\,J + \big(\operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(M)\,\operatorname{tr}(J)\big)\,J.$

$g\big(g(M)\big) = M + 2\,\operatorname{tr}(M)\,J$ car $\operatorname{tr}(J) = 0$. Alors $g\big(g(M)\big) = 2\,M + 2\,\operatorname{tr}(M)\,J - M = 2\,g(M) - \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M)$.

$g\big(g(M)\big) - 2\,g(M) + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $\big(g \circ g - 2\,g + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\big)(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\big(g \circ g - 2\,g + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\big)(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$; $g \circ g - 2\,g + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.

$$\boxed{X^2 - 2\,X + 1 \text{ est un polynôme annulateur de } g.}$$

b) $X^2 - 2\,X + 1$ est un polynôme annulateur de g dont l'unique racine est 1. Ainsi la seule valeur propre possible de g est 1.

Or $J \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $g(J) = J + \operatorname{tr}(J)\,J = J$ donc 1 est bien une valeur propre de g.

$$\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } g.}$$

c) Supposons que g soit diagonalisable. Comme 1 est la seule valeur propre de g, le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ de g associé à la valeur propre 1 est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g(M) = M$. En particulier $g(I) = I$ donc $I + \operatorname{tr} I\,J = I$. par conséquent $\operatorname{tr} I\,J = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Comme $\operatorname{tr} I$ n'est pas nulle, J est nulle ce qui contredit l'hypothèse. Finalement :

$$\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Remarque *On pouvait également observer que le sous-espace propre de* g *associé à la valeur propre* 1 *est* $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ *qui n'est pas égal à* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 **EDHEC 2006 ex 1**

Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note id (respectivement θ) l'endomorphisme identité (respectivement l'endomorphisme nul) du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^m$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{C}^m$ vérifiant : $(f-\lambda_1\, id)\circ(f-\lambda_2\, id)=\theta$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes distincts.

Q1. a) Vérifier que $\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\big((f-\lambda_1\, id)-(f-\lambda_2\, id)\big)=id.$

b) En déduire que : $\mathbb{C}^m=\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)\oplus\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$.

c) Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amené à étudier trois cas).

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2=-I$, où I désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent 1.

Q2. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^2=-I$.

Q3 Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2=-I$.

a) Utiliser la première question pour montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont i et $-i$.

b) Pour toute matrice $M=(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$.

On note E_i et E_{-i} les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres i et $-i$.

Montrer que $X\in E_i\iff\overline{X}\in E_{-i}$.

c) En déduire que, si $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ est une base de E_i, alors $(\overline{u_1},\overline{u_2},\dots,\overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i}.

Conclure que $\dim E_i=\dim E_{-i}$.

d) Établir enfin le résultat demandé.

---

1 a) $\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((f-\lambda_1\, id)-(f-\lambda_2\, id)\Big)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big(f-\lambda_1\, id-f+\lambda_2\, id\Big)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((\lambda_2-\lambda_1)\, id\Big)=id.$

$$\boxed{\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((f-\lambda_1\, id)-(f-\lambda_2\, id)\Big)=id.}$$

b) Montrons que $\mathbb{C}^m$ est somme directe de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)$ et de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$.

• Soit x un élément de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)\cap\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$. $f(x)=\lambda_1\, x$ et $f(x)=\lambda_2\, x$.

Alors $(\lambda_2-\lambda_1)\, x=\lambda_2\, x-\lambda_1\, x=f(x)-f(x)=0_{\mathbb{C}^m}$. Comme λ_1 et λ_2 sont distincts, $\lambda_2-\lambda_1$ n'est pas nul et ainsi x est nul. Ceci achève de montrer que $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)\cap\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)=\{0_{\mathbb{C}^m}\}$.

Ainsi $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)$ et $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$ sont en somme directe.

• $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)$ et $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^m$ donc $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)+\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$ est contenu dans $\mathbb{C}^m$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de $\mathbb{C}^m$. $x=id(x)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((f-\lambda_1\, id)-(f-\lambda_2\, id)\Big)(x)$.

Ainsi $x=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(f-\lambda_2\, id)(x)+\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(f-\lambda_1\, id)(x)$.

Posons $x_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,(f - \lambda_2\, id)\,(x)$ et $x_2 = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\,(f - \lambda_1\, id)\,(x)$. On a $x = x_1 + x_2$.

Montrons alors que $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

$(f - \lambda_1\, id)(x_1) = (f - \lambda_1\, id)\left(\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,(f - \lambda_2\, id)\,(x)\right) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\Big((f - \lambda_1\, id) \circ (f - \lambda_2\, id)\Big)(x).$

Donc $(f - \lambda_1\, id)(x_1) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,\theta(x) = 0_{\mathbb{C}^m}$ et ainsi $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$.

Observons que $\theta = (f-\lambda_1\, id)\circ(f-\lambda_2\, id) = f^2-\lambda_2\, f-\lambda_1\, f+\lambda_1\,\lambda_2\, id = f^2-\lambda_1\, f-\lambda_2\, f+\lambda_2\,\lambda_1\, id = (f-\lambda_2\, id)\circ(f-\lambda_1\, id)$.
Par conséquent : $(f - \lambda_2\, id) \circ (f - \lambda_1\, id) = \theta$. Alors :

$(f - \lambda_2\, id)(x_2) = (f - \lambda_2\, id)\left(\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\,(f - \lambda_1\, id)\,(x)\right) = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big((f - \lambda_2\, id) \circ (f - \lambda_1\, id)\Big)(x).$

Donc $(f - \lambda_2\, id)(x_2) = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\,\theta(x) = 0_{\mathbb{C}^m}$ et alors $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Ainsi $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) + \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Ceci achève de montrer que $\mathbb{C}^m \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) + \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Par conséquent $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) + \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$. Comme $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$ sont en somme directe :

$$\boxed{\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id).}$$

c) $(f - \lambda_1\, id) \circ (f - \lambda_2\, id) = \theta$ donc $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ est un polynôme annulateur de f dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont λ_1 et λ_2. Ainsi λ_1 et λ_2 sont les seules valeurs propres possibles de f. Autrement dit : $\mathrm{Sp}\, f \subset \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Rappelons que λ_1 (resp. λ_2) est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ (resp. $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$) n'est pas réduit au vecteur nul. Envisageons alors trois cas.

Cas 1 : f est distinct de $\lambda_1\, id$ et $\lambda_2\, id$.

Si $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ est réduit au vecteur nul alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id) = \mathbb{C}^m$ car $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Ainsi $f - \lambda_2\, id = \theta$ donc $f = \lambda_2\, id$ ce qui n'est pas.

Si $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$ est réduit au vecteur nul alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) = \mathbb{C}^m$ car $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Ainsi $f - \lambda_1\, id = \theta$ donc $f = \lambda_1\, id$ ce qui n'est pas.

Donc $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$ ne sont pas réduits au vecteur nul. Alors λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de f. Mieux λ_1 et λ_2 sont les (seules) valeurs propres de f.

Or $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$, donc f est diagonalisable.

Cas 2 : f coïncide avec $\lambda_1\, id$. Alors f est diagonalisable et λ_1 est sa seule valeur propre.

Cas 3 : f coïncide avec $\lambda_2\, id$. Alors f est diagonalisable et λ_2 est sa seule valeur propre.

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est distinct de } \lambda_1\, id \text{ et de } \lambda_2\, id \text{ alors } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont les (seules) valeurs propres de } f.}$$

$$\boxed{\text{Si } f = \lambda_1\, id \text{ (resp. } f = \lambda_2\, id\text{) alors } \lambda_1 \text{ (resp. } \lambda_2\text{) est la seule valeur propre de } f.}$$

2) $(i\, I)^2 = i^2\, I = -I$! !

$$\boxed{A = i\, I \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}) \text{ telle que } A^2 = -I.}$$

3 a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n+1}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^{2n+1}$ est A.

Posons $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = (A - i\,I)(A + i\,I) = A^2 - (i\,I)^2 = A^2 - i^2\,I = A^2 + I = 0_{\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})}$ (car A et $i\,I$ commutent...).

Ainsi $(f - \lambda_1\,id) \circ (f - \lambda_2\,id) = \theta$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Q1, appliquée pour $m = 2n+1$, montre alors que f est diagonalisable.

A est alors diagonalisable en tant que matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$.

A est une matrice à coefficients réels donc A ne vaut ni $i\,I$ ni $-i\,I$. Donc f n'est ni $\lambda_1\,id$ ni $\lambda_2\,id$. Ainsi λ_1 et λ_2 sont les (seules) valeurs propres de f. Alors i et $-i$ sont LES valeurs propres de A.

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}) \text{ et } i \text{ et } -i \text{ sont ses valeurs propres.}}$$

b) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})$. $X \in E_i \iff AX = i\,X \iff \overline{AX} = \overline{iX} \iff \overline{A}\,\overline{X} = -i\,\overline{X}$.

Or A appartient à $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ donc $\overline{A} = A$. Ainsi $X \in E_i \iff A\,\overline{X} = -i\,\overline{X} \iff \overline{X} \in E_{-i}$.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est un élément de } \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) : X \in E_i \iff \overline{X} \in E_{-i}.}$$

c) Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de E_i.

u_1, u_2, ..., u_p sont des éléments de E_i donc d'après ce qui précède, $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille d'éléments de E_{-i}. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ un élément de $\mathbb{C}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\,\overline{u_k} = 0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}$.

Alors $0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})} = \overline{0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}} = \overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\,\overline{u_k}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k\,\overline{u_k}} = \sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k}\,u_k$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k}\,u_k = 0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}$.

Comme la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre : $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\overline{\alpha_k} = 0$.

En conjuguant on obtient : $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_k = 0$. Ceci achève de montrer que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre d'éléments de E_{-i}.

$$\boxed{\text{Si } (u_1, u_2, \dots, u_p) \text{ est une base de } E_i \text{ alors } (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p}) \text{ est une famille libre d'éléments de } E_{-i}.}$$

Soit p la dimension de E_i et soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de E_i.

$(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre d'éléments de E_{-i} donc $\dim E_{-i} \geqslant p = \dim E_i$.

Bien évidemment on peut montrer de la même manière que $\dim E_i \geqslant \dim E_{-i}$ et ainsi obtenir l'égalité entre $\dim E_i$ et $\dim E_{-i}$.

Reprenons plutôt une base $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de E_i et montrons que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une base de E_{-i}.

Il ne reste plus qu'à montrer que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille génératrice de E_{-i}.

Soit u un élément de E_{-i}. $\overline{u}$ appartient E_i car $\overline{\overline{u}} = u$ appartient à E_{-i} !

Donc il existe un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\overline{u} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\,u_k$.

En conjuguant on obtient $u = \overline{\overline{u}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k}\,\overline{u_k}$.

Ainsi tout élément de E_{-i} est combinaison linéaire de la famille $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$.

Ceci achève de montrer que cette famille est une famille génératrice de E_{-i}.

Étant libre c'est une base de E_{-i}. Alors $\dim E_{-i} = p = \dim E_i$.

$$\boxed{\dim E_i = \dim E_{-i}.}$$

d) A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et i et $-i$ sont ses valeurs propres.

Ainsi $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = E_i \oplus E_{-i}$. Alors $2n+1 = \dim \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = \dim E_i + \dim E_{-i} = 2 \dim E_i$.

$2n+1$ n'étant pas un multiple de deux un léger doute nous envahit...

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice de } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}) \text{ dont le carré est } -I.}$$

Exercice 5 **Ecricome 1999 ex 2**

Q1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que les valeurs propres de M sont 1 et 2 et déterminer les sous-espaces propres associés.

b) M est-elle diagonalisable ?

On se propose de calculer M^n pour tout entier naturel n.

Q2. Soit H et H' deux matrices réelles carrées d'ordre 4 écrites sous forme de blocs :

$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $O = (\,0 \quad 0 \quad 0\,)$, $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $A = (\,a_{i,j}\,)_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$

$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix}$ avec $O = (\,0 \quad 0 \quad 0\,)$, $C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $A' = (\,a'_{i,j}\,)_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$

Vérifier que le produit HH' s'écrit sous forme de blocs : $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ où $C'' = C + AC'$.

Q3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe une matrice colonne U_n à 3 lignes telle que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$ où V est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4. *Calcul de V^n*

On pose $W = V - 2I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

Pour tout entier naturel n, calculer W^n et écrire explicitement la matrice V^n.

Q5. *Calcul de U_n.*

a) Soit X la matrice colonne représentant dans la base canonique l'unique vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, dont la première composante vaut 1.

Calculer MX puis M^nX.

b) On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire du 5 a) les valeurs de a_n, b_n et c_n.

Exercice 2

Q1 Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in M_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$MX=X \Leftrightarrow \begin{cases} x=x\\ -x+4y+z-2t=y\\ 2x+y+2z-t=z\\ x+2y+z=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+3y+z-2t=0\\ 2x+y+z-t=0\\ x+2y+z-t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 & (L_3-L_2)\\ 5y+2z-3t=0 & (L_2+L_3)\\ x+2y+z-t=0 & L_3\end{cases}$$

$$MX=X \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\\ 5y+2z-3t=0\\ 3y+z-t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\\ y+t=0 & 2L_3-L_2\\ z=t-3y\end{cases} . \quad MX=X \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\\ t=-y=-x\\ z=-x-3x=-4x\end{cases}$$

Ainsi $\{X\in M_{4,1}(\mathbb{R}) \mid MX=X\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$.

1 est valeur propre de M et $SEP(M,1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$$MX=2X \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x\\ -x+4y+z-2t=2y\\ 2x+y+2z-t=2z\\ x+2y+z=2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ 2y+z-2t=0\\ y=t\\ 2y+z-2t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ t=y\\ z=0\\ 0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z=0\\ y=t\end{cases}$$

2 est valeur propre de M et $SEM(M,2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Cherchons l'ensemble des valeurs propres de M. 1 et 2 sont des valeurs propres de M. Prenons donc λ dans $\mathbb{R}-\{1,2\}$ et cherchons une réduite de Gauss de $M-\lambda I$ avec "le pivot".

$$M-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0&0\\-1&4-\lambda&1&-2\\2&1&2-\lambda&-1\\1&2&1&-\lambda\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&4-\lambda&1&-2\\2&1&2-\lambda&-1\\1&2&1&-\lambda\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4-\lambda&1&-2\\0&1&2-\lambda&-1\\0&2&1&-\lambda\end{pmatrix}$$

$L_1\leftarrow\frac{1}{1-\lambda}L_1 \quad (\lambda\neq1)$; $L_2\leftarrow L_2+L_1$; $L_3\leftarrow L_3-2L_1$; $L_4\leftarrow L_4-L_1$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&1&2-\lambda&-1\\0&4-\lambda&1&-2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&3-2\lambda&-2+\lambda\\0&0&\lambda-2&-(\lambda-2)^2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&3-2\lambda&\lambda-2\\0&0&1&-(\lambda-2)\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&1&-(\lambda-2)\\0&0&3-2\lambda&\lambda-2\end{pmatrix}$$

$L_4\leftrightarrow L_2$; $L_3\leftarrow 2L_3-L_2$; $L_4\leftarrow 2L_4-(4-\lambda)L_2$; $L_4\leftarrow\frac{1}{\lambda-2}L_4$; $L_4\leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2+(3-2\lambda)(\lambda-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 0 & -2(\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - (3-2\lambda)L_3$

Comme λ n'est pas 2 cette dernière matrice est inversible.

Ainsi si λ est distinct de 1 et 2, $M - \lambda I$ est inversible.

Par conséquent <u>1 et 2 sont les seules valeurs propres de M.</u>

Comme $\dim SEP(M,1) + \dim SEP(M,2) = 1+1 = 2 \neq 4$: <u>M n'est pas diagonalisable.</u>

<u>Remarque</u>.. M n'est ni diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ni diagonalisable dans $\mathbb{C}$!

Q2 $HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c'_1 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ c'_2 & a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ c'_3 & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 + \sum_{k=1}^{3} a_{1k}c'_k & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}a'_{k3} \\ c_2 + \sum_{k=1}^{3} a_{2k}c'_k & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}a'_{k3} \\ c_3 + \sum_{k=1}^{3} a_{3k}c'_k & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}a'_{k3} \end{pmatrix}$

désolé je préfère pour $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}$

Or $C'' = C + AC' = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1k}c'_k \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2k}c'_k \\ \sum_{k=1}^{3} a_{3k}c'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + \sum_{k=1}^{3} a_{1k}c'_k \\ c_2 + \sum_{k=1}^{3} a_{2k}c'_k \\ c_3 + \sum_{k=1}^{3} a_{3k}c'_k \end{pmatrix}$

et $AA' = \left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{kj} \right)$

Dès lors <u>$HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ avec $O = (0\ 0\ 0)$ et $C'' = C + AC'$</u>

Q3 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists U_n \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$

C'est clair pour $n=1$ (prendre $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_1 & V \end{pmatrix} \underset{\underset{Q2}{\uparrow}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^n U_1 & V^n V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^n U_1 & V^{n+1} \end{pmatrix}$$

Posons $U_{n+1} = U_n + V^n U_1$.

$U_{n+1} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_{n+1} & V^{n+1} \end{pmatrix}$; ceci achève la récurrence.

Remarques 1.. En posant $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a encore $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_0 & V^0 \end{pmatrix}$

2.. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique élément U_n de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$

Q4 $W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $W^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$W^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in [\![3, +\infty[\![$, $W^n = 0$.

$V = \underset{\text{m.}}{W} + 2I$ et W et $2I$ commutent par conséquent :

$$V^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k W^k (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_n^k W^k$$

Supposons $n \geq 2$. $V^n = \sum_{k=0}^{2} 2^{n-k} C_n^k W^k = 2^n I + 2^{n-1} n W + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} W^2$ car $W^k = 0$ pour $k > 2$.

$V^n = 2^n I + n 2^{n-1} W + n(n-1) 2^{n-3} W^2$. Notons que ceci vaut encore pour $n=0$ et $n=1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V^n = 2^n I + n 2^{n-1} W + n(n-1) 2^{n-3} W^2$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 0 & -n2^{n-1} \\ 2n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2n2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n(n-1)2^{n-3} & 0 & -n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ n(n-1)2^{n-3} & 0 & -n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V^n = \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (-n+1)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

Q5 a) $SEP(\Pi, 1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$ ainsi $X = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

$\Pi X = X$ et une récurrence évidente donne $\forall n \in \mathbb{N},\ \Pi^n X = X$.

b) Posons $T = \begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{pmatrix}1\\T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix} = X = \Pi^n X = \begin{pmatrix}1 & 0\\ U_n & V^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ U_n + V^n T\end{pmatrix}$$

mcatière à calculer par bloc !

Donc $T = U_n + V^n T$; $U_n = T - V^n T$. Ainsi

$a_n = 1 - [(n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} - 4n2^{n-1} + n2^n + n(n-1)2^{n-3}] = 1 - 2^n - n(n-1)2^{n-2}$

$b_n = -4 - [n2^{n-1} - 4 \times 2^n + n2^{n-1}] = -4 + 2^{n+2} - n2^n$

$c_n = -1 - [n2^n + n(n-1)2^{n-3} - 4n2^{n-1} - (-n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3}] = -1 + 2^n - n(n-1)2^{n-2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^{(*)},\quad \begin{cases} a_n = 1 - 2^n - n(n-1)2^{n-2} \\ b_n = -4 + 2^{n+2} - n2^n \\ c_n = -1 + 2^n - n(n-1)2^{n-2} \end{cases}$$