LES BONS COUPS DE BILI-NÉAIRE THE KID

POUR AMÉLIORER TON EUCLIDIENNE ATTITUDE

Dans la suite, sauf mention du contraire, $< .,. >$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et $\|.\|$ est la norme associée.

Niveau 1

C 1 $E = \mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$\boxed{< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

C 2 $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\boxed{< X, Y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = {}^tXY = {}^tYX.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

C 3 $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de E, on pose :

$$\boxed{< A, B >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, b_{ij} = \mathrm{tr}({}^tA \times B).}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur E. C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

C 4 $E = \mathbb{R}_n[X]$. Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\, X^k$ sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\boxed{< P, Q >= \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_k.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

C 5 p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$. $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux familles d'éléments de E.

$(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux familles d'éléments de $\mathbb{R}$. Alors :

$$\boxed{< \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j\, y_j >= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i\, \mu_j \;< x_i, y_j >.}$$

C 6 **Inégalité de Cauchy-Schwarz** x et y sont deux éléments de E.

1. $\boxed{|< x,y >| \leqslant \|x\|\,\|y\|}$ et $\boxed{(< x,y >)^2 \leqslant \|x\|^2\,\|y\|^2.}$

2. $|< x,y >| = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si (x,y) est liée.

C 7 **Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$**

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.} \qquad \boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.}$$

C 8 **Inégalité de Cauchy-Schwarz dans "$\mathcal{C}([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbb{R})$"**

Soit f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$.

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}.}$$

$$\boxed{\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.}$$

C 9 • $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

• $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

• $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkovski).

C 10 x et y sont deux éléments de E.

1. $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $x = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ y = \lambda\, x$.

2. $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $y = 0_E$ ou $\exists \lambda' \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda'\, y$.

C 11 $\forall (x,y) \in E^2,\ \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

• $\forall (x,y) \in E^2,\ \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

C 12 1. Si x est un vecteur non nul de E, $\dfrac{1}{\|x\|}\,x$ est un vecteur unitaire de E.

2. Un droite vectorielle de E contient exactement deux vecteurs unitaires qui sont opposés.

C 13 **Identités remarquables** x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x,y > + \|y\|^2.} \qquad \boxed{\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x,y > + \|y\|^2.}$$

$$\boxed{< x+y, x-y > = \|x\|^2 - \|y\|^2.}$$

C 14 **Identités remarquables** x_1, x_2, ..., x_p sont p éléments de E.

$$\boxed{\|x_1 + x_2 + \cdots + x_p\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} < x_i, x_j >}$$

C 15 **Identités de polarisation** x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{< x, y >= \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right].} \qquad \boxed{< x, y >= \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right].}$$

$$\boxed{< x, y >= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right].}$$

C 16 **Identités du parrallélogramme** x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2.}$$

C 17 **Théorème de Pythagore**. x et y sont deux éléments de E.

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

C 18 Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille d'éléments de E deux à deux orthogonaux :

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

C 19 1. $E^\perp = \{0_E\}$. Autrement dit un vecteur de E est nul si et seulement il appartient à $E^\perp$.

2. $\{0_E\}^\perp = E$.

C 20 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
- $F \subset F^{\perp\perp}$.
- $F \subset G$ donne $G^\perp \subset F^\perp$.
- Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$.
- F et G sont orthogonaux $\iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$.

C 21 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E respectivement engendrés par $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_q)$.

P 1. $F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, u_i >= 0\}$.

P 2. F et G sont orthogonaux si et seulement si : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!],\ < u_i, v_j >= 0$.

C 22 F et G sont deux sous-espaces d'un espace préhilbertien réel E.

- $\boxed{(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp}$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
- Si E **est de dimension finie** : $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

C 23 Soit F un sous-espace vectoriel d'un **espace vectoriel euclidien** E.

- $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$ et $\boxed{F^{\perp\perp} = F}$.
- $F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F.

• G est un sous-espace vectoriel de E. $G = F^{\perp}$ si et seulement G est un (ou le...) supplémentaire de F dans E orthogonal à F.

C 24 • L'ensembles des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

• L'ensembles des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ si $n \geqslant 1$.

• Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right) + \dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$, $\dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$ est une matrice symérique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$ est une matrice antisymérique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

C 25 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour le produit scalaire canonique, l'orthogonale du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et le sous-espace vectoriel des matrices anti-symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\bigoplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

C 26 1. Toute famille orthogonale constituée de vecteurs **non nuls** est libre.

2. Toute famille orthonormée est libre.

C 27 Tout espace vectoriel **euclidien** possède une base orthonormée.

C 28 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **base orthonormée** de E. Soit x un élément de E.

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > \, e_k}.$$

C 29 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **base orthonormée** de E. Soient x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans cette base. Soient X et Y les matrices de x et y dans $\mathcal{B}$.

$$\boxed{< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k = {}^tXY =< X, Y >.} \qquad \boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{{}^tXX} = \|X\|.}$$

C 30 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel réel E.

1. Il existe un produit scalaire $< .,. >$ sur E et un seul qui rend la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ orthonormée.

2. $\forall x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \, e_k \in E,\ \forall y = \sum_{k=1}^{n} y_k \, e_k \in E,\ < x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k.$

3. Dans les espaces vectoriels réels usuels, le produit scalaire canonique est celui qui rend la base canonique orthonormée.

C 31 **Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée**

$\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est une base **orthonormée** de l'espace vectoriel euclidien $(E,<.,.>)$ et f est un endomorphisme de E. $(E_1,E_2,\ldots,E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\big(<e_i,f(e_j)>\big)$.

$\boxed{\textbf{C 32}}$ **Matrice orthogonale** P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) P orthogonale.

i') P vérifie $P\,{}^tP={}^tPP=I_n$.

ii) P vérifie $P\,{}^tP=I_n$.

iii) P vérifie ${}^tPP=I_n$.

iv) P est inversible et son inverse est sa transposée.

v) $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\|=\|X\|$ $\quad$ ($\|.\|$ est la norme euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

vi) Les colonnes de P constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

vii) Les colones de P constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

viii) Les lignes de P constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

ix) Les lignes de P constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

$\boxed{\textbf{C 33}}$ Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,\ldots,e'_n)$ $\boxed{\textbf{deux bases orthonormées}}$ de E.

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

$\boxed{\textbf{C 34}}$ Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,\ldots,e'_n)$ une **famille** d'éléments de E.

Soit P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si P est une matrice orthogonale.

$\boxed{\textbf{C 35}}$ 1. Le produit de deux matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. L'inverse d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textbf{C 36}}$ Les seules valeurs propres possibles dans $\mathbb{R}$ d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont -1 et 1.

$\boxed{\textbf{C 37}}$ F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E distinct de $\{0_E\}$ et E.

Si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de F et $\mathcal{B}''$ est une base orthonormée de $F^\perp$ alors $\mathcal{B}'\cup\mathcal{B}''$ est une base orthonormée de E.

$\boxed{\textbf{C 38}}$ F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E distinct de $\{0_E\}$ et de E. Soit $(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ une base orthonormée de F.

1. $(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ se complète en une base orthonormée $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ de E.

2. $F^\perp$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_{p+1},e_{p+2},\ldots,e_n)$. Mieux $(e_{p+1},e_{p+2},\ldots,e_n)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.

$\boxed{\textbf{C 39}}$ $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est une base $\boxed{\textbf{orthonormée}}$ de E. a_1, a_2, ..., a_n sont n réels non tous nuls.

1. L'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$ est l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

2. L'orthogonal de l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est la droite vectorielle engendrée par $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$.

C 40 **Aspect théorique de l'orthonormalisation de Schmidt**

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base **quelconque** de E.

Il existe une base **orthonormée** de E et une seule $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ telle que pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$:

1. $\mathrm{Vect}(w_1, w_2, \ldots, w_k) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.
2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

$(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ est LA base orthonormée déduite de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par le procédé d'**orthonormalisation de Schmidt**.

C 41 **Aspect pratique de l'orthonormalisation de Schmidt**

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base quelconque de E.

► Pour construire cette base orthogonale $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ à partir de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ on procède de la manière suivante.

• On pose $v_1 = u_1$.

• Supposons que l'on ait construit $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ famille orthogonale de E telle que :
$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$ $(k \in [\![1, n-1]\!])$.

On construit alors v_k. Pour cela on pose $v_k = u_k + \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\, v_{k-1}$.

En écrivant que v_k est orthogonal à v_i on calcule λ_i pour tout i dans $[\![1, k-1]\!]$.

On obtient alors $v_k = u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{< v_i, v_i >}\, v_i = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{\|v_i\|^2}\, v_i$.

► On pose $\forall k \in [\![1, n]\!],\ w_k = \dfrac{1}{\|v_k\|}\, v_k$. $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ est l'unique base orthonormée de E telle que :

1. $\mathrm{Vect}(w_1, w_2, \ldots, w_k) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.
2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

C 42 F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. p_F est la projection orthogonale sur F. Si x et y sont deux éléments de E :

$$\boxed{p_F(x) = y \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases} \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F,\ < x - y, z >= 0 \end{cases}}$$

C 43 F est un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est **une base orthonormée de F**.

p_F est la projection orthogonale sur F. Pour tout élément x de E :

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, u_k >\ u_k}$$

C 44 E est un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B}$ est une **base orthonormée** de E.

F est un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est **une base orthonormée** de F.

Pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, U_k est la matrice de u_k dans la base $\mathcal{B}$. p_F est la projection orthogonale sur F.

Alors la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} U_k\,{}^tU_k$, donc $\boxed{M_{\mathcal{B}}(p_F)=\displaystyle\sum_{k=1}^{p} U_k\,{}^tU_k}$.

C'est un "+" du programme 2014.

C 45 D est une droite vectorielle de E et p_D est la projection orthogonale sur D.

Si u est **un vecteur unitaire de D**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_D(x)=<x,u>u.}$

Si u **est un vecteur non nul de D**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_D(x)=\dfrac{<x,u>}{\|u\|^2}\,u}$.

C 46 E est un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. H est un hyperplan de E et p_H est la projection orthogonale sur H.

Si u est **un vecteur unitaire orthogonal à H**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_H(x)=x-<x,u>u}$.

Si u est **un vecteur non nul orthogonal à H**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_H(x)=x-\dfrac{<x,u>}{\|u\|^2}\,u}$.

C 47 D est une droite vectorielle de E et s_D est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à D.

Si u est **un vecteur unitaire de D**, pour tout élément x de E : $\boxed{s_D(x)=2<x,u>u-x.}$

C 48 E est un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. H est un hyperplan de E et s_H est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à H.

Si u est **un vecteur unitaire orthogonal à H**, pour tout élément x de E : $\boxed{s_H(x)=x-2<x,u>u}$.

C 49 **Recherche pratique d'une projection orthogonale** $(E,<.,.>)$ est un espace vectoriel euclidien (ou un préhilbertien....).

F est un sous-espace vectoriel de E et p_F est la projection orthogonale sur F. $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ est une base **quelconque** de F.

x est un élément de E. Pour trouver $p_F(x)$ on peut :

M1 • Utiliser $p_F(x)\in F$ et $x-p_F(x)\in F^\perp$ (resp. $p_F(x)\in F$ et $\forall z\in F,\ <x-p_F(x),z>=0$).

M2 • Construire une base orthonormée $(w_1,w_2,\dots,w_p)$ de F et utiliser : $p_F(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}<x,w_k>\,w_k$.

M3 • Poser $p_F(x)=\sum\limits_{k=1}^{p} x_k\,u_k$. On cherche alors $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ en écrivant que $x-p_F(x)$ est orthogonal à F donc à tous les éléments de la base $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ de F. On obtient rapidement :

$$\forall i\in[\![1,p]\!],\ <x,u_i>=<p_F(x),u_i>=\sum_{k=1}^{p}<u_k,u_i>\,x_k=\sum_{k=1}^{p}<u_i,u_k>\,x_k.$$

Ceci donne un système linéaire de p équations à p inconnues que l'on résout.

Ce système s'écrit matriciellement $AX=B$ où $A=(<u_i,u_j>)$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}<x,u_1>\\<x,u_2>\\\vdots\\<x,u_p>\end{pmatrix}$.

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (A est la matrice de la restriction du produit scalaire à F dans la base $(u_1,u_2,\dots,u_p)$). Le système admet donc une solution et une seule (ce qui n'est pas un scoop...).

► Ne pas oublier de regarder au préalable si F est un hyperplan. Dans ce cas on détermine $p_{F^\perp}$ ($F^\perp$ est une droite vectorielle...) et on utilise $p_F = \mathrm{Id}_E - p_{F^\perp}$.

C 50 **Théorème de meilleure approximation**

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel **euclidien** E et p_F (resp. $p_{F^\perp}$) la projection orthogonale sur F (resp. $F^\perp$).

Soit x un élément de E.

1. • $\forall z \in F,\ \|x - p_F(x)\| \leqslant \|x - z\|$.

   • Si t est un élément de F tel que : $\forall z \in F,\ \|x - t\| \leqslant \|x - z\|$ alors $t = p_F(x)$.

2. Autrement dit $\underset{z\in F}{\mathrm{Min}}\,\|x - z\|$ existe et vaut $\|x - p_F(x)\|$. De plus $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

$p_F(x)$ est donc l'unique élément de F tel que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

La projection orthogonale de x sur F est **la meilleure approximation** de x par un élément de F.

3. $d^2(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - < x, p_F(x) >= \|p_{F^\perp}(x)\|^2$.

C 51 La formulation du programme... **Caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la norme.**

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel **euclidien** E et p_F la projection orthogonale sur F.

x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{y = p_F(x) \Longleftrightarrow y \in F \text{ et } \|x - y\| = \underset{z\in F}{\mathrm{Inf}}\,\|x - z\|} \text{ ou } \boxed{y = p_F(x) \Longleftrightarrow y \in F \text{ et } \|x - y\| = \underset{z\in F}{\mathrm{Min}}\,\|x - z\|.}$$

C 52 **Méthode des moindres carrés.**

A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que **le rang de A est p**.

$\|.\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique.

1. $\underset{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\mathrm{Min}}\,\|AX - B\|$ existe.
2. Il existe un unique élément X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\| = \underset{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\mathrm{Min}}\,\|AX - B\|$.
3. ${}^tAA$ est inversible.
4. $X_0 = ({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$ ou ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

C 53 **Caractérisations des matrices symétriques**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $< .,. >$ est le produit scalaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < AX, Y >=< X, {}^tAY >$.

2. Les assertions suivantes sont équivalentes.

   i) A est symétrique.

   ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < AX, Y >=< X, AY >$.

   iii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYAX = {}^tXAY$.

C 54 **Caractérisation des endomorphismes symétriques**

E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E et f un endomorphisme de E.

f est symétrique si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, < f(e_i), e_j > = < e_i, f(e_j) >$.

C 55 **Caractérisation fondamentale des endomorphismes symétriques**

E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormée** de E et f un endomorphisme de E.

f est un endomorphisme symétrique de E si et seulement si sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique (${}^tA = A$).

C 56 L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Si E est de dimension n non nul, l'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

C 57 Si f est un endomorphisme symétrique et bijectif de E, f^{-1} est un endomorphisme symétrique (et bijectif) de E.

C 58 f est un endomorphisme **symétrique** de E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, $F^{\perp}$ est stable par f.

C 59 Soit f un endomorphisme symétrique de l'espace préhilbertien E .

- $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux.
- $\boxed{(\operatorname{Im} f)^{\perp} = \operatorname{Ker} f}$ et $\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

C 60 Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel **euclidien** E.

- $(\operatorname{Im} f)^{\perp} = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.
- $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires et orthogonaux.

C 61 **Caractérisations des projections orthogonales again**

1. p est une projection (ou un projecteur) de E.

p est une projection orthogonale (ou un projecteur orthogonal) si et seulement p est un endomorphisme symétrique.

2. p est un endomorphisme de E (ou une application de E dans E...).

p est une projection orthogonale de E si et seulement si p est un endomorphisme symétrique de E vérifiant $p \circ p = p$.

3. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si A est symétrique et vérifie $A^2 = A$.

C'est un "+" du programme 2014.

C 62 Soit f un endomorphisme symétrique de E.

1. Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

2. Si $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors la famille $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est une famille orthogonale de E.

C 63 **Le théorème fondamental sur la réduction des endomorphismes symétriques.**

Soit f un endomorphisme symétrique de E **espace vectoriel euclidien de dimension finie non nulle**.

1. f est diagonalisable.

2. Mieux, il existe une base **orthonormée** de E constituée de vecteurs propres de f (donc f se diagonalise dans une base orthonormée).

C 64 A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Les valeurs propres de A sont réelles ($\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A$).

2. Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

3. Si $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors la famille $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille orthogonale $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

C 65 **Le théorème fondamental sur la réduction des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$.**

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est diagonalisable.

2. Mieux, il existe une base **orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

3. Il existe une matrice **orthogonale** P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonale.

C 66 **L'aspect pratique de la réduction des endomorphismes symétriques**

f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n non nulle.

On obtient une base **orthonormée** de E constituée de vecteurs propres de f en concatenant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de f.

C 67 **L'aspect pratique de la réduction des matrices symétriques**

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On obtient une base **orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

- P est une matrice orthogonale.
- ${}^tPAP = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

C 68 Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

$$\boxed{A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, X_k\, {}^tX_k}$$

C 69 1. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ telle que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$.

On note, pour tout j élément de $[\![1,n]\!]$, C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.

Alors $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

2. **Variante** $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A = PD^tP$.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et les colonnes de P constituent une base othonormée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

C 70 **Décomposition spectrale d'une matrice symétrique.**

S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont ses valeurs propres distinctes.

Pour tout élément k de $[\![1,p]\!]$ on note P_k la matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale f_k de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur le sous-espace propre SEP (S, λ_k) de S associé à la valeur propre λ_k.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k = I_n$ et que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, P_k$.

C 71 **Matrice symétrique positive**

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

C 72 **Matrice symétrique définie positive**

Soit une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont strictement positives.

Niveau 2

C 73 **Encadrement de Rayleigh** Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit α sa plus petite valeur propre et soit β sa plus grande valeur propre.

- $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \alpha\,\|X\|^2 \leqslant {}^tXSX =< SX, X >\leqslant \beta\,\|X\|^2$ ou

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ \alpha \leqslant \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leqslant \beta}.$$

- Mieux : $\displaystyle\operatorname*{Min}_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \alpha$ et $\displaystyle\operatorname*{Max}_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \beta$.
- Si X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha\,\|X\|^2 = {}^tXSX =< SX, X >\Longleftrightarrow X \in$ SEP (A, α).
- Si X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX =< SX, X >= \beta\,\|X\|^2 \Longleftrightarrow X \in$ SEP (A, β).

C 74 **Matrice symétrique positive again**

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

iii) Il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

C 75 Matrice symétrique définie positive again

Soit une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont strictement positives.

iii) Il existe une matrice **inversible** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

C 76 Adjoint d'un endomorphisme

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormée** de l'espace vectoriel euclidien E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

f^* est l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ dans $\mathcal{B}$.

1. f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y > = < x, f^*(y) >$. **$\mathbf{f^*}$ est l'adjoint de f.**
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.
3. $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$ et $\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.
4. $(f^*)^* = f^{**} = f$.
5. Si f est un automorphisme, f^* est également un automorphisme et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
6. Si g est un second endomorphisme de $E : (\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f+g)^* = f^* + g^*$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
7. $\operatorname{Sp} f^* = \operatorname{Sp} f$. $\forall \lambda \in \operatorname{Sp} f,\ \dim \operatorname{SEP}\ (f, \lambda) = \dim \operatorname{SEP}\ (f^*, \lambda)$. f et f^* sont simultanément diagonalisables.
8. $\operatorname{Ker}(f^* \circ f) = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}(f \circ f^*) = \operatorname{Im} f$.
9. $f \circ f^*$ (resp. $f^* \circ f$) est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont positives.

C 77 Endomorphisme orthogonal

• f est un endomorphisme d'un espace préhilbertien E.

f est **un endomorphisme orthogonal** si $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) > = < x, y >$ autrement dit si f conserve le produit scalaire.

• f est **une application** d'un espace préhilbertien E dans lui même. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est un endomorphisme orthogonal.
2. f est un endomorphisme vérifiant $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) > = < x, y >$.
3. f vérifie $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) > = < x, y >$.

Notons que 3. donne la linéarité de f.

• f est un endomorphisme d'un espace préhilbertien E.

f est un endomorphisme orthogonal si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x)\| = \|x\|$ autrement dit si et seulement si f conserve la norme.

• f est un endomorphisme orthogonal d'un espace préhilbertien E.

1. f est injectif (mais pas nécessairement surjectif).
2. Si F est un sous espace vectoriel de E stable par f, $F^\perp$ est stable par f.
3. Si g est un second endomorphisme orthogonal de E, $g \circ f$ est un endomorphisme orthogonal de E.
4. Les seules valeurs propres (réelles ! !) possibles de f sont -1 et 1.

• f est un endomorphisme orthogonal d'un espace vectoriel **euclidien** E.

f est un automorphisme de E et f^{-1} est un automorphisme orthogonal de E.

• f est un endomorphisme d'un espace vectoriel **euclidien** E de de dimension n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est un endomorphisme orthogonal.

ii) Il existe une base orthonormée de E qui se transforme par f en une base orthonormée de E.

iii) Toute base orthonormée de E se transforme par f est une base orthonormée de E.

• f est un endomorphisme d'un espace vectoriel **euclidien** E et A est la matrice de f dans une base **orthonormée** de E.

f est un endomorphisme orthogonal si et seulement si A est une matrice orthogonale.

• On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et on considère un endomorphisme f orthogonal dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est notée A. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \in [-1,1]} \quad \text{et} \quad \boxed{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n} \quad \text{et} \quad \boxed{n \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.}$$

C 78 **Racine carrée symétrique et positive (resp. définie positive) d'une matrice symétrique et positive (resp. définie positive) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

Si S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles (resp. strictement positives), il existe une matrice symétrique T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles (resp. strictement positives) et une seule telle que $T^2 = S$.

C 79 **Matrice d'un produit scalaire**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel euclidien E.

• La matrice $A = (< e_i, e_j >)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **la matrice du produit scalaire** $< ., . >$.

• Si x et y sont deux éléments de E de matrices X et Y dans $\mathcal{B}$, $< x, y >= {}^tXAY$.

• A est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.

• Si A' est la matrice de $< ., . >$ dans $\mathcal{B}'$ et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $A' = {}^tPAP$.

• Une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire si et seulement si elle est symétrique à valeurs propres strictement positives.

C 80 Caractérisation des projections orthogonales again.

Soit p une projection (ou un projecteur) de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) p est une projection orthogonale.

ii) $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

C 81 **Base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ déduite de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. a) Pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, il existe un polynôme normalisé (le coefficient du terme de plus haut degré est 1) P_k et un seul appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ et orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

2. On pose $P_0 = 1$.

a) Pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, P_k est de degré k.

b) $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. On pose $\forall k \in [\![0, n]\!],\ Q_k = \dfrac{1}{\|P_k\|}\, P_k$.

a) $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Mieux, $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est la base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ déduite de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

C 82 **Réalisation de la distance d'un vecteur à un sous-espace dans un espace préhilbertien**

E est un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. x est un élément de E et y un élément de F.

1. Il existe au plus un élément de y de F tel que : $\|x - y\| = \operatorname*{Inf}_{z \in F} \|x - z\|$.

2. Soit y un élément de F. $\|x - y\| = \operatorname*{Inf}_{z \in F} \|x - z\|$ si et seulement si $x - y$ est orthogonale à F.

C 83 **Décomposition polaire d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$.**

A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Il existe une matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice symétrique S à valeurs propres positives ou nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = US$.

2. On suppose A **inversible**.

Il existe une unique matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice symétrique S à valeurs propres strictement positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. C'est **la décomposition polaire** de A.

C 84 **Décomposition d'Iwasawa d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$.**

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.

C 85 **Décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive**.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives (A est définie positive).

Il existe une matrice R, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure à diagonale strictement positive et une seule telle que $A = {}^t R R$.

C 86 **Théorème de Courant-Fischer.**

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $(E'_1, E'_2, \ldots, E'_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

k est un élément de $[\![1,n]\!]$ et $\mathcal{F}_k$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k.

$$\boxed{\underset{F\in\mathcal{F}_k}{\mathrm{Min}}\ \underset{\substack{X\in F\\ X\neq 0}}{\mathrm{Sup}}\ \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}=\lambda_k} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\underset{F\in\mathcal{F}_{n+1-k}}{\mathrm{Max}}\ \underset{\substack{X\in F\\ X\neq 0}}{\mathrm{Inf}}\ \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}=\lambda_k.}$$

C 87 **Endomorphisme antisymétrique**.

$(E,<\ ,\ >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle n.

f est un endomorphisme de E. $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base **orthonormée** de E et $A=(a_{ij})$ est la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

On dit que f est un endomorphisme **antisymétrique** si $\forall (x,y)\in E^2,\ <f(x),y>=-<x,f(y)>$.

1. a) f est antisymétrique si et seulement si $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ <f(e_i),e_j>=-<e_i,f(e_j)>$.

b) f est antisymétrique si et seulement si A est symétrique autrement dit si et seulement si ${}^tA=-A$.

2. f est antisymétrique si et seulement si $\forall x\in E,\ <x,f(x)>=0$.

Dans la suite f est un endomorphisme antisymétrique de E.

3 a) $\mathrm{Ker}\, f=(\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$.

b) $\mathrm{Sp}\, f\subset\{0\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)\subset\{0\}$.

c) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\subset i\mathbb{R}$.

d) $f\circ f$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont négatives ou nulles.

e) Si F est un sous-espace vectoriel stable par f, $F^{\perp}$ est également stable par f.

4. Il existe une base orthonormé de E telle que la matrice de f dans cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & (O) & \\ & & & 0 & -a_p & & & \\ & & & a_p & 0 & & & \\ & (O) & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

à quelques abus près...

C 88 **Une caractérisation des normes euclidiennes**

Une norme sur un espace vectoriel réel est la norme d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.
