PARTIE I

(Q1) clairement la fonction nulle appartient à E.

Soient $(f,g)\in E^2$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. $f+g$ et αf sont des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*, \exists p\in\mathbb{N}, \exists A\in\mathbb{R}_+, \forall t\in[A,+\infty[, |f(t)|\leq\lambda t^p$;

$\exists\mu\in\mathbb{R}_+^*, \exists q\in\mathbb{N}, \exists B\in\mathbb{R}_+, \forall t\in[B,+\infty[, |g(t)|\leq\mu t^q$;

Posons $C=\max(\underline{1},A,B)$, $\delta=\max(\lambda,\mu)$ et $r=\max(p,q)$.

$\forall t\in[C,+\infty[$, $|f(t)+g(t)|\leq|f(t)|+|g(t)|\leq\lambda t^p+\mu t^q\leq\delta(t^p+t^q)\leq 2\delta t^r$

$\uparrow$ $\underline{t\geq 1}$ car $C\geq 1$

$2\delta>0$, $r\in\mathbb{N}$, $C\in\mathbb{R}_+$ et $\forall t\in[C,+\infty[$, $|(f+g)(t)|\leq 2\delta t^r$

ceci achève de montrer que : $\underline{f+g\in E}$.

$\forall t\in[A,+\infty[$, $|(\alpha f)(t)|\leq|\alpha|\lambda t^p\leq(|\alpha|+1)\lambda t^p$ ← pour avoir une constante strictement positive.

$(|\alpha|+1)\lambda>0$, $p\in\mathbb{N}$, $A\geq 0$ et $\forall t\in[A,+\infty[$, $|(\alpha f)(t)|\leq(|\alpha|+1)\lambda t^p$

ceci achève de prouver que : $\underline{\alpha f\in E}$.

Finalement $\underline{E \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications (continues) de } \mathbb{R}^+ \text{ dans } \mathbb{R}}$.

(Q2) Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $f\in E$. $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $f_n(t)=u_n(t)f(t)=t^nf(t)$.

f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*, \exists p\in\mathbb{N}, \exists A\in\mathbb{R}_+, \forall t\in[A,+\infty[, |f(t)|\leq\lambda t^p$

$\forall t\in[A,+\infty[$, $|f_n(t)|\leq\lambda t^nt^p=\lambda t^{n+p}$

ceci achève de montrer que $\underline{f_n\in E}$.

$u_n=\hat{h}\,u_n$ où $\hat{h}$ est l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\hat{h}(t)=1$!

$\hat{h}\in E$ ($\hat{h}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t\in[0,+\infty[$, $|\hat{h}(t)|\leq 1\times t^0$) ; d'après ce qui précède $\hat{h}u_n$ est élément de E. Par conséquent : $\underline{u_n\in E}$.

Soit ℓ une application polynomiale de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

$\exists r\in\mathbb{N}$, $\exists(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbb{R}^{r+1}$ tels que : $\ell=\sum_{k=0}^{r}\alpha_k u_k$

$u_0, u_1, \dots, u_r$ sont des éléments de E et E est un espace vectoriel, par conséquent $h = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k u_k$ appartient à E.

Q3 clairement h est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

$h(t)$ $\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2} = h(0)$, h est continue en 0.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $h'(t) = \frac{1}{t^4}\left[\sin t \times t^2 - (1-\cos t)\times 2t\right] = \frac{1}{t^3}\left[t \sin t - 2 + 2\cos t\right]$

h' est continue en tout point de $]0,+\infty[$; h est C^1 sur $]0,+\infty[$.

cherchons $\lim_{t\to 0^+} h'(t)$.

$t\sin t - 2 + 2\cos t = t^2 - 2 + 2\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) + o(t^3)$ car $\sin t = t + o(t^2)$ donc $t\sin t = t^2 + o(t^3)$ et $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$.

$t\sin t - 2 + 2\cos t = o(t^3)$

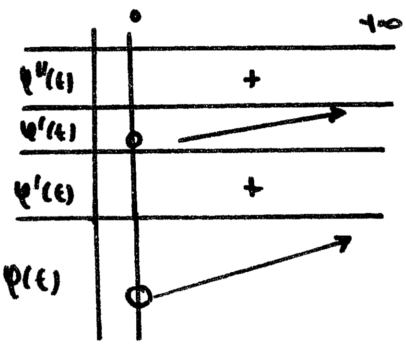
ceci signifie exactement que : $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^3}\left[t\sin t - 2 + 2\cos t\right]\right) = 0$; $\lim_{t\to 0^+} h'(t) = 0$

1°.. h est continue sur $[0,+\infty[$
2°.. h est C^1 sur $]0,+\infty[$
3°.. $\lim_{t\to 0^+} h'(t) = 0$

donc h est C^1 sur $[0,+\infty[$ d'après le théorème de la limite de la dérivée.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(t) = t - \sin t$; φ' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi''(t) = 1 - \cos t \geq 0$



φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(0) = 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) \geq 0$

Par conséquent : $1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$ pour tout t dans $[0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2} \leq \frac{1}{2}$. $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{2}$.

ceci vaut encore pour $t = 0$.

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{2}$.

- h est une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$
- $\forall t \in [0,+\infty[$, $|h(t)| = h(t) \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2} t^0$

donc $h \in E$ $\left(\lambda = \frac{1}{2}, \beta = 0, A = 0\right)$

Remarque.. Plus généralement toute application continue et bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ appartient à E.

PARTIE II

Q1.- $f \in E$. f est continue sur $\mathbb{R}_+$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $g_x : t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable sur cet intervalle.

$f \in E$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [A,+\infty[, |f(t)| \leq \lambda t^p$.

$\forall t \in [A,+\infty[, |g_x(t)| \leq \lambda t^p e^{-xt}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} (t^2 (t^p e^{-xt})) = 0$ car $x > 0$ donc $\exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [B,+\infty[, |t^2(t^p e^{-xt})| \leq 1$

$\forall t \in [B,+\infty[, 0 \leq t^p e^{-xt} \leq \frac{1}{t^2}$.

La convergence de $\int_B^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et la positivité de la fonction $t \mapsto t^p e^{-xt}$ montrent la convergence de $\int_B^{+\infty} t^p e^{-xt}\, dt$ et donc de $\int_0^{+\infty} t^p e^{-xt} dt$.

La convergence de cette dernière intégrale, l'inégalité $\forall t \in [A,+\infty[, |g_x(t)| \leq \lambda t^p e^{-xt}$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_A^{+\infty} |g_x(t)| dt$ converge. Il en est de même pour $\int_0^{+\infty} |g_x(t)| dt$

Finalement $\int_0^{+\infty} g_x(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est absolument convergente donc convergente.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_0^A t^n e^{-xt} dt \underset{u=xt}{=} \int_0^{xA} (u/x)^n e^{-u} \frac{du}{x} = \int_0^{xA} \frac{1}{x^{n+1}} u^n e^{-u} du = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{xA} u^n e^{-u} du$

$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^{xA} u^n e^{-u} du = \Gamma(n+1) = (n+1-1)! = n!$

donc $L_{U_n}(x) = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[, \quad L_{U_n}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$.

question très classique. Il s'agit de dériver sous le signe $\int$; c'est à dire de montrer que $\left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt\right)' = \int_0^{+\infty} (e^{-xt} f(t))'\,dt$

p4

Q3. a) $\varphi : t \mapsto e^t$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor montre alors que :

$$\forall u \in \mathbb{R},\quad |\varphi(u) - \varphi(0) - (u-0)\varphi'(0)| \leq \frac{|u-0|^2}{2!} \max_{t \in [0,u]} |\varphi''(t)|$$

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \max_{t\in[0,u]} |e^t| = \begin{cases} \frac{u^2}{2} & \text{si } u \leq 0 \\ \frac{u^2}{2} e^u & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$

$\forall u \in \mathbb{R}_-,\ \frac{u^2}{2} \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$ et $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \frac{u^2}{2} e^u = \frac{u^2}{2} e^{|u|}$

Par conséquent : $\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}.$

b) $a \in \mathbb{R}_+^*$. $h \in \mathbb{R}^*$ et $|h| < \frac{a}{2}$.

$-\frac{a}{2} < h < \frac{a}{2}$; $0 < \frac{a}{2} < a+h$. Par conséquent $L_f(a+h)$ et $L_f(a)$ existent ;

$\frac{L_f(a+h) - L_f(a)}{h}$ a donc un sens

$\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-at}\,dt$ n'est autre que $L_{f_1}(a)$ qui existe car $f_1 \in E$.

Finalement $\Delta(h)$ a un sens pour tout réel h non nul tel que : $|h| < \frac{a}{2}$.

$$|\Delta(h)| = \frac{1}{|h|} \left| \int_0^{+\infty} [f(t) e^{-(a+h)t} - f(t) e^{-at} + h t f(t) e^{-at}]\,dt \right|$$

$\forall t \in [0,+\infty[,\ |f(t)e^{-(a+h)t} - f(t)e^{-at} + htf(t)e^{-at}| = e^{-at}|f(t)|\,|e^{-ht} - 1 - (-ht)| \leq e^{-at}|f(t)| \frac{h^2t^2}{2} e^{|ht|}$

$\forall t \in [0,+\infty[,\ |f(t)e^{-(a+h)t} - f(t)e^{-at} + htf(t)e^{-at}| \leq \frac{h^2}{2} t^2 |f(t)| e^{-(a-|h|)t} = \frac{h^2}{2} |f_2(t)| e^{-(a-|h|)t}$

$\int_0^{+\infty} |f_2(t)| e^{-(a-|h|)t}\,dt$ converge car $f_2 \in E$ et $a - |h| > 0$; donc :

$\int_0^{+\infty} [f(t)e^{-(a+h)t} - f(t)e^{-at} + htf(t)e^{-at}]\,dt$ est absolument convergente ce qui permet d'écrire que :

$$|\Delta(h)| \leq \frac{1}{|h|} \times \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-(a-|h|)t}\,dt = \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-(a-|h|)t}\,dt$$

$\forall t \in [0,+\infty[,\quad t^2|f(t)| e^{-(a-|h|)t} \leq t^2 |f(t)| e^{-\frac{a}{2}t}$ car $a - |h| > \frac{a}{2}$

$\int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{a}{2}t} \underbrace{dt}_{f_2 \in E\,!}$ étant convergente on peut dire que : $\int_0^{+\infty} t^2|f(t)| e^{-(a-|h|)t}\,dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{a}{2}t}\,dt$

Finalement : $\underline{\underline{|\Delta(h)| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|f(t)|e^{-(a-|h|)t}\,dt \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|f(t)|e^{-\frac{a}{2}t}\,dt}}$

En particulier $|\Delta(h)| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|f(t)|e^{-\frac{a}{2}t}\,dt$ pour $h \in \mathbb{R}^*$ et $|h| < \frac{a}{2}$.

En faisant tendre h vers 0 il vient par encadrement : $\lim_{h\to 0} \Delta(h) = 0$; ceci signifie que : $\lim_{h\to 0} \frac{Lf(a+h)-Lf(a)}{h} = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-at}\,dt$.

Par conséquent $\underline{Lf \text{ est dérivable en } a}$ et $\underline{\underline{L'f(a) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-at}\,dt = -Lf_1(a)}}$ et ceci pour tout élément $a \in \mathbb{R}_+^*$

(Q4) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\underline{Lf \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et que } (Lf)^{(n)} = (-1)^n Lf_n}$

- C'est clair pour $n = 1$ d'après Q3. (C'est encore plus clair pour $n = 0$!)
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(Lf)^{(n)} = (-1)^n Lf_n$.

$f_n \in E$ donc Lf_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $Lf_n' = -L(f_n)_1 = -Lf_{n+1}$!

Ce qui suffit pour dire que Lf_n est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$(Lf)^{(n+1)} = ((Lf)^{(n)})' = ((-1)^n Lf_n)' = (-1)^n(-Lf_{n+1}) = (-1)^{n+1}Lf_{n+1}$. Ceci achève la récurrence.

(Q5) Soit $f \in E$. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et : $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [A,+\infty[, |f(t)| \leq \lambda t^p$

f est continue sur $[0,A]$ donc f est bornée sur $[0,A]$.

Par conséquent $\exists b \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [0,A], |f(t)| \leq b$.

$\forall t \in [0,A], |f(t)| \leq b \leq \lambda t^p + b$ et $\forall t \in [A,+\infty[, |f(t)| \leq \lambda t^p \leq \lambda t^p + b$.

En posant $a = \lambda$ on a : $\underline{\underline{\forall t \in [0,+\infty[, \quad |f(t)| \leq at^p + b}}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et $p \in \mathbb{N}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |Lf(x)| = |\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\,dt \leq a\int_0^{+\infty} t^p e^{-xt}\,dt + b\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ car toutes les intégrales sont convergentes. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |Lf(x)| \leq a\frac{p!}{x^{p+1}} + b\frac{1}{x}$

Par encadrement il vient : $\underline{\underline{\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, (Lf)^{(n)}(x) = (-1)^n Lf_n$ et $\lim_{x\to+\infty} Lf_n(x) = 0$ donc $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x\to+\infty} Lf_n(x) = 0}}$.

PARTIE III

Q1. $h \in E$ et $g = L_h$. g est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'' = (-1)^2 L_{h_2}$

$\forall t \in]0,+\infty[$, $h_2(t) = t^2 h(t) = 1 - \cos t$. $h_2(0) = 0 = 1 - \cos 0$. Donc $\forall t \in [0,+\infty[$, $h_2(t) = 1-\cos t$

Finalement g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos t) e^{-xt}\,dt$.

$x>0$. $\int_0^{+\infty} (1-\cos t)e^{-xt}\,dt$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ converge. Par conséquent $\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt$ est elle-même convergente et on peut écrire $\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\, e^{-xt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt - \int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt$

$\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A \underset{u'}{\cos t}\ \underset{v}{e^{-xt}}\,dt = [\sin t\, e^{-xt}]_0^A - \int_0^A \sin t\,(-x e^{-xt})\,dt = \sin A\, e^{-xA} + x\int_0^A \sin t\, e^{-xt}\,dt$

$\lim\limits_{A\to+\infty} (\sin A\, e^{-xA}) = 0$; par conséquent la convergence de $\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt$ donne la convergence de $x\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\,dt$; de plus $\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt = x\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\,dt$

$\int_0^A \underset{u'}{\sin t}\ \underset{v}{e^{-xt}}\,dt = [-\cos t\, e^{-xt}]_0^A - \int_0^A (-\cos t)(-x e^{-xt})\,dt = -\cos A\, e^{-xA} + 1 - x\int_0^A \cos t\, e^{-xt}\,dt$

$\lim\limits_{A\to+\infty} (\cos A\, e^{-xA}) = 0$ donc $\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\,dt = 1 - x\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt$. Finalement :

$\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt = x\left(1 - x\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt\right)$; $\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt = \frac{x}{1+x^2}$.

En bref : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.

Q2 s est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $s'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \overbrace{- \frac{1}{2}x\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}}^{-1}$

$\boxed{s(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) + \frac{\pi}{2} - \arctan x}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $s'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

s' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $s''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = g''(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $s''(x) = g''(x)$.

$\mathbb{R}_+^*$ étant un intervalle : $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $s'(x) = g'(x) + a$.

$\lim_{x\to+\infty} g'(x) = \lim_{x\to+\infty} L'_h(x) \overset{\downarrow}{=} 0$ et $\lim_{x\to+\infty} s'(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)) = \lim_{x\to+\infty} (\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = 0$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $s'(x) = g'(x) + a$ en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient : $a = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, s'(x) = g'(x)$.

$\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, s(x) = g(x) + b$.

Ici encore $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} L_h(x) = 0$. Cherchons $\lim_{x\to+\infty} s(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $s(x) = x \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ donc $x \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \sim x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x - \sqrt{x^2+1}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Par conséquent $\lim_{x\to+\infty} (x \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty} (\arctan x) = \frac{\pi}{2}$ on obtient $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $s(x) = g(x) + b$ et $\lim_{x\to+\infty} s(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ donc $b = 0$. Finalement $g = s$.

Q3) a) $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$. $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0. Il ne reste donc plus qu'à prouver l'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$

$\forall t \in [1,+\infty[$, $\left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1+|\cos t|}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$. (En fait $0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$!)

Il est alors clair que : $\int_1^{+\infty} \left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| dt$ converge ; $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente donc convergente.

Donc $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt$ existe.

b) $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc localement intégrable.

Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. $\int_\varepsilon^A \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \int_\varepsilon^A \underset{u'}{\frac{1}{t^2}} \underset{v}{(1-\cos t)} dt = \left[-\frac{1}{t}(1-\cos t)\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t} dt$

$\lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{A}(1-\cos A)\right) = 0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} = 0$ $(1-\cos\varepsilon \underset{0}{\sim} \frac{\varepsilon^2}{2})$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ converge.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$

c) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

$$I-g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt-\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\,dt=\int_0^{\varepsilon}\frac{1-\cos t}{t^2}(1-e^{-xt})\,dt+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}(1-e^{-xt})\,dt$$

$$I-g(x)=x\int_0^{\varepsilon}\underbrace{\sin\frac t2\ \frac{\sin t/2}{t/2}\ \frac{1-e^{-xt}}{xt}}_{\frac1x\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\ !!}\,dt+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}(1-e^{-xt})\,dt$$

$1-\cos t=2\sin^2\frac t2$

$\forall t\in]0,\varepsilon]$, $\left|\sin\frac t2\ \frac{\sin t/2}{t/2}\ \frac{1-e^{-xt}}{xt}\right|=\left|\sin\frac t2\right|\ \frac{|\sin t/2|}{t/2}\ \frac{1-e^{-xt}}{xt}\leqslant 1\times1\times1=1$ car

$\forall u\in\mathbb{R}^+$, $|\sin u|\leqslant u$ et $1-e^{-u}\leqslant u$

classique — c'est clair pour $u\geqslant 1$

pour $u<1$: $\ln(1-u)\leqslant -u$ donc $1-u\leqslant e^{-u}$ et : $1-e^{-u}\leqslant u$.

Donc $\left|\int_0^\varepsilon\sin\frac t2\ \frac{\sin t/2}{t/2}\ \frac{1-e^{-xt}}{xt}\,dt\right|\leqslant\int_0^\varepsilon\left|\sin\frac t2\ \frac{\sin t/2}{t/2}\ \frac{1-e^{-xt}}{xt}\right|dt\leqslant\int_0^\varepsilon dt=\varepsilon$

$\forall t\in[\varepsilon,+\infty[$, $\left|\frac{1-\cos t}{t^2}(1-e^{-xt})\right|\leqslant\frac{|1|+|\cos t|}{t^2}\times(1-e^{-xt})\leqslant\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t^2}e^{-xt}\leqslant\frac{2}{t^2}$.

Comme $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{2}{t^2}\,dt$ est une intégrale convergente : $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}(1-e^{-xt})\,dt$ est absolument convergente

et on peut écrire : $\left|\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}(1-e^{-xt})\,dt\right|\leqslant\int_\varepsilon^{+\infty}\left|\frac{1-\cos t}{t^2}(1-e^{-xt})\right|dt\leqslant\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{2\,dt}{t^2}=\frac{2}{\varepsilon}$

Donc $|I-g(x)|\leqslant x\left|\int_0^\varepsilon\sin\frac t2\ \frac{\sin t/2}{t/2}\ \frac{1-e^{-xt}}{xt}\,dt\right|+\left|\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}(1-e^{-xt})\,dt\right|\leqslant x\varepsilon+\frac{2}{\varepsilon}$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad |I-g(x)|\leqslant x\varepsilon+\frac{2}{\varepsilon}$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $\varepsilon=1/\sqrt{x}$. $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ donc $|I-g(x)|\leqslant x(1/\sqrt{x})+\sqrt{x}=3\sqrt{x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $|I-g(x)|\leqslant 3\sqrt{x}$. En faisant tendre x vers 0 le théorème d'encadrement donne : $\lim_{x\to0}g(x)=I$. Or $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\left[x\ln x-x\ln\sqrt{x^2+1}+\frac{\pi}{2}-\arctan x\right]=\frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$ ce qui n'est pas un scoop !