SUJET 10

PROBLÈME : TRANSFORMATION DE LAPLACE

E est l'ensemble des applications continues f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ localement dominées au voisinage de $+\infty$ par un mônome c'est à dire telles qu'il exite un réel strictement positif λ et un élément p de $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \in [A, +\infty[,\ |f(t)| \leqslant \lambda t^p.$$

Partie I

Q1. Montrer que E n'est pas vide.

Soient f et g deux éléments de E et α un réel. Montrer proprement que $f+g$ et αf sont des éléments de E. Que dire de E ?

Q2. f est un élément de E et n un élément de $\mathbb{N}$. Pour tout réel t positif on pose : $u_n(t) = t^n$ et $f_n(t) = u_n(t)\, f(t)$. Montrer que f_n est dans E et en déduire (ou montrer...) que u_n aussi.

Montrer que toute application polynômiale de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ appartient encore à E.

Q3. $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ h(t) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos t}{t^2} & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant h(t) \leqslant 1/2$ (étudier $t \to t^2/2 - 1 + \cos t$). En déduire que h appartient à E.

Partie II

Q1. Soit f un élément de E. Montrer que pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Dans la suite si f est un élément de E, L_f est l'application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x dans $\mathbb{R}^{+*}$ associe $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$. L_f est la transformée de Laplace de f.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t \in [0, +\infty[,\ u_n(t) = t^n$. Utiliser la fonction Γ pour montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ L_{u_n}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Q3. f est un élément de E. On se propose de montrer que L_f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que pour tout réel u :

$$|e^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2}\, e^{|u|} \qquad \text{(on pourra utiliser Taylor).}$$

b) a est un réel strictement positif. h est un réel non nul tel que : $|h| < a/2$.

Montrer que $\Delta(h) = \dfrac{L_f(a+h) - L_f(a)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\, e^{-at}\, \mathrm{d}t$ a un sens.

Montrer que :

$$|\Delta(h)| \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)|\, e^{-(a-|h|)t}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)|\, e^{-\frac{a}{2}t}\, \mathrm{d}t.$$

En déduire que L_f est dérivable en a et préciser $(L_f)'(a)$.

<u>*Remarque*</u>

L_f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $(L_f)'$ est la transformée de Laplace de $t \to -tf(t)$.

Q4. f est un élément de E. Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, L_f est n fois dérivable et que

$$(L_f)^{(n)} = (-1)^n L_{f_n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_n(t) = t^n f(t)).$$

Q5. f est un élément de E. Montrer que l'on peut trouver $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ |f(t)| \leqslant at^p + b.$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} L_f(x) = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (L_f)^{(n)}(x) = 0$ pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$.

Partie III

On reprend la fonction h de IQ3 et on pose $g = L_h$.

Q1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ g''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \cos t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ g''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$.

Q2. Pour tout élément x de $\mathbb{R}^{+*}$ on pose : $s(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

Montrer que s est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $s'' = g''$.

En déduire à l'aide de IIQ5 que $g = s$.

Q3. a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge.

b) En déduire que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut I.

c) Montrer que si x et ε sont deux réels strictement positifs :

$$I - g(x) = x \int_0^{\varepsilon} \sin\frac{t}{2}\, \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\, \frac{1 - e^{-xt}}{xt}\, \mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\, (1 - e^{-xt})\, \mathrm{d}t.$$

En déduire que $|I - g(x)| \leqslant \varepsilon x + \dfrac{2}{\varepsilon}$. En posant $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ montrer que $I = \dfrac{\pi}{2}$
