PARTIE I

Q1 $k\in\mathbb{N}^*$. $u_k=\int_0^\pi \cos(\lambda x)\cos(kx)\,dx=\int_0^\pi \frac{1}{2}\left[\cos((\lambda+k)x)+\cos((\lambda-k)x)\right]dx$

$$u_k=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((\lambda+k)x)}{\lambda+k}+\frac{\sin((\lambda-k)x)}{\lambda-k}\right]_0^\pi=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\lambda\pi+k\pi)}{\lambda+k}+\frac{\sin(\lambda\pi-k\pi)}{\lambda-k}\right]$$

$\sin(\lambda\pi+k\pi)=(-1)^k\sin(\lambda\pi)$ et $\sin(\lambda\pi-k\pi)=(-1)^k\sin(\lambda\pi)$

$$u_k=\frac{1}{2}(-1)^k\sin(\lambda\pi)\left[\frac{1}{\lambda+k}+\frac{1}{\lambda-k}\right]=\frac{1}{2}(-1)^k\sin(\lambda\pi)\times\frac{2\lambda}{\lambda^2-k^2}=\frac{(-1)^k\sin(\lambda\pi)}{\lambda^2-k^2}\lambda.$$

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u_k=\frac{(-1)^k\sin(\lambda\pi)}{\lambda^2-k^2}\lambda.$$

Q2 $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ & $x\neq 0\,[2\pi]$.

$$C_n(x)+iS_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(kx)+i\sin(kx)\right)=\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=\sum_{k=1}^{n}(e^{ix})^k\underset{e^{ix}\neq 1}{=}e^{ix}\,\frac{1-(e^{ix})^n}{1-e^{ix}}$$

$$C_n(x)+iS_n(x)=e^{ix}\,\frac{e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{ix/2}}\,\frac{\left(e^{-i\frac{nx}{2}}-e^{i\frac{nx}{2}}\right)}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}=e^{ix/2}\,e^{inx/2}\,\frac{-2i\sin(\frac{nx}{2})}{-2i\sin(x/2)}=e^{i\frac{n+1}{2}x}\,\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(x/2)}.$$

donc $C_n(x)=\mathrm{Re}\left(C_n(x)+iS_n(x)\right)=\mathrm{Re}\left[e^{i\frac{n+1}{2}x}\,\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]=\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$

Donc $C_n(x)=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\right)=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(\frac{nx}{2}+\frac{n+1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{nx}{2}-\frac{n+1}{2}x\right)\right]$

$$C_n(x)=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}.$$

Q3

ϕ est continue sur $]0,\pi]$.

$\phi(x)=\frac{\cos(\lambda x)-1}{\sin(x/2)}=-\frac{1-\cos(\lambda x)}{\sin(x/2)}\underset{0}{\sim}-\frac{(\lambda x)^2/2}{x/2}=-\lambda^2x$; $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\lambda x)-1}{\sin(x/2)}=0=\phi(0)$;

ϕ est donc continue en 0. ϕ est continue sur $[0,\pi]$. (i)

ϕ est dérivable sur $]0,\pi]$ et $\forall x\in]0,\pi]$, $\phi'(x)=\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\left[-\lambda\sin(\lambda x)\sin\frac{x}{2}-(\cos\lambda x-1)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right]$

ϕ' est alors continue sur $]0,\pi]$. ϕ est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ (ii)

cherchons $\lim_{x\to 0}\phi'(x)$. $\phi'(x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{(x/2)^2}\left[-\lambda\sin(\lambda x)\sin\frac{x}{2}-(\cos\lambda x-1)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right].$

cherchons un dl2 du crochet.

$\sin(\lambda x) = (\lambda x) + o(x^2)$; $\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x^2)$; $\cos(\lambda x) - 1 = -\frac{(\lambda x)^2}{2} + o(x^2)$; $\cos\frac{x}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)$.

Par conséquent :

$$-\lambda \sin(\lambda x)\sin\frac{x}{2} - (\cos\lambda x - 1)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} = -\lambda(\lambda x)\left(\frac{x}{2}\right) - \left(-\frac{(\lambda x)^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{8}\right) + o(x^2)$$

$$= -\lambda^2\frac{x^2}{2} + \frac{\lambda^2 x^2}{4} + o(x^2) = -\lambda^2\frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

donc $-\lambda \sin(\lambda x)\sin\frac{x}{2} - (\cos\lambda x - 1)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \underset{0}{\sim} \frac{-\lambda^2 x^2}{4}$

Finalement : $\phi'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{(x/2)^2}\left(\frac{-\lambda^2 x^2}{4}\right) = -\lambda^2$; $\underline{\underline{\lim_{x\to 0}\phi'(x) = -\lambda^2.}}$ (3)

(1), (2) et (3) montrent que : ϕ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Notons que $\phi'(0) = -\lambda^2$.

Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^\pi \underset{u}{\phi(x)}\,\underset{v'}{\sin(\gamma x)}\,dx = \left[\phi(x)\left(-\frac{\cos(\gamma x)}{\gamma}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \phi'(x)\left(-\frac{\cos(\gamma x)}{\gamma}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\gamma}\Big[-\phi(\pi)\cos(\gamma\pi) + \underbrace{\phi(0)\cos(\gamma\times 0)}_{=0} + \int_0^\pi \phi'(x)\cos(\gamma x)\,dx\Big]$$

$$\left|\int_0^\pi \phi(x)\sin(\gamma x)\,dx\right| \leq \frac{1}{\gamma}\left[|\phi(\pi)||\cos(\gamma\pi)| + \int_0^\pi |\phi'(x)||\cos\gamma x|\,dx\right]$$

$$\left|\int_0^\pi \phi(x)\sin\gamma x\,dx\right| \leq \frac{1}{\gamma}\left[|\phi(\pi)| + \int_0^\pi |\phi'(x)|\,dx\right]$$

$\lim_{\gamma\to+\infty} \frac{1}{\gamma}\left[|\phi(\pi)| + \int_0^\pi|\phi'(x)|\,dx\right] = 0$ donc $\underline{\underline{\lim_{\gamma\to+\infty}\int_0^\pi \phi(x)\sin(\gamma x)\,dx = 0}}$ ... ce n'est pas nouveau !

Q4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on passe d'une intégrale "simple" à une intégrale généralisée convergente ; ok ?

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(\lambda x)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi \cos(\lambda x)\sum_{k=1}^n \cos(kx)\,dx = \int_0^\pi \cos(\lambda x)\left[\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin x/2} - \frac{1}{2}\right]dx$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\lambda x - 1}{\sin x/2} + \frac{1}{\sin x/2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(\lambda x)\,dx.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \phi(x)\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(\lambda x)\,dx$$ ... toutes

les intégrales convergent. Notons que : $\int_0^\pi \cos(\lambda x)\,dx = \left[\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\right]_0^\pi = \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda}$

donc $$\underline{\underline{\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2}\int_0^\pi \phi(x)\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}\,dx - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2}.}}$$

Q5 Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(\frac{2n+3}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right)}{\sin x/2}\,dx = \int_0^\pi \frac{2\cos\left(\frac{\frac{2n+3}{2}+\frac{2n+1}{2}}{2}x\right)\sin\left(\frac{\frac{2n+3}{2}-\frac{2n+1}{2}}{2}x\right)}{\sin(x/2)}\,dx$$

$$I_{n+1} - I_n = 2\int_0^\pi \frac{\cos((n+1)x)\,\sin(x/2)}{\sin(x/2)}\,dx = 2\int_0^\pi \cos((n+1)x)\,dx = 2\left[\frac{\sin((n+1)x)}{n+1}\right]_0^\pi = 0$$

$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = I_n}$. $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ I_n = I_0 = \int_0^\pi \frac{\sin(x/2)}{\sin(x/2)}\,dx = \pi$. $\quad \underline{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \pi}$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\int_0^\pi \phi(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx + \frac{1}{2}\pi - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}$

D'après Q3 : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \phi(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx = 0$.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}$.

La série de terme général u_n converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}$.

PARTIE II

Q1 a) $x \mapsto \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{x^{-\lambda}}{1+x}$ sont continues donc localement intégrables sur $]0,1]$

$\frac{x^{\lambda-1}}{1+x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\lambda}}$; $x \mapsto \frac{1}{x^{1-\lambda}}$ est positive sur $]0,1]$ et $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\lambda}}$ converge $(1-\lambda<1)$, par conséquent : $\underline{\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx \text{ converge}}$.

$\frac{x^{-\lambda}}{1+x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\lambda}}$; $x \mapsto \frac{1}{x^\lambda}$ est positive sur $]0,1]$ et $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ converge $(\lambda<1)$; par conséquent : $\underline{\int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx \text{ converge}}$.

$x \mapsto \frac{1}{1+x^\alpha}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ (et pourtant pas sur $[0,+\infty[$!) donc est localement intégrable sur $]0,+\infty[$. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^\alpha} = 1$; la fonction est prolongeable par continuité en 0 donc $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha}$ converge.

$\frac{1}{1+x^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$; $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est positive sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge $(\alpha>1)$; donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$ converge

Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$ converge.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$. $\int_\varepsilon^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\varepsilon^\lambda}^1 \frac{(t^{1/\lambda})^{\lambda-1}}{1+t^{1/\lambda}} \frac{1}{\lambda} t^{1/\lambda-1}\,dt \overset{\alpha=1/\lambda}{=} \int_{\varepsilon^\lambda}^1 \frac{t^{1-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}-1}}{1+t^\alpha}\frac{1}{\lambda}\,dt$

$t=x^\lambda;\ x=t^{1/\lambda};\ dx=\frac{1}{\lambda}t^{1/\lambda-1}dt$

$\int_\varepsilon^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\varepsilon^\lambda}^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$; en faisant tendre ε vers 0 on obtient:

$$\underline{\underline{I = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}}}.$$

$\int_\varepsilon^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\varepsilon^{-\lambda}}^1 \frac{t}{1+t^{-\frac{1}{\lambda}}}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)t^{-\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \int_{\varepsilon^{-\lambda}}^1 \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{t^{-1/\lambda}}{1+t^{-1/\lambda}}\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_1^{\varepsilon^{-\lambda}} \frac{dt}{t^{1/\lambda}(1+t^{-1/\lambda})}$

$t=x^{-\lambda};\ x=t^{-1/\lambda};\ dx=-\frac{1}{\lambda}t^{-\frac{1}{\lambda}-1}dt$

$\int_\varepsilon^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_1^{1/\varepsilon^\lambda} \frac{dt}{t^{1/\lambda}+1}$; $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\lambda} = +\infty$. En faisant tendre ε vers 0 on obtient:

$\int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$. $\underline{\underline{J = \int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}}}$.

Donc $\underline{\underline{I+J = \frac{1}{\lambda}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{1}{\lambda}K = \alpha K}}$

(Q2) a) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. $\left|\sum_{k=0}^{p}(-1)^k x^k - \frac{1}{1+x}\right| = \left|\frac{1-(-x)^{p+1}}{1-(-x)} - \frac{1}{1+x}\right| = \frac{x^{p+1}}{1+x} \leq x^{p+1}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0,1]$.

$\left|\int_\varepsilon^1 \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k\right] x^{\lambda-1}\,dx - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx\right| = \left|\int_\varepsilon^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x}\right)x^{\lambda-1}\,dx\right|$

$\leq \int_\varepsilon^1 \left|\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x}\right| x^{\lambda-1}\,dx$ (Q1)

$\leq \int_\varepsilon^1 x^{n+1}x^{\lambda-1}\,dx = \int_\varepsilon^1 x^{n+\lambda}\,dx = \left[\frac{x^{n+\lambda+1}}{n+\lambda+1}\right]_\varepsilon^1$

$\left|\int_\varepsilon^1 \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k\right]x^{\lambda-1} - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx\right| \leq \frac{1}{n+\lambda+1} - \frac{\varepsilon^{n+\lambda+1}}{n+\lambda+1}$

En faisant tendre ε vers 0 il vient : $\underline{\underline{|A_n - I| \leq \frac{1}{n+\lambda+1}}}$.

$$\left|\int_\varepsilon^1 \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}x^{k-1}\right]x^{-\lambda}\,dx - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx\right| \le \int_\varepsilon^1 \left|\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}x^{k-1} - \frac{1}{1+x}\right| x^{-\lambda}\,dx$$

Q1

$$\le \int_\varepsilon^1 \left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k - \frac{1}{1+x}\right| x^{-\lambda}\,dx \le \int_\varepsilon^1 x^{(n-1)+1}x^{-\lambda}\,dx = \int_\varepsilon^1 x^{n-\lambda}\,dx$$

Donc $\left|\int_\varepsilon^1 \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}x^{k-1}\right]x^{-\lambda}\,dx - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx\right| \le \int_\varepsilon^1 x^{n-\lambda}\,dx = \frac{1}{n-\lambda+1} - \frac{\varepsilon^{n-\lambda+1}}{n-\lambda+1}$.

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\varepsilon^{n-\lambda+1}\right) = 0$ ($n\in\mathbb{N}^*$ et $\lambda\in]0,1[$)

Donc $|B_n - J| \le \frac{1}{n-\lambda+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|A_n - I| \le \frac{1}{n+\lambda+1}$ et $|B_n - J| \le \frac{1}{n-\lambda+1}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\lambda+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\lambda+1} = 0$

Par encadrement il vient : $\lim_{n\to+\infty} A_n = I$ et $\lim_{n\to+\infty} B_n = J$

Q3 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $A_n = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_\varepsilon^1 x^{k+\lambda-1}\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1-\varepsilon^{k+\lambda}}{k+\lambda}\right] = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\lambda}$.

$B_n = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\int_\varepsilon^1 x^{k-1-\lambda}\,dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\left(\frac{1-\varepsilon^{k-\lambda}}{k-\lambda}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k-\lambda}$.

$$A_n+B_n - \frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\lambda} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k-\lambda} - \frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\left[\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sin(\lambda\pi)}{\lambda^2-k^2}\lambda\right].$$

$$A_n+B_n - \frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^n (-1)^k\left[\frac{1}{k+\lambda} - \frac{1}{k-\lambda}\right] - 2\lambda\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\lambda^2-k^2}.$$

$$A_n+B_n - \frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{-2\lambda}{k^2-\lambda^2} - 2\lambda\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\lambda^2-k^2}.$$

$$A_n+B_n - \frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{\lambda^2-k^2} - 2\lambda\sum_{k=1}^n (-1)^k\frac{1}{\lambda^2-k^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A_n+B_n - \frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{\lambda}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $I+J-\frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda}$

Donc $I+J-\frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$; $I+J = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$; $\frac{1}{\lambda}K = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$; $K = \frac{\lambda\pi}{\sin(\lambda\pi)}$.

Finalement si $\alpha\in]1,+\infty[$ et si $\lambda = \frac{1}{\alpha}$: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha} = \frac{\lambda\pi}{\sin(\lambda\pi)} = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$ ... classique !

PARTIE III

Q1 $\gamma \in \mathbb{R}_+$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $u : t \mapsto \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et

$$\lim_{t \to 0^+} u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = 0 \\ 0 & \text{si } \gamma > 0 \end{cases} \quad \left(\text{car } \lim_{t \to 0} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} = 1 \text{ puisque } \alpha > 1\right).$$

u est donc prolongeable par continuité en 0 ; $\int_0^1 u(t)\,dt$ converge.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ converge pour tout réel x.

Exercice.- Reprendre l'étude avec α et γ quelconque.

b) Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ converge d'après a).

Rappelons que $u : t \mapsto \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc sur $[1,+\infty[$.

$$u(t) \underset{+\infty}{\overset{\alpha>1}{\sim}} \frac{t^\gamma}{t^\alpha} e^{-xt^\alpha} = t^{\gamma-\alpha} e^{-xt^\alpha}. \quad t^2 u(t) \underset{+\infty}{\sim} t^{\gamma-\alpha+2} e^{-xt^\alpha} = e^{-xt^\alpha + (\gamma-\alpha+2)\ln t}.$$

$$t^2 u(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-xt^\alpha\left(1 - \frac{\gamma-\alpha+2}{x}\,\frac{\ln t}{t^\alpha}\right)}.$$ Or $\displaystyle\lim_{t \to +\infty}(-x t^\alpha) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$.

Par conséquent $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} (t^2 u(t)) = 0$.

$\exists A \in [1,+\infty[$, $\forall t \in [A,+\infty[$, $|t^2 u(t)| \leq 1$. $\forall t \in [A,+\infty[$, $0 \leq u(t) = |u(t)| \leq \dfrac{1}{t^2}$.

La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)\,dt$.

Ainsi pour tout réel x strictement positif, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}$ convergent.

Q2 **a)** Q1 montre que, pour tout réel x strictement positif et tout réel γ positif :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ converge ; en particulier $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ converge pour tout réel x strictement positif.

Ainsi $]0,+\infty[\ \subset D_f$.

Nous avons montré dans II que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge alors $0 \in D_f$.

Soit x un élément de $]-\infty, 0[$. Notons que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ diverge. Il suffit pour cela de prouver que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$

$t \mapsto \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}$ est toujours continue (et positive) sur $[1,+\infty[$.

$$\frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha} e^{-xt^\alpha} = e^{-xt^\alpha - \alpha \ln t} = e^{-xt^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{x}\frac{\ln t}{t^\alpha}\right)}$$

$\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\left(-xt^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{x}\frac{\ln t}{t^\alpha}\right)\right) = +\infty$ car $-x>0$, $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} t^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} = \lim\limits_{t\mapsto+\infty} e^{-xt^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{x}\frac{\ln t}{t^\alpha}\right)} = +\infty$.

$\exists A \in [1,+\infty[,\ \forall t \in [A,+\infty[,\ \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} \geqslant 1 \geqslant 0$!

La divergence de $\int_1^{+\infty} 1\,dt$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent la divergence de $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$.

Donc $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ diverge et $x \notin D_f$.

<u>Finalement le domaine de f est $]0,+\infty[$.</u>

b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+,\ \exists A \in \mathbb{R}^*_+,\ \forall x \in D_f,\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$. Soit $x \in D_f$. $\forall t \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant e^{-xt^\alpha} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \frac{1}{1+t^\alpha} \leqslant 1$.

$\forall t \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} \leqslant 1$. Donc $0 \leqslant \int_0^{\varepsilon/2} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt \leqslant \int_0^{\varepsilon/2} 1\,dt = \frac{\varepsilon}{2}$. (a)

$\forall t \in [\frac{\varepsilon}{2}, +\infty[$, $(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha \leq t^\alpha$; $\forall t \in [\frac{\varepsilon}{2}, +\infty[$, $0 \leq e^{-xt^\alpha} \leq e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha}$.

$\forall t \in [\frac{\varepsilon}{2}, +\infty[$, $0 \leq \dfrac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} \leq e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \dfrac{1}{1+t^\alpha}$.

Rappelons que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge. Ainsi $0 \leq \int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt \leq e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

Comme $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{1+t^\alpha} \geq 0$: $\int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

Finalement $0 \leq \int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt \leq e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \leq e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$. (b)

Par addition de (a) et (b) il vient :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{\varepsilon/2} 1\,dt + e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{2} + e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \right) = 0$:

$\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [A, +\infty[$, $e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} = \left| e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall x \in [A, +\infty[$, $0 \leq f(x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; $\forall x \in [A, +\infty[$, $|f(x)| < \varepsilon$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in D_f$, $x \geq A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Q3 a) Nous avons que si $\gamma \in [0, +\infty[$ et si $x \in]0, +\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt$.

Pour $\gamma = \alpha$ et $x = c$ on obtient la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} dt$.

Pour $\gamma = 2\alpha$ et $x = \frac{c}{2}$ on obtient la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha} dt$.

Ainsi $g(c) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha} dt$ existent.

b) $\omega : u \mapsto e^u$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 1 à ω donne :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |\omega(u) - \omega(0) - (u-0)\omega'(0)| \leq \frac{|u-0|^2}{2} \max_{z \in [\overleftrightarrow{0,u}]} |\omega''(z)|$$

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \max_{z \in [\overleftrightarrow{0,u}]} e^z .$$

Si $u \geq 0$: $\max_{z \in [\overleftrightarrow{0,u}]} e^z = e^u = e^{|u|}$. Si $u < 0$ $\max_{z \in [\overleftrightarrow{0,u}]} e^z = 1 \leq e^{|u|}$.

Finalement $\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$.

c) $h\Delta(h) = f(c+h) - f(c) + h g(c) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-(c+h)t^\alpha}}{1+t^\alpha} - \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} + h t^\alpha \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} \right) dt$

$$h\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} \left(e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha \right) dt .$$

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \left| \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} (e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha) \right| = \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} |e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha| \underset{b)}{\leq} \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} \frac{|-ht^\alpha|^2}{2} e^{|ht^\alpha|}$$

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \left| \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} (e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha) \right| \leq \frac{h^2}{2} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-t^\alpha(c-|h|)} \underset{|h| \leq \frac{c}{2}}{\leq} \frac{h^2}{2} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha}$$

La convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha} dt$ donne alors la convergence de $\int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} (e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha) \right| dt$. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} (e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha) dt$ est absolument convergente. Ceci permet alors d'écrire que :

$$|h\Delta(h)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} (e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha) \right| dt \leq \frac{|h|^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha} dt .$$

En divisant par $|h|$ il vient :

$$|\Delta(h)| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha} dt .$$

$\lim_{h\to 0}\left(|h|\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^\alpha}e^{-(c-|h|)t^\alpha}dt\right)=0$ donc $\lim_{h\to 0}\Delta(h)=0$.

Alors $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(c+h)-f(c)}{h}+g(c)\right)=0$; $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=-g(c)$.

<u>Par conséquent f est dérivable en c et $f'(c)=-g(c)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha}dt$ et ceci pour tout c dans $\mathbb{R}_+^*$.</u>

Q4 Soit $x\in[0,+\infty[$ et $A\in[0,+\infty[$. $|f(x)-f(0)|=\left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}-\frac{1}{1+t^\alpha}\right)dt\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|$

$|f(x)-f(0)|=\left|\int_0^A\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt+\int_A^{+\infty}\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|\leq\left|\int_0^A\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|+\left|\int_A^{+\infty}\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|$

$\forall t\in]0,A]$, $\left|\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|=\frac{1}{1+t^\alpha}|e^{-xt^\alpha}-1|\underset{\frac{1}{1+t^\alpha}\leq 1}{\leq}|e^{-xt^\alpha}-1|=1-e^{-xt^\alpha}\leq 1$!!

La convergence de $\int_0^A 1\,dt$ assure alors la convergence de $\int_0^A\left|\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|dt$ et de $\int_0^A|e^{-xt^\alpha}-1|dt$. Ceci permet d'écrire que :

$\left|\int_0^A\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|\leq\int_0^A\left|\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|dt\leq\int_0^A|e^{-xt^\alpha}-1|dt$.

$\forall t\in[A,+\infty[$, $\left|\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|\leq\frac{|e^{-xt^\alpha}|+1}{1+t^\alpha}=\frac{e^{-xt^\alpha}+1}{1+t^\alpha}\leq\frac{2}{1+t^\alpha}$.

La convergence de $\int_A^{+\infty}\frac{2}{1+t^\alpha}dt$ donne la convergence de $\int_A^{+\infty}\left|\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|dt$ et permet d'écrire que : $\left|\int_A^{+\infty}\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|\leq\int_A^{+\infty}\left|\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|dt\leq 2\int_A^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}$.

$w: u\mapsto e^u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à w à l'ordre 0 donne $\forall u\in]-\infty,0]$, $|w(u)-w(0)|\leq|u|\max_{z\in[u,0]}|w'(z)|$.

$\forall u\in]-\infty,0]$, $|e^u-1|\leq|u|\max_{z\in[u,0]}e^z=|u|$. <u>$\forall u\in]-\infty,0]$, $|e^u-1|\leq|u|$.</u>

$\forall t \in]0,A]$, $|e^{-xt^\alpha}-1| \underset{-xt^\alpha \leq 0}{\leq} |xt^\alpha| = xt^\alpha$; ainsi $\int_0^A |e^{-xt^\alpha}-1|\,dt \leq x\int_0^A t^\alpha dt$.

Finalement $\underline{\underline{|f(x)-f(0)| \leq \int_0^A |e^{-xt^\alpha}-1|\,dt + 2\int_A^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt \leq x\int_0^A t^\alpha dt + 2\int_A^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}\,dt}}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

c) $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_A^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}dt\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}dt - \int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha}dt\right) = 0$.

Ainsi peut-on trouver A dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\left|\int_A^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}dt\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Alors $2\int_A^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\int_0^A t^\alpha dt\right) = 0$ donc $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|<\eta \Rightarrow \left|x\int_0^A t^\alpha dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|<\eta \Rightarrow x\int_0^A t^\alpha dt < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $|x|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(0)| \leq x\int_0^A t^\alpha dt + 2\int_A^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}dt < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Par conséquent : $\forall x \in D_f$, $|x|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(0)| < \varepsilon$.

Alors $\underline{\underline{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, |x|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(0)|<\varepsilon}}$. $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)}}$.

Q5 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $-f'(x)+f(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^\alpha e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} + \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}dt$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\varepsilon^A e^{-xt^\alpha}dt \underset{\substack{u = xt^\alpha \\ t = (u/x)^{1/\alpha} = \frac{1}{x^{1/\alpha}}u^{1/\alpha}}}{=} \int_{x\varepsilon^\alpha}^{xA^\alpha} e^{-u}\frac{1}{x^{1/\alpha}}\frac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du = \frac{x^{-1/\alpha}}{\alpha}\int_{x\varepsilon^\alpha}^{xA^\alpha} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(x\varepsilon^\alpha) = 0$; $\lim\limits_{A\to+\infty}(xA^\alpha) = +\infty$ et $\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du$ existe et vaut $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}dt$ existe et vaut $\frac{x^{-1/\alpha}}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha}) = x^{-1/\alpha}\frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha}) = x^{-1/\alpha}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$.

Donc $-f'(x)+f(x) = x^{-1/\alpha}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = f(x) - x^{-1/\alpha}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = \frac{f(x)}{e^x} = f(x)e^{-x}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = e^{-x}(f'(x)-f(x)) = -e^{-x}x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$h(A) - h(x) = \int_x^A h'(t)dt = -\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^A e^{-t}t^{-\frac{1}{\alpha}}dt$ (h' est continue sur $]0,+\infty[$ car f et f' le sont !)

$f(A)e^{-A} - f(x)e^{-x} = -\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^A e^{-t}t^{-\frac{1}{\alpha}}dt$.

Comme $\lim_{A\mapsto+\infty} f(A) = 0$ et $\lim_{A\mapsto+\infty} e^{-A} = 0$, $\lim_{A\mapsto+\infty}(f(A)e^{-A}) = 0$. Ceci donne la convergence de $\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{\alpha}}dt$ (qui était déjà claire... $\Gamma(-\frac{1}{\alpha}+1)$ et $-\frac{1}{\alpha}+1>0$.) et l'égalité

$-f(x)e^{-x} = -\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}dt$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\quad f(x)e^{-x} = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}dt$

$x \mapsto f(x)e^{-x}$ admet pour limite $f(0)$ à droite en 0 et $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}dt$ admet pour limite à droite en 0 : $\Gamma(-\frac{1}{\alpha}+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}dt$.

On peut donc prolonger sans difficulté l'égalité précédente en 0.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x)e^{-x} = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}dt$.

Q6 L'égalité de Q5 b) appliquée en 0 donne :

$f(0) = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\,\Gamma(-\frac{1}{\alpha}+1)$. Or $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$.

Ainsi $\frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)} = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})$.

Alors $\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)} = \Gamma(1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)$ pour tout $\alpha \in]1,+\infty[$.

Soit z un élément de $]0,1[$. $\frac{1}{z}$ appartient à $]1,+\infty[$.

Alors, d'après ce qui précède $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$.

Finalement $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Remarques. 1. Avec $z = 1/2$ on retrouve $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

2. Cette formule permet d'obtenir Γ sur $]0,\frac{1}{2}[$ à partir de Γ sur $]\frac{1}{2},1[$ et réciproquement.