
Dans ce texte n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et E est un espace vectoriel sur K de dimension n. On note Θ l'application linéaire nulle de E

PARTIE A

Le but de cette partie est de montrer que si f est un endomorphisme de E, il existe un entier p tel que :

$$\boxed{1 \leqslant p \leqslant n} \text{ et } \boxed{\operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p = E} \qquad (1)$$

Q1 Ici f est un automorphisme de E. Donner une valeur de p satisfaisant (1).

Q2 Ici $n=3$, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E et f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une base Ker f et de Im f. Peut-on choisir $p=1$?

b) Déterminer une base Ker f^2 et de Im f^2. Montrer que $\operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2 = E$.

Q3 Ici m est un élément de $\mathbb{K}$, $n=4$, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base de E et f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une base Ker f et de Im f. Peut-on choisir $p=1$? On discutera suivant les valeurs de m.

b) Déterminer le plus petit entier p vérifiant (1).

Q4 **Étude du cas général.** Dans cette question f est un endomorphisme non bijectif de E.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$.

b) On pose $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \dim \operatorname{Ker} f^k$. Montrer que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est suite croissante d'éléments de $\mathbb{N}$.

c) Soit F l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}$ tels que $a_k = a_{k+1}$. Montrer que F n'est pas vide et qu'ainsi F possède un plus petit élément (on pourra raisonner par l'absurde).

d) En déduire l'existence d'un élément p dans $[\![1,n]\!]$ qui vérifie les deux conditions :

- $\forall k \in [\![0,p-1]\!],\ \operatorname{Ker} f^k \neq \operatorname{Ker} f^{k+1}$.
- $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$.

e) Montrer que $\forall k \in [\![p,+\infty[\![,\ \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$ (on peut faire une récurrence).

f) Montrer alors que $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

g) *Question ajoutée* Montrer que p est le plus petit entier vérifiant (1).

PARTIE B

Dans cette partie on étudie deux cas particuliers.

Les notations sont celles de **A Q4**.

Q1 a) On suppose $p = n$. Montrer que f^n est l'endomorphisme nul. Quelle est la dimension de Ker f ?

b) Ici $n = 3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E et la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, de E, telle que $f(\varepsilon_1) = 0_E$, $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$ et $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$.

Écrire la matrice de f dans cette base et vérifier que $p = 3$.

Q2 On suppose ici que p est supérieur ou égal à 2 et que Ker $f^p = E$.

a) Montrer que pour tout élément k de $[\![0, p-1]\!]$, on peut définir un sous-espace vectoriel, non réduit au vecteur nul, supplémentaire de Ker f^k dans Ker f^{k+1}.

b) En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle f est représenté par une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes de la diagonale sont nuls.

c) On reprend l'exemple de **A Q3** avec $m = 0$. Déterminer par permutation des vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4, une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A_0 a les propriétés définies à la question 2 b.

PARTIE C

Le but de cette partie est la détermination de p lorsque f vérifie une certaine relation polynômiale.

a est un réel non nul et f est un endomorphisme de E qui vérifie :

$$f \neq a\ \mathrm{Id}_E,\ f^{n-1} \neq \Theta,\ f^{n-1} \circ (f - a\ \mathrm{Id}_E) = \Theta \text{ et } \forall k \in [\![0, n-2]\!],\ f^k \circ (f - a\ \mathrm{Id}_E) \neq \Theta \qquad (2)$$

p est toujours le plus petit entier vérifiant (1).

Q1 Montrer que 0 et a sont des valeurs propres de f et que ce sont les seules.

Q2 a) Montrer que pour tout entier k on a :

$$\mathrm{Ker}\, f^k \cap \mathrm{Ker}(f - a\ \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}.$$

b) En déduire que Ker f^{n-1} et $\mathrm{Ker}(f - a\ \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E (on pourra considérer leurs dimensions et utiliser l'égalité $f^{n-1} \circ (f - a\ \mathrm{Id}_E) = \Theta$).

Q3 *On se propose ici de démontrer l'égalité* $p = n - 1$.

a) Supposant vérifiée l'hypothèse : $p < n - 1$, justifier qu'alors Ker f^p et $\mathrm{Ker}(f - a\ \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

En déduire une contradiction avec (2).

b) Montrer que p ne peut pas être égal à n et conclure.
