SUJET 11

Rappel

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right).$

$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2,\ \sin p - \sin q = 2\,\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\,\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right).$

$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(a+k\pi) = (-1)^k\,\cos(a)$ et $\sin(a+k\pi) = (-1)^k\,\sin(a)$.

Pas de changement de variable ni d'intégration par parties sur des intégrales généralisées.

Dans tout le problème α est un réel strictement supérieur à 1 et $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$.

PARTIE I

Q1 k est élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $u_k = \displaystyle\int_0^\pi \cos(\lambda x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$. Montrer que :

$$u_k = \frac{(-1)^k \sin(\lambda\pi)}{\lambda^2 - k^2}\ \lambda\,.$$

Q2 Soient x un réel et n un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \Re e\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$.

Montrer que si x n'est pas un multiple de 2π :

$$C_n(x) = \frac{1}{2}\ \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\cdot$$

(suite géométrique ou récurrence...)

Q3 On pose : $\forall x \in]0,\pi],\ \Phi(x) = \dfrac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin(x/2)}$ et $\Phi(0) = 0$.

Montrer que Φ est continue sur $[0,\pi]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

Calculer $\Phi'(x)$ pour tout élément x de $]0,\pi]$.

Montrer enfin que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Prouver à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\lim_{\gamma\to+\infty}\int_0^\pi \Phi(x)\,\sin(\gamma x)\,\mathrm{d}x = 0$ (Riemann-Lebesgue... ne pas remplacer Φ par sa valeur).

Q4 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\ \int_0^\pi \phi(x)\,\sin\left(\frac{2n+1}{2}\ x\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\left((\frac{2n+1}{2})x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}\cdot$$

(partir d'un côté ou de l'autre et prendre son temps).

Q5 On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right)}{\sin \frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x$.

Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est constante. Calculer I_0.

En déduire que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}$$

PARTIE II

Q1 a) Montrer que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\, \mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\, \mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{\alpha}}\, \mathrm{d}x$ existent.

b) Montrer que $I = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t$ (poser $t = x^{\lambda}$). Montrer que $J = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t$ (poser $t = x^{-\lambda}$).

En déduire une relation simple entre I, J et K.

Q2 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose $A_n = \displaystyle\int_0^1 \Big[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k\Big] x^{\lambda-1}\, \mathrm{d}x$ et $B_n = \displaystyle\int_0^1 \Big[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, x^{k-1}\Big] x^{-\lambda}\, \mathrm{d}x$.

a) p est dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1]$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k\, x^k$.

Montrer que : $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k\, x^k - \frac{1}{1+x}\right| \leqslant x^{p+1}$.

b) En déduire une majoration simple de $|A_n - I|$ et $|B_n - J|$ pour n dans $\mathbb{N}^*$.

c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n = I$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} B_n = J$.

Q3 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Calculer A_n et B_n.

En utilisant I Q1 vérifier que : $A_n + B_n - \dfrac{2}{\sin(\lambda\pi)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{\lambda}$.

En déduire que :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{\alpha}}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda\pi}{\sin(\lambda\pi)} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

PARTIE III

Dans cette partie on considère la fonction $f : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^{\alpha}}}{1+t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t$. On rappelle que α est un élément de $]1,+\infty[$

Q1 Soit γ un réel positif ou nul.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\gamma}\, e^{-xt^{\alpha}}}{1+t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t$ converge pour tout réel x.

b) Montrer que si x est strictement positif, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{\gamma}\, e^{-xt^{\alpha}}}{1+t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma}\, e^{-xt^{\alpha}}}{1+t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t$ convergent.

Q2 a) Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^+$ (faire trois cas).

b) On se propose de montrer à la main que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donner la définition de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Soit ε un réel strictement positif.

Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} 1\,\mathrm{d}t + e^{-x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\alpha} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + f(0)e^{-x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\alpha}$.

Achever de prouver le résultat.

Q3 On se propose de montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^\alpha e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Soit c un éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ et h un réel non nul tel que $|h| \leqslant \dfrac{c}{2}$.

a) Justifier très rapidement que $g(c) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha}\ e^{-(c/2)t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existent.

b) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2}\, e^{|u|}$.

c) On pose $\Delta(h) = \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} + g(c)$. Montrer que :

$$|\Delta(h)| \leqslant |h| \int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha}\ e^{-(c/2)t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Conclure.

Dans la suite nous admettrons que f' est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (cela se montre sans difficulté).

Q4 On se propose de montrer que f est continue en 0.

a) Donner la définition de $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

b) Montrer que si x et A sont deux réels positifs :

$$|f(x)-f(0)| \leqslant \int_0^A |e^{-xt^\alpha} - 1|\,\mathrm{d}t + 2\int_A^{+\infty} \frac{2}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant x\int_0^A t^\alpha\,\mathrm{d}t + 2\int_A^{+\infty} \frac{2}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

c) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que l'on peut trouver un réel positif A tel que : $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{4}$

Achever de prouver le résultat.

Q5 a) Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = f(x) - x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$$

b) En déduire que pour réel x strictement positif :

$$f(x)e^{-x} = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

(on pourra considérer $h : x \to f(x)\,e^{-x}$ et intégrer h').

Montrer que ceci vaut encore pour $x = 0$.

Q6 Déduire de (tout) ce qui précède que : $\forall z \in]0,1[,\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$.
