Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Dans la suite les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles discrètes ou à densité.

Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la **fonction génératrice des moments** de X est la fonction numérique de la variable réelle

$$\boxed{M_X : u \to E\left(e^{uX}\right)}.$$

PRÉLIMINAIRE

Q1 **Inégalité de Markov** Ne pas rédiger.

Soit Y une variable aléatoire, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ admettant une espérance. Montrer, dans les cas suivants, que pour tout réel λ strictement positif :

$$P(Y \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(Y)}{\lambda}.$$

a) Y est une variable aléatoire discrète finie.

b) Y est une variable aléatoire à densité.

Q2 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant x + e^{x^2}$ (on pourra dériver deux fois $v : x \to e^{x^2} + x - e^x$ et remarquer que $e^{x^2-x} \geqslant e^{-1/4} > 1/2$ et que $v'(0) = 0$).

Q3 Soit γ un réel strictement positif. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |t^n| \leqslant \dfrac{n!}{\gamma^n}\, e^{\gamma\,|t|}$ (faire très simple, $e^u = \sum\limits_{k=} ...$).

PARTIE I : QUELQUES EXEMPLES

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q1 Déterminer M_X, avec précision, dans les cas suivants (on indiquera clairement le domaine de définition de M_X).

a) X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

b) X suit une loi de géométrique de paramètre p.

c) X suit une loi normale de paramètres 0 et 1.

d) X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

$(1 - p + pe^u$, $pe^u/(1 - (1 - p)e^u)$, $e^{u^2/2}$, $\frac{\lambda}{\lambda - u})$

Q2 a) n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant même loi qu'une variable aléatoire Y. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Soit u un élément du domaine de définition de M_Y. Montrer que $M_{S_n}(u)$ existe et l'exprimer en fonction de $M_Y(u)$.

b) Trouver M_X lorsque X suit une loi binômiale de paramètres r et p.

PARTIE II : LE CAS DES VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES FINIES

X est une variable aléatoire discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega)$ est de cardinal r et on pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$.

Q1 Montrer que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall i \in \mathbb{N}$, $M_X^{(i)}(0) = E(X^i)$.

Q2 On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la même loi que X.

On note m l'espérance de X et σ sont écart-type que l'on suppose strictement positif.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in \mathbb{R},\ M_{S_n^*}(u) = e^{-\frac{u\,m\,\sqrt{n}}{\sigma}} \left(M_X\Big(\dfrac{u}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\right)^n$.

b) Ecrire un développement limité de M_X d'ordre 2 au voisinage de 0 (utiliser Taylor-Young, cela se fait en deux lignes).

Ecrire un développement limité de $x \to \ln\big(M_X(x)\big)$ d'ordre 2 au voisinage de 0.

En déduire que pour tout réel u : $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{S_n^*}(u) = e^{\frac{u^2}{2}}$ (ici c'est plus délicat).

Moralité ?

Remarque $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{S_n^*}(u) = e^{\frac{u^2}{2}}$ vaut encore pour une variable X quelconque pourvu que M_X soit définie dans un voisinage de u.

PARTIE III : AUTOUR DE L'INÉGALITÉ DES GRANDES DÉVIATIONS

Dans cette partie on suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$). On pose $q = 1 - p$.

On considère toujours une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la même loi que X.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Q1 a) Soit a un réel. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [0, +\infty[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant \left(e^{-au}\, M_X(u)\right)^n.$$

(on pourra remarquer que l'événement $\left\{\frac{S_n}{n} \geqslant a\right\}$ coïncide avec l'événement $\left\{e^{uS_n} \geqslant e^{nau}\right\}$... dans le cas où u est strictement positif et utiliser le préliminaire).

b) Ici on considère un réel a appartenant à l'intervalle $]p, 1[$. On pose $\forall u \in [0, +\infty[,\ \varphi_a(u) = -au + \ln(p\, e^u + q)$.

Montrer que φ_a admet un minimum strictement négatif.

En déduire qu'il existe un réel strictement positif α_a tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-\alpha_a\, n}.$$

c) En s'inspirant de ce qui précède montrer que si b est un élément de $]0,p[$, il existe un réel β_b strictement positif tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant b\right) \leqslant e^{-\beta_b\, n}$$

(on pourra utiliser l'inégalité de Markov avec e^{-uS_n}).

Q2 Soit ε un réel, strictement positif et strictement inférieur à p et à q.

a) En utilisant la question précédente, montrer que l'on peut trouver un réel γ_ε strictement positif tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\, e^{-\gamma_\varepsilon\, n}$$

b) Comparer cette inégalité à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Que cela vous inspire-t-il pour la loi faible des grands nombres ?

Q3 ε est un réel strictement positif et n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer en utilisant Q1 a) que : $\forall u \in]0,+\infty[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\varepsilon\right) \leqslant \left(e^{-\varepsilon u}\left(pe^{qu} + qe^{-pu}\right)\right)^n$.

b) En déduire que : $\forall u \in]0,+\infty[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\varepsilon\right) \leqslant \left(e^{-\varepsilon u}\left(p\, e^{q^2u^2} + q\, e^{p^2u^2}\right)\right)^n \leqslant \left(e^{-\varepsilon u + u^2}\right)^n$ (on pourra utiliser le préliminaire).

c) Montrer enfin que $P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\varepsilon\right) \leqslant e^{-\frac{\varepsilon^2}{4}\, n}$.

d) On montre de même que $P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant p-\varepsilon\right) \leqslant e^{-\frac{\varepsilon^2}{4}\, n}$. Prouver alors que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{4}\, n}.$$

PARTIE IV : LE CAS DES VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

Q0 Dans cette question X est une variable aléatoire à densité et f en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que le domaine de définition de M_X est un intervalle (soit à montrer que si a et b sont deux éléments du domaine de définition de M_X, le segment d'extrémités a et b est contenu dans le domaine de définition de M_X).

Q1 X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi gamma de paramètres b et τ.

a) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^{(*)}$, X possède un moment d'ordre k qui vaut $b^k\, \tau\,(\tau+1)\,(\tau+2)\cdots(\tau+k-1)$.

b) Montrer que le domaine de définition de M_X est $]-\infty, \frac{1}{b}[$ et que :

$$\forall u \in \left]-\infty, \frac{1}{b}\right[,\ M_X(u) = \frac{1}{(1-b\,u)^\tau}.$$

c) Montrer que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine et vérifier que $\forall k \in \mathbb{N},\ M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

Q2 On se propose de généraliser le résutat précédent.

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant f pour densité.

On suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha],\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\,t}\, f(t)\, \mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Ainsi M_X est au moins définie sur $[-\alpha, \alpha]$.

a) Montrer que si x est dans $[-\alpha, \alpha]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x|\,|t|}\, f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x|t|}\, f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et x un élément de $]-\alpha, \alpha[$. Soit γ un élément de $]0, \alpha - |x|[$.

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^n\, e^{|x|\,|t|}\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et majorée par $\dfrac{n!}{\gamma^n} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha\,|t|}\, f(t)\,\mathrm{d}t$ (on pourra utiliser le point 3 du préliminaire).

En déduire que $L_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{xt}\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et x un élément de $]-\alpha, \alpha[$.

On se propose de montrer que L_n est dérivable en x et que $L_n'(x) = L_{n+1}(x)$.

Soit h un réel non nul tel que : $|h| \leqslant \dfrac{\alpha - |x|}{2}$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |e^{(x+h)\,t} - e^{x\,t} - ht\, e^{xt}| \leqslant \frac{h^2\, t^2}{2}\, e^{\frac{|x|+\alpha}{2}\,|t|}$$

En déduire que $|L_n(x+h) - L_n(x) - h\, L_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{n+2}\, e^{\frac{|x|+\alpha}{2}\,|t|}\, f(t)\,\mathrm{d}t$. Conclure.

d) Montrer que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$ et que pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $E(X^k)$ existe et vaut $M_X^{(k)}(0)$.

e) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et x un élément de $\left]-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right[$.

Ici le texte a été modifié et la correction est d'un esprit un peu différent.

Montrer que : $\left| M_X(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M_X^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{n+1}\, e^{|xt|}\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit γ un élément de $]|x|, \alpha - |x|[$ ($|x| < \frac{\alpha}{2}$...).

Montrer que :

$$\left| M_X(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{M_X^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leqslant \left| \frac{x}{\gamma} \right|^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha\,|t|}\, f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que :

$$M_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_X^{(k)}(0)}{k!}\, x^k.$$