Ce qui suit propose un algorithme (algorithme de Souriau ou de Fadeev-Frame) pour calculer les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes et pour inverser cette matrice lorsqu'elle est inversible.

Dans toute la suite n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1 tr est l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, qui à un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace $\mathrm{tr}(A)$ c'est à dire la somme des éléments de sa diagonale.

a) Montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

c) Montrer que si A et D sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors elles ont même trace (on pourra utiliser **b)**).

Dans toute la suite A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n.

On pose $P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n) = a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2 \cdots + a_{n-1}\,X^{n-1} + X^n$.

Q2 **a)** Montrer que l'on peut trouver un élément V de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que $V^{-1}AV$ soit la matrice diagonale

$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Prouver alors que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{tr}(A^k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

b) Pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$ on pose $S_k = \lambda_1^k + \lambda_1^k \cdots + \lambda_n^k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

On considère le système linéaire, dont les inconnues sont u_1, u_2, ..., u_n, défini par les n équations suivantes :

$$S_1 + u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2,n]\!],\ S_k + u_1\,S_{k-1} + u_2\,S_{k-2} + \cdots + u_{k-2}\,S_2 + u_{k-1}\,S_1 + k\,u_k = 0.$$

b1) Écrire la matrice ou la forme matricielle de ce système et en déduire qu'il admet une solution et une seule.

b2) On rappelle que $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n) = a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2 \cdots + a_{n-1}\,X^{n-1} + X^n$.

Préciser le coefficient de X^{n-1} dans les deux membres de l'égalité. Même chose pour le coefficient de X^{n-2}.

Vérifier alors que $u_1 = -S_1 = a_{n-1}$ et $u_2 = -\dfrac{1}{2}\big(S_2 + u_1\,S_1\big) = a_{n-2}$.

On admet momentanément que $\forall k \in [\![1,n]\!],\ u_k = a_{n-k}$.

Q3 **a)** Montrer que $P(D) = 0_n$. En déduire que $P(A) = 0_n$.

b) Montrer que A est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.

Montrer que la matrice A^{-1}, lorsqu'elle existe, s'écrit comme un polynôme en A.

Q4 On considére la suite $(B_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la suite $(d_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de réels définies par :

$$\begin{cases} d_1 = -\,\mathrm{tr}(A),\ B_1 = A + d_1\,I_n \\ \forall k \in [\![2,n]\!],\ d_k = -\dfrac{1}{k}\,\mathrm{tr}(B_{k-1}\,A) \text{ et } B_k = B_{k-1}\,A + d_k\,I_n \end{cases}.$$

a) Établir que pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$, $B_k = A^k + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} d_i\,A^{k-i}$.

b) Montrer que pour tout élément k de $[\![2,n]\!]$, $d_k = -\dfrac{1}{k}\left(\mathrm{tr}(A^k) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} d_i\ \mathrm{tr}(A^{k-i})\right)$.

En déduire que $\forall k \in [\![1,n]\!],\ d_k = a_{n-k}$ et que $B_n = 0_n$.

c) Prouver que A est inversible si et seulement si $d_n \neq 0$. Exprimer A^{-1} lorsqu'elle existe en fonction de B_{n-1} et d_n.

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

d1) Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

d2) Prouver que A est inversible et utiliser la méthode étudiée ci-dessous pour calculer A^{-1}.

Q5 On se propose ici de montrer le résultat admis dans la question 2 et un peu plus.

Q est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré n et dont les n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur ordre de multiplicité, sont α_1, α_2, ..., α_n.

On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k\, X^k$. Ainsi $Q = b_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$. Notons que b_n n'est pas nul.

On pose encore $\forall k \in \mathbb{N},\ T_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$ (notons que $T_0 = n$ à un événtuel abus près).

On se propose de montrer que l'on peut calculer par récurrence les éléments de la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir des coefficients de Q.

a) Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. On note Q_i le quotient de Q par $X - \alpha_i$.

Montrer que $Q_i = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=r}^{n} b_k\, \alpha_i^{k-r} \right) X^{r-1}$ (on pourra partir de $Q = Q - Q(\alpha_i)$ et factoriser $X - \alpha_i$).

b) En remarquant que $Q' = \sum_{i=1}^{n} Q_i$, montrer que $\forall r \in [\![1,n]\!],\ r\, b_r = \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j}\, T_j$.

En déduire que $\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ (n-k)\, b_{n-k} = \sum_{j=0}^{k} b_{n-k+j}\, T_j \quad (\bigstar)$.

Exprimer alors, pour k dans $[\![1,n-1]\!]$, T_k en fonction de T_0, T_1, ..., T_{k-1} et des coefficients de Q.

c) Soit k un élément de $[\![n,+\infty[\![$.

Montrer que $\sum_{j=0}^{n} b_j\, T_{j+k-n} = 0$ et exprimer T_k en fonction de T_{k-n}, T_{k-n+1}, ..., T_{k-1} et des coefficients de Q.

Vérifier que l'égalité $(\bigstar)$ vaut encore pour $k = n$.

d) Montrer le résultat admis à la question Q2.

Q6 On revient encore à la matrice A et au polynôme P. On se propose d'écrire un programme en TP4 qui calcule les coefficients du polynôme P à partir de la matrice A et donne A^{-1} lorsque cela est possible.

Notons qu'au début de ce programme on aura les déclarations suivantes :

```
Const DimMax=20;
 Type Poly=array[0..DimMax] of real;
      Matrice=[1..DimMax,1..DimMax] of real;
```

Le but est de rendre le programme principal minimal. On écrira donc des fonctions ou procédures pour exécuter les tâches principales. Le programme doit impérativement contenir la fonction et les trois procédures suivantes.

- Une fonction Trace dont la première ligne est

```
Function Trace (n:integer;A:matrice):real;
```

• Une procédure EntreMatrice dont la première ligne est :

```
Procedure EntreMatrice(n:integer;Var A:matrice);
```

• Une procédure EcritMatrice dont la première ligne est :

```
Procedure EcritMatrice(n:integer;A:matrice);
```

• Une procédure MultiplieMatrice dont la première ligne est :

```
Procedure MultiplieMatrice(n:integer;U,V:matrice;Var W:matrice);
```

Ecrire le programme demandé.
