Q1 Préliminaire.-

a.. Tr est clairement une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$Tr(\lambda A+B)=Tr\left((\lambda a_{ij}+b_{ij})\right)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}+b_{ii})=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\lambda\,Tr(A)+Tr(B)$

Finalement Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ donc une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b.. Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$Tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}\,a_{ik}\right)=Tr(BA)$.

$Tr(AB)=Tr(BA)$.

c.. Soient A et D deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\exists V\in GL_n(\mathbb{R}),\quad D=V^{-1}AV.\quad Tr(D)=Tr(V^{-1}AV)=Tr\left(V^{-1}(AV)\right)=Tr\left((AV)V^{-1}\right)=Tr(A)$.

deux matrices semblables ont même trace.

Q2 a) Soit X_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i et ceci pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

A est diagonalisable et les valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ de A sont deux à deux distinctes. Ainsi $\mathcal{B}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit V la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

$V^{-1}AV$ est la matrice diagonale $D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & (0)\\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \ddots\ \lambda_n\end{bmatrix}$. $\qquad A=VDV^{-1}$.

$\forall k\in\mathbb{N},\quad A^k=(VDV^{-1})^k=VD^kV^{-1}$; $\forall k\in\mathbb{N}$, A^k et D^k sont semblables.

Ainsi $\forall k\in\mathbb{N},\ Tr(A^k)=Tr(D^k)=Tr\left(\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & (0)\\ & \lambda_2^k & \\ (0) & & \ddots\ \lambda_n^k\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ Tr(A^k)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k$.

b) Donnons la forme matricielle de ce système (S)

$(u_1,u_2,\dots,u_n)$ solution de (S) $\Leftrightarrow$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ S_1 & 2 & 0 & & \vdots \\ S_2 & S_1 & 3 & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ S_{n-1} & \cdots & S_2 & S_1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_1 \\ -S_2 \\ -S_3 \\ \vdots \\ -S_n \end{pmatrix}$$

La matrice de ce système est triangulaire inférieure sans zéro sur sa diagonale ; elle est donc inversible. Ainsi le système est de Cramer et il possède une solution et une seule.

$P(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

Le coefficient de X^{n-1} dans P est à la fois $-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_n$ et a_{n-1}.

Le coefficient de X^{n-2} dans P est à la fois $\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j$ et à la fois a_{n-2}.

Ainsi $a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = -S_1$ et $a_{n-2} = \sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j$.

Notons $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ la solution du système.

$S_1+u_1=0$ donc $u_1=-S_1=a_{n-1}$; $u_1=a_{n-1}$.

$S_2+u_1S_1+2u_2=0$; $u_2=-\frac{1}{2}(S_2+u_1S_1) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - S_1^2\right) = -\frac{1}{2}(S_2-S_1^2)$.

Or : $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j$ donc $S_1^2 = S_2 + 2a_{n-2}$; $S_2 - S_1^2 = -2a_{n-2}$.

donc $u_2 = -\frac{1}{2}(-2a_{n-2}) = a_{n-2}$; $u_2 = a_{n-2}$.

Nous généraliserons ce résultat à la fin. Admettons donc que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k=a_{n-k}$.

Q3 a) Pour montrer que $P(A)=0$ il suffit de montrer que : $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX=0$.

Rappelons que $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$.

Pour montrer que : $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ P(A)X=0$ il suffit alors de prouver que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ P(A)X_i=0$. Fixons alors i dans $[\![1,n]\!]$ et montrons que $P(A)X_i=0$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k) = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(x-\lambda_k)\right)(x-\lambda_i)$.

Ainsi $P(A) = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(A-\lambda_k I_n)\right)(A-\lambda_i I_n)$.

Donc $P(A)X_i = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(A-\lambda_k I_n)\right)(A-\lambda_i I_n)X_i$. Or $(A-\lambda_i I_n)X_i = AX_i - \lambda_i X_i = \lambda_i X_i - \lambda_i X_i = 0$

Donc $P(A)X_i = 0$. Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!], P(A)X_i = 0$; $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), P(A)X = 0$ et donc $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exercice.. Retrouver ce résultat en partant de $P(A)$ semblable à $P(D)$. On peut faire deux versions (en considérant les 2 expressions de P).

b) Montrons que A est inversible ssi $a_0 \neq 0$.

→ Supposons A inversible. 0 n'est pas valeur propre de A; $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \neq 0$. Ainsi 0 n'est pas une racine de P. Donc $P(0) \neq 0$. Or $P(0) = a_0$.

Par conséquent si A est inversible $a_0 \neq 0$.

cette idée donne, si on le souhaite, directement A inversible $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$!

→ Supposons $a_0 \neq 0$. $0 = P(A) = A^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$

$a_0 I_n = -A^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^k = A\left[-A^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1}\right]$

$I_n = A\left(\frac{1}{a_0}\left[-A^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1}\right]\right)$. Ceci prouve que A est inversible et que :

$A^{-1} = \frac{1}{a_0}\left[-A^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1}\right]$. Posons $Q = \frac{1}{a_0}\left[-X^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k X^{k-1}\right]$

$Q \in \mathbb{R}[X]$ et $A^{-1} = Q(A)$.

CL.. <u>A est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.</u>

<u>Si A est inversible, A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.</u>

Q4 Etude d'une suite de matrices :

a) Montrons que $\forall k \in [\![1,n]\!],\ B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}$.

→ $A^1 + \sum_{i=1}^{1} d_i A^{1-i} = A + d_1 I_n = B_1$; la propriété est vraie pour $k=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

$B_{k+1} = B_k A + d_{k+1} I_n = \left(A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}\right)A + d_{k+1} I_n = A^{k+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} d_i A^{k+1-i} + d_{k+1} I_n}_{\sum_{i=1}^{k+1} d_i A^{k+1-i}}$

Par conséquent $B_{k+1} = A^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} d_i A^{k+1-i}$; ceci achève la récurrence. $\forall k \in [\![1,n]\!],\ B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}$

b) Si $k=1$: $d_1 = -\mathrm{Tr}(A)$.

Soit $k \in [\![2,n]\!]$. $d_k = -\frac{1}{k}\mathrm{Tr}(B_{k-1}A) = -\frac{1}{k}\mathrm{Tr}\left[\left(A^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-1-i}\right)A\right]$

$$d_k = -\frac{1}{k}\left[\mathrm{Tr}\left(A^k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-i}\right)\right]$$

$$d_k = -\frac{1}{k}\left[\mathrm{Tr}(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \mathrm{Tr}(A^{k-i})\right].$$

Rappelons que : $\forall j \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}(A^j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j = S_j$. Les relations précédentes donnent alors :

$$\begin{cases} S_1 + d_1 = 0 \\ \forall k \in [\![2,n]\!],\ k d_k + S_k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i S_{k-i} = 0 \end{cases}$$; c'est à dire :

$$\begin{cases} S_1 + d_1 = 0 \\ S_k + d_1 S_{k-1} + d_2 S_{k-2} + \dots + d_{k-2} S_2 + d_{k-1} S_1 + k d_k = 0 \text{ pour tout } k \in [\![2,n]\!] \end{cases}$$

$(d_1, d_2, \dots, d_n)$ est alors solution du système de Q 2.b

Par conséquent : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ d_k = a_{n-k}$.

Ainsi $B_n = A^n + \sum_{i=1}^{n} d_i A^{n-i} = A^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} A^{n-i} = A^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j A^j = P(A) = 0_n$.

$B_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. c) Comme $d_n = a_{n-n} = a_0$: A est inversible si et seulement si $d_n \neq 0$.

Supposons $d_n \neq 0$. $0 = B_n = B_{n-1}A + d_n I_n$; $\left(-\frac{1}{d_n}B_{n-1}\right)A = I_n$; $A^{-1} = -\frac{1}{d_n}B_{n-1}$.

Remarque. $d_1, d_2, \dots, d_n$ donnent $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ qui donnent P qui donne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\begin{pmatrix} 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}} \quad \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3-\lambda}{2}L_1}{\begin{pmatrix} 2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\frac{(3-\lambda)^2}{2} & \lambda-3 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}}$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \left(1 - \frac{(3-\lambda)^2}{2}\right)L_2$ donne $\begin{pmatrix} 2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & \underbrace{-(3-\lambda)\left[1-\frac{(3-\lambda)^2}{2}\right]+\lambda-3}_{S(\lambda)} \end{pmatrix}$

$S(\lambda) = (\lambda-3)\left[1+1-\frac{(3-\lambda)^2}{2}\right] = \frac{\lambda-3}{2}\left[4-(3-\lambda)^2\right] = \frac{\lambda-3}{2}(2+3-\lambda)(2-3+\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda-3)(5-\lambda)(\lambda-1)$

$A'_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda-3)(5-\lambda)(\lambda-1) \end{pmatrix}$ est une réduite de Gauss $A_\lambda - \lambda I_3$.

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3$ non inversible $\Leftrightarrow A'_\lambda$ non inversible $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\lambda-3)(5-\lambda)(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1,3,5\}$.

$\underline{\underline{Sp(A) = \{1,3,5\}}}$.

<u>Remarque</u> .. $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; $SEP(A,3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ e ; $SEP(A,5) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A est inversible car 0 n'est pas valeur propre de A.

$d_1 = -Tr(A) = -9$ et $B_1 = A + d_1 I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$:

$\underline{\underline{d_1 = -9 \text{ et } B_1 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}}}$.

$d_2 = -\frac{1}{2} Tr(B_1 A) = -\frac{1}{2} Tr\left(\begin{pmatrix} -16 & -3 & 2 \\ -6 & -14 & -6 \\ 2 & -3 & -16 \end{pmatrix}\right) = 23$. $\underline{\underline{d_2 = 23}}$.

$B_2 = B_1 A + d_2 I_3 = \begin{pmatrix} -16+23 & -3 & 2 \\ -6 & -14+23 & -6 \\ 2 & -3 & -16+23 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 9 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = B_2}}$

$d_3 = -\frac{1}{3} Tr(B_2 A) = -\frac{1}{3} Tr\left(\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}\right) = -15$. $\underline{\underline{d_3 = -15}}$

$B_3 = B_2 A + d_3 I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} - 15\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$!

Ainsi $a_0 = d_3 = -15$, $a_1 = d_2 = 23$ et $a_2 = d_1 = -9$

Donc $P = X^3 - 9X^2 + 23X - 15 = (X-1)(X^2 - 8X + 15) = (X-1)(X-3)(X-5)$ ... et la boucle est bouclée.

$A^{-1} = -\frac{1}{d_3} B_2$. $\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 9 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}}}$.

Q5 a) $\varphi = \varphi - \varphi(\alpha_i) = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell X^\ell - \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell \alpha_i^\ell = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell (X^\ell - \alpha_i^\ell)$.

Or $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $X^\ell - \alpha_i^\ell = (X-\alpha_i)\left(\sum_{r=1}^{\ell} \alpha_i^{\ell-r} X^{r-1}\right)$.

Ainsi $\varphi = (X-\alpha_i) \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \left(\sum_{r=1}^{\ell} \alpha_i^{\ell-r} X^{r-1}\right)$. Alors $\varphi_i = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \left(\sum_{r=1}^{\ell} \alpha_i^{\ell-r} X^{r-1}\right)$.

$$\varphi_i = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{\ell=r}^{n} b_\ell \alpha_i^{\ell-r}\right) X^{r-1}.$$

Ici je pense !!!

b) $\varphi = b_n \prod_{\ell=1}^{n} (X-\alpha_\ell)$. $\varphi' = b_n \sum_{i=1}^{n} \left((X-\alpha_i)' \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n} (X-\alpha_\ell)\right)$

$$\varphi' = \sum_{i=1}^{n} \left(b_n \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n} (X-\alpha_\ell)\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i . \quad \varphi' = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i .$$

je pense encore !!

Or $\varphi' = \left(\sum_{r=0}^{n} b_r X^r\right)' = \sum_{r=1}^{n} b_r r X^{r-1}$

donc $\sum_{r=1}^{n} b_r r X^{r-1} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{\ell=r}^{n} b_\ell \alpha_i^{\ell-r}\right) X^{r-1}\right)$

$\sum_{r=1}^{n} b_r r X^{r-1} = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{\ell=r}^{n} \left(b_\ell \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\ell-r}\right)\right) X^{r-1}$.

Alors $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $b_r r = \sum_{\ell=r}^{n} \left(b_\ell \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\ell-r}\right) = \sum_{\ell=r}^{n} b_\ell T_{\ell-r} \overset{j=\ell-r}{=} \sum_{j=0}^{n-r} b_{j+r} T_j$.

$$\forall r \in [\![1,n]\!],\ r b_r = \sum_{j=0}^{n-r} b_{j+r} T_j .$$

Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. $n-k \in [\![1,n]\!]$ donc $(n-k) b_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-(n-k)} b_{j+n-k} T_j$.

Ainsi $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $(n-k) b_{n-k} = \sum_{j=0}^{k} b_{n-k+j} T_j$. (*)

Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. $(n-k) b_{n-k} = \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j} T_j + b_n T_k$

donc $T_k = \frac{1}{b_n}\left[(n-k) b_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j} T_j\right]$.

<u>Remarque</u>.. $T_0 = n$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $T_k = \frac{1}{b_n}\left[(n-k)b_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j} T_j\right]$

ceci permet de calculer $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ en fonction des coefficients $b_0, b_1, \dots, b_n$ de φ.

c) Soit $k \in [\![n, +\infty[\![$.

$$\sum_{j=0}^{n} b_j T_{j+k-n} = \sum_{j=0}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{j+k-n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{k-n} \sum_{j=0}^{n} b_j \alpha_i^{j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{k-n} \varphi(\alpha_i).$$

Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(\alpha_i) = 0$. Par conséquent $\sum_{j=0}^{n} b_j T_{j+k-n} = 0$.

$\forall k \in [\![n, +\infty[\![$, $\sum_{j=0}^{n} b_j T_{j+k-n} = 0$. ▲

Donc $\forall k \in [\![n, +\infty[\![$, $\sum_{j=0}^{n-1} b_j T_{j+k-n} + b_n T_k = 0$. Or b_n n'est pas nul donc :

$\forall k \in [\![n, +\infty[\![$, $T_k = \frac{1}{b_n}\left(- \sum_{j=0}^{n-1} b_j T_{j+k-n}\right)$.

Pour $k = n$, ▲ donne : $\sum_{j=0}^{n} b_j T_j = 0$.

ceci peut encore s'écrire $(n-n) b_{n-n} = \sum_{j=0}^{n} b_{n-n+j} T_j$.

Ainsi (*) vaut encore pour $k = n$.

<u>d)</u> Notons le résultat admis à la question 2.

Rappelons que $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ et

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$. Posons en outre $S_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 = n$ et $a_n = 1$.

En appliquant (*) à P il vient alors :

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(n-k) a_{n-k} = \sum_{j=0}^{k} a_{n-k+j} S_j$.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $(n-k) a_{n-k} = \sum_{j=1}^{k} a_{n-k+j} S_j + a_{n-k} S_0 = \sum_{j=1}^{k} a_{n-k+j} S_j + n a_{n-k}$

Alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $-k a_{n-k} = \sum_{j=1}^{k} a_{n-k+j} S_j$; $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $k a_{n-k} + \sum_{j=1}^{k} a_{n-k+j} S_j = 0$

Alors $a_{n-1} + a_n S_1 = 0$ donc $a_{n-1} + S_1 = 0$ et

$\forall k \in [\![2,n]\!]$, $k\, a_{n-k} + \sum_{j=1}^{k-1} a_{n-k+j} S_j + a_n S_k = 0$. Alors

$$\begin{cases} a_{n-1} + S_1 = 0 \\ k a_{n-k} + a_{n-k+1} S_1 + a_{n-k+2} S_2 + \dots + a_{n-k+(k-2)} S_{k-2} + a_{n-k+(k-1)} S_{k-1} + S_k = 0 \text{ pour tout } k \in [\![2,n]\!] \end{cases}$$

ceci s'écrit encore

$$\begin{cases} S_1 + a_{n-1} = 0 \\ S_k + a_{n-k+(k-1)} S_{k-1} + a_{n-k+(k-2)} S_{k-2} + \dots + a_{n-k+2} S_2 + a_{n-k+1} S_1 + k\, a_{n-k} = 0 \text{ pour tout } k \in [\![2,n]\!]. \end{cases}$$

Ceci prouve que $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)$ est solution du système de Q 2 b)

Donc $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u_k = a_{n-k}$.

Q6 Rien à dire pour la fonction et les trois procédures.

Programme principal.. On calcule, à l'aide d'une boucle, successivement d_1 et B_1, d_2 et $B_2, \dots, d_{n-1}$ et B_{n-1}. Il reste plus alors qu'à calculer d_n.

- $d_1, d_2, \dots, d_n$ sont stocké(e)s dans le tableau p. En mettant 1 dans p[0] on a alors les coefficients du polynôme P dans ce tableau. Notons que p[k] contient le coefficient de X^{n-k} dans P.
- Notons que dans la boucle, b contient successivement $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ et sa contient successivement $BA, BA^2, \dots, BA^{n-1}$ et a été initialisé à A.
- Si p[n] = 0 la matrice A n'est pas inversible ($a_0 = 0$!).
- Si p[n] ≠ 0 la matrice A est inversible. Rappelons que, dans ce cas, $A^{-1} = -\frac{1}{d_n} B_{n-1}$. Ainsi pour obtenir A^{-1} il suffit de multiplier par $-\frac{1}{p[n]}$.

```
program souriau;

uses crt,printer;

const DimMax=20;
type Poly=array[0..DimMax] of real;
     Matrice=array[1..DimMax,1..DimMax] of real;


(**************************************************************************)

procedure EcritMatrice(m:integer;A:matrice);
var i,j:integer;
begin
writeln(lst);
for i:=1 to m do
    begin
    for j:=1 to m do write(A[i,j]:15:10);
    writeln;
    end;
end;

(**************************************************************************)

function trace(n:integer;A:Matrice):real;
var i:integer;s:real;

begin
s:=0;
for i:= 1 to n do s:=s+A[i,i];
trace:=s;
end;

(**************************************************************************)

procedure MultiplieMatrice(n:integer;U,V:Matrice;var W:Matrice);

var i,j,k:integer;s:real;
begin
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
    begin
    s:=0;
    for k:=1 to n do s:=s+U[i,k]*V[k,j];
    W[i,j]:=s;
    end;
end;

(**************************************************************************)

procedure EntreMatrice(n:integer;var A:Matrice);
var i,j:integer;

begin
for j:=1 to n do
for i:=1 to n do
    begin
    write('Coefficient de la ligne numéro ',i);
    write(' et de la colonne numéro ',j,' : ');readln(A[i,j]);
    end;
end;

(**************************************************************************)
```