PARTIE I PRELIMINAIRE

Q1 a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; $x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; $x - \ln(1+x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Alors $w_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$.

La série de terme général $\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ étant convergente et à termes positifs les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général w_n.

<u>La série de terme général w_n converge</u>.

b) Soit $n \in [\![1,+\infty[\![$. $C_n = C_n - C_1 + C_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(C_{k+1}-C_k) + C_1 \overset{C_1=1}{=} \sum_{k=1}^{n-1}(C_{k+1}-C_k) + 1$,

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $C_{k+1} - C_k = \sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i} - \ln(k+1) - \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} + \ln k = \frac{1}{k+1} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $C_{k+1} - C_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} + w_k$.

Alors $C_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} w_k + 1 = \frac{1}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} w_k + 1$.

$C_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} w_k$; ainsi $\lim_{n\to+\infty} C_n = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} w_k$.

La suite $(C_n)_{n\geq 1}$ converge et a pour limite $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.

Q2 a) Soit $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. $|x|>1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right| = +\infty$,

la suite de terme général $\frac{x^n}{n}$ ne converge pas vers 0 ; la série de terme général $\frac{x^n}{n}$ diverge.

Si $x=1$, $\frac{x^n}{n} = \frac{1}{n}$ et la série de terme général $\frac{x^n}{n}$ diverge encore.

<u>Si x est élément de $]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$ la série de terme général $\frac{x^n}{n}$ diverge</u>.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [-1,1[$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\,dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$

$$\forall x \in [-1,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt.$$

Soit $x \in [-1,1[$. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = \left[-\ln|1-t|\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln|1-x| - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

Montrons alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

$t \mapsto \frac{1}{1-t}$ croissante sur $[0,x]$

1er Cas.. $x \in [0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \dfrac{t^n}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x} t^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt = \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{n+1}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{n+1}\right) = 0$ donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

$\frac{1}{1-t} \leq 1$ car $t \leq 0$

2ème Cas.. $x \in [-1,0[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| = \left|\int_x^0 \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \overset{x\leq 0}{\leq} \int_x^0 \frac{|t|^n}{|1-t|}\,dt = \int_x^0 \frac{|t|^n}{1-t}\,dt \leq \int_x^0 |t|^n\,dt.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leq \int_x^0 (-1)^n t^n\,dt = (-1)^n\left(-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0.$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right) = -\ln(1-x)$.

Pour tout x dans $[-1,1[$, la série de terme général $\frac{x^n}{n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

PARTIE II

(Q1) a) • Soit x un élément de $]-\infty,1]$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $(\ln n)^p \geqslant 1$. $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $\dfrac{(\ln n)^p}{n^x} \geqslant \dfrac{1}{n^x} \geqslant 0$

La divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^x}$ $(x \leqslant 1)$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la divergence de la série de terme général $\dfrac{(\ln n)^p}{n^x}$.

Ainsi x n'appartient pas au domaine de f_p.

• Soit x un élément de $]1,+\infty[$ et soit $p \in \mathbb{N}$.

Soit y un élément de $]1,x[$. Par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^p}{n^{x-y}} = 0$ car $x-y$ est strictement positif.

Ainsi $\exists q \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant q \Rightarrow \dfrac{(\ln n)^p}{n^{x-y}} \leqslant 1$.

Alors $\forall n \in [\![q,+\infty[\![$, $0 \leqslant \dfrac{(\ln n)^p}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^y}$. La convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^y}$ $(y>1)$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $\dfrac{(\ln n)^p}{n^x}$.

Ainsi x appartient au domaine de f_p.

Finalement, pour tout p dans $\mathbb{N}$, le domaine de définition de f_p est $I =]1,+\infty[$.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

b) Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leqslant b$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^a \leqslant n^b$ et $(\ln n)^p \geqslant 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{(\ln n)^p}{n^b} \leqslant \dfrac{(\ln n)^p}{n^a}$. Alors $f_p(b) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(\ln n)^p}{n^b} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(\ln n)^p}{n^a} = f_p(a)$.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, f_p est décroissante sur $I =]1,+\infty[$.

Q2 $a \in I$ et $p \in \mathbb{N}$. $h \in \mathbb{R}^*$ et $|h| \leq \frac{a-1}{2}$.

a) $\ell : u \mapsto e^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. $\forall u \in \mathbb{R}$, $\ell'(u) = \ell''(u) = \ell(u) = e^u$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à ℓ à l'ordre 1 donne :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |\ell(u) - \ell(0) - u\ell'(0)| \leq \frac{|u|^2}{2} \max_{t \in [0,u]} |\ell''(t)|.$$

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \max_{t \in [0,u]} e^t.$$

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \max_{t \in [0,u]} e^t = e^{\max(0,u)} \leq e^{|u|}.$$

Ainsi $\underline{\underline{\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left|\frac{1}{n^h} - 1 + h\ln n\right| = \left|e^{(-h\ln n)} - 1 - (-h\ln n)\right| \leq \frac{(-h\ln n)^2}{2} e^{|-h\ln n|}$.

$$\left|\frac{1}{n^h} - 1 + h\ln n\right| \leq \frac{h^2(\ln n)^2}{2} e^{|h|\ln n} = \frac{|h|^2(\ln n)^2}{2} n^{|h|}.$$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{1}{n^h} - 1 + h\ln n\right| \leq \frac{|h|^2(\ln n)^2}{2} n^{|h|}}}.$$

b) $a \in]1,+\infty[$ donc $\frac{a+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$; $\frac{a+1}{2} \in]1,+\infty[$.

$$a - |h| \underset{|h| \leq \frac{a-1}{2}}{\geq} a - \frac{a-1}{2} = \frac{a+1}{2} > 1 ;\quad a - |h| \in]1,+\infty[.$$

$$a + h \underset{-h \leq |h|}{\geq} a - |h| > 1 ;\quad a + h \in]1,+\infty[.$$

Par conséquent : $\underline{\underline{\frac{a+1}{2},\ a - |h| \text{ et } a + h \text{ sont des éléments de } I}}$.

Posons $\Delta(h) = \frac{f_p(a+h) - f_p(a)}{h} + f_{p+1}(a)$.

$$h\Delta(h) = f_p(a+h) - f_p(a) + h f_{p+1}(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(\ln n)^p}{n^{a+h}} - \frac{(\ln n)^p}{n^a} + \frac{h(\ln n)^{p+1}}{n^a}\right].$$

$$h\,\Delta(h) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(\ln n)^p}{n^a}\left[\frac{1}{n^h}-1+h\ln n\right]\right).$$

Soit $r\in\mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{(\ln n)^p}{n^a}\left[\frac{1}{n^h}-1+h\ln n\right]\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{r}\left(\frac{(\ln n)^p}{n^a}\left|\frac{1}{n^h}-1+h\ln n\right|\right).$$

$$\left|\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{(\ln n)^p}{n^a}\left[\frac{1}{n^h}-1+h\ln n\right]\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{r}\left(\frac{(\ln n)^p}{n^a}\,\frac{|h|^2(\ln n)^2}{2}\,n^{|h|}\right).$$

$$\left|\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{(\ln n)^p}{n^a}\left[\frac{1}{n^h}-1+h\ln n\right]\right)\right| \leq \frac{|h|^2}{2}\sum_{n=1}^{r}\frac{(\ln n)^{p+2}}{n^{a-|h|}} \underset{(*)}{\leq} \frac{|h|^2}{2}\sum_{n=1}^{\boxed{+\infty}}\frac{(\ln n)^{p+2}}{n^{a-|h|}}.$$

(*) La série de terme général $\dfrac{(\ln n)^{p+2}}{n^{a-|h|}}$ est convergente ($a-|h|>1$) et à termes positifs ; sa somme majore la suite de ses sommes partielles.

Ainsi $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{(\ln n)^p}{n^a}\left[\frac{1}{n^h}-1+h\ln n\right]\right)\right| \leq \frac{|h|^2}{2}\,f_{p+2}(a-|h|)$.

En faisant tendre alors r vers $+\infty$ on obtient : $|h\,\Delta(h)| \leq \frac{|h|^2}{2}f_{p+2}(a-|h|)$.

En divisant par $|h|$ il vient $|\Delta(h)| \leq \frac{|h|}{2}f_{p+2}(a-|h|)$

Observons que : $a-|h| \geq a-\frac{a-1}{2} = \frac{a+1}{2}$ donc $f_{p+2}(a-|h|) \leq f_{p+2}\left(\frac{a+1}{2}\right)$ car f_{p+2} est décroissante sur I. Nous pouvons alors écrire :

$$\left|\frac{f_p(a+h)-f_p(a)}{h}+f_{p+1}(a)\right| \leq \frac{|h|}{2}f_{p+2}(a-|h|) \leq \frac{|h|}{2}f_{p+2}\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

Si $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|h|<\frac{a-1}{2} \Rightarrow \left|\frac{f_p(a+h)-f_p(a)}{h}+f_{p+1}(a)\right| \leq \frac{|h|}{2}f_{p+2}\left(\frac{a+1}{2}\right)$ et

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{2}f_{p+2}\left(\frac{a+1}{2}\right)=0$. Par encadrement on obtient alors :

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f_p(a+h)-f_p(a)}{h}+f_{p+1}(a)\right)=0$ ou $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f_p(a+h)-f_p(a)}{h}=-f_{p+1}(a)$

f_p est alors dérivable en a et $f_p'(a)=-f_{p+1}(a)$.

d) Montrons alors par récurrence que, pour tout p dans $\mathbb{N}$, f est p fois dérivable sur I et que $f^{(p)} = (-1)^p f_p$.

→ C'est clair pour $p = 0$.

→ Supposons la propriété vraie pour p et montrons la pour $p+1$.

Supposons donc que f est p fois dérivable sur I et que $f^{(p)} = (-1)^p f_p$.

D'après ce qui précède f_p est dérivable sur I et $f_p' = -f_{p+1}$.

Alors $f^{(p)}$ est dérivable sur I et $(f^{(p)})' = -(-1)^p f_{p+1} = (-1)^{p+1} f_{p+1}$.

Ainsi f est $p+1$ fois dérivable sur I et $f^{(p+1)} = (-1)^{p+1} f_{p+1}$. Ceci achève la récurrence.

Finalement $\underline{\underline{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ f^{(p)} = (-1)^p f_p}}$;

$$\underline{\underline{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^x}.}}$$

Q3 a) Soit x un élément de I. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [n, n+1]$, $n^x \leq t^x \leq (n+1)^x$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leq \dfrac{1}{t^x} \leq \dfrac{1}{n^x}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^x}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$.

Alors $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{r} \frac{1}{(n+1)^x} \leq \sum_{n=1}^{r} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n^x}$ ⊙

Or $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{r} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \int_1^{r+1} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{r+1} = \frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{(r+1)^{x-1}}\right)$ et $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{(r+1)^{x-1}} = 0$.

x vient alors en faisant tendre r vers $+\infty$ dans ⊙

$$f(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \leq f(x).$$

Ainsi $\underline{\underline{\forall x \in]1, +\infty[,\ \dfrac{1}{x-1} \leq f(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}.}}$

b) $\forall x \in]1, +\infty[$, $1 \leq (x-1) f(x) \leq x - 1 + 1 = x$ et $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} x = 1$!

Ainsi par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} ((x-1) f(x)) = 1$.

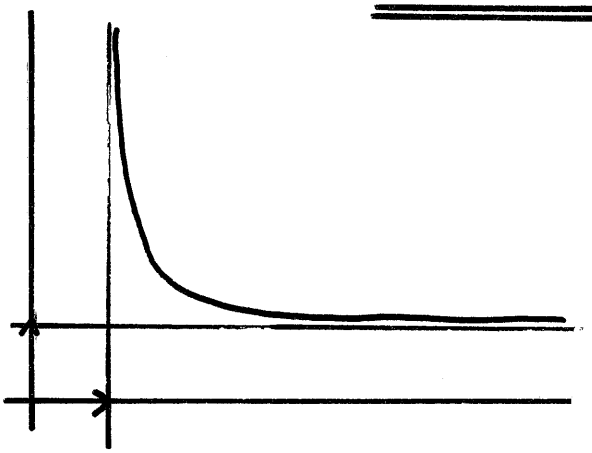
Alors $(x-1)f(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} 1$; $\underline{\underline{f(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}}}$. ... ou $\underline{\underline{f(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{x-1}}}$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ donc $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty}}$ ou $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty}}$.

c) $\forall x \in]1,+\infty[$, $1 = \frac{1}{1^x} \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right) = 1$

Par encadrement il vient : $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}}$.

d)



Q4 a) Soit x un élément de S et soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons vu dans Q3 que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)^x} \overset{(1)}{\leq} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{n^x}$.

Soit $r \in [\![N+1,+\infty[\![$

(1) donne $\sum\limits_{n=N}^{r} \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_N^{r+1} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{N^{x-1}} - \frac{1}{(r+1)^{x-1}}\right)$ ← calcul simple.

En faisant tendre r vers $+\infty$ il vient $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{x-1}\frac{1}{N^{x-1}}$ ou

$R_N(x) = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{x-1}\frac{1}{N^{x-1}}$.

(2) donne $\sum\limits_{n=N+1}^{r} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum\limits_{n=N+1}^{r} \frac{1}{n^x}$; $\int_{N+1}^{r+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum\limits_{n=N+1}^{r} \frac{1}{n^x}$.

Alors $\frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{(N+1)^{x-1}} - \frac{1}{(r+1)^{x-1}}\right] \leq \sum\limits_{n=N+1}^{r} \frac{1}{n^x}$. En faisant tendre

r vers $+\infty$ on obtient : $\frac{1}{x-1}\frac{1}{(N+1)^{x+1}} \leq \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = R_N(x)$

Finalement $\forall x \in I, \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{(x-1)(N+1)^{x-1}} \leq f(x) - S_N(x) = R_N(x) \leq \dfrac{1}{(x-1)N^{x-1}}$

$S_N(x) + \dfrac{1}{(x-1)(N+1)^{x-1}}$ (resp. $S_N(x) + \dfrac{1}{(x-1)N^x}$) est une valeur approchée de $f(x)$ par défaut (resp. par excès) à $\varepsilon_N(x) = \dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{N^{x-1}} - \dfrac{1}{(N+1)^{x-1}}\right)$

$S_N(x) + \dfrac{1}{2(x-1)}\left(\dfrac{1}{(N+1)^{x-1}} + \dfrac{1}{N^{x-1}}\right)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à $\varepsilon_N(x)/2$ près.

Méditer... on prend le milieu de l'encadrement !

Dans la suite $x \in I$.

b) Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $t \mapsto \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{t^x}$ est continue sur $]0, +\infty[$; soit H_n une primitive de cette fonction sur $]0, +\infty[$.

$\forall u \in [0, \frac{1}{2}], \quad g_n(u) = H_n(n+u) - H_n(n-u)$.

- $\forall u \in [0, \frac{1}{2}]$, $n+u \in]0, +\infty[$ et $n-u \in]0, +\infty[$.
- $u \mapsto n+u$ et $u \mapsto n-u$ sont dérivables sur $[0, \frac{1}{2}]$.
- H_n est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Ceci suffit pour dire que g_n est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$.

$\forall u \in [0, \frac{1}{2}], \quad g_n'(u) = 1 \times H_n'(n+u) - (-1) H_n'(n-u) = \left(\dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+u)^x}\right) + \left(\dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n-u)^x}\right)$.

$\forall u \in [0, \frac{1}{2}], \quad g_n'(u) = -\dfrac{1}{(n+u)^x} - \dfrac{1}{(n-u)^x} + \dfrac{2}{n^x}$.

g_n' est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ ($t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$) et

$\forall u \in [0, \frac{1}{2}], \quad g_n''(u) = \dfrac{x}{(n+u)^{x+1}} - \dfrac{x}{(n-u)^{x+1}}$; g_n'' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$\forall u \in [0, \frac{1}{2}], \quad g_n'''(u) = -\dfrac{x(x+1)}{(n+u)^{x+2}} - \dfrac{x(x+1)}{(n-u)^{x+2}}$. g_n''' est clairement continue sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Ainsi g_n est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, 1/2]$.

$g_n(0) = \int_n^n \left(\frac{1}{n^k} - \frac{1}{t^k}\right) dt = 0$; $g_n'(0) = -\frac{1}{n^k} - \frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} = 0$; $g_n''(0) = \frac{k}{n^{k+1}} - \frac{k}{n^{k+1}} = 0$

$g_n(0) = g_n'(0) = g_n''(0)$.

$\forall u \in [0, \frac{1}{2}]$, $\frac{k(k+1)}{(n-0)^{k+2}} \leq \frac{k(k+1)}{(n-u)^{k+2}} \leq \frac{k(k+1)}{(n-\frac{1}{2})^{k+2}}$.

$\forall u \in [0, \frac{1}{2}]$, $\frac{k(k+1)}{(n+1/2)^{k+2}} \leq \frac{k(k+1)}{(n+u)^{k+2}} \leq \frac{k(k+1)}{(n+0)^{k+2}}$

Observons que $\frac{1}{(n-0)^{k+2}} \geq \frac{1}{(n+1)^{k+2}}$, $\frac{1}{(n+1/2)^{k+2}} \geq \frac{1}{(n+1)^{k+2}}$, $\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^{k+2}} \leq \frac{1}{(n-1)^{k+2}}$

et $\frac{1}{(n+0)^{k+2}} \leq \frac{1}{(n-1)^{k+2}}$. Comme $k(k+1) \geq 0$ il vient :

$\forall u \in [0, \frac{1}{2}]$, $\frac{k(k+1)}{(n+1)^{k+2}} \leq \frac{k(k+1)}{(n-u)^{k+2}} \leq \frac{k(k+1)}{(n-1)^{k+2}}$ et $\frac{k(k+1)}{(n+1)^{k+2}} \leq \frac{k(k+1)}{(n+u)^{k+2}} \leq \frac{k(k+1)}{(n-1)^{k+2}}$

Par addition on obtient $\forall u \in [0, \frac{1}{2}]$, $\frac{2k(k+1)}{(n+1)^{k+2}} \leq -g_n'''(u) \leq \frac{2k(k+1)}{(n-1)^{k+2}}$.

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à g_n à l'ordre 2

donne : $g_n(\frac{1}{2}) = g_n(0) + (\frac{1}{2} - 0) g_n'(0) + \frac{(\frac{1}{2}-0)^2}{2} g_n''(0) + \int_0^{1/2} \frac{(1/2-u)^2}{2} g_n'''(u) du$

Comme $g_n(0) = g_n'(0) = g_n''(0)$ on peut écrire :

$$-g_n(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{1/2} \frac{(1/2-u)^2}{2} (-g_n'''(u)) du$$

$\forall u \in [0, \frac{1}{2}]$, $\frac{2k(k+1)}{(n+1)^{k+2}} \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - u)^2 \leq \frac{(1/2-u)^2}{2} (-g_n'''(u)) \leq \frac{2k(k+1)}{(n-1)^{k+2}} \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - u)^2$

(car $\forall u \in [0, 1/2]$, $\frac{(1/2-u)^2}{2} \geq 0$). En intégrant entre 0 et $\frac{1}{2}$ il vient :

$$\frac{2x(x+1)}{(n+1)^{x+2}}\,\frac{1}{2}\left[-\frac{(\frac{1}{2}-u)^3}{3}\right]_0^{1/2} \leq \int_0^{1/2}\frac{(1/2-u)^2}{2}(-g_n'''(u))\,du \leq \frac{2x(x+1)}{(n-1)^{x+2}}\,\frac{1}{2}\left[-\frac{(\frac{1}{2}-u)^3}{3}\right]_0^{1/2}$$

$$\frac{2x(x+1)}{(n+1)^{x+2}}\,\frac{1}{2}\,\frac{(1/2)^3}{3} \leq \int_0^{1/2}\frac{(1/2-u)^2}{2}(-g_n'''(u))\,du = -g_n\left(\tfrac{1}{2}\right) \leq \frac{2x(x+1)}{(n-1)^{x+2}}\,\frac{1}{2}\,\frac{(1/2)^3}{3}$$

Ainsi $\dfrac{x(x+1)}{24}\,\dfrac{1}{(n+1)^{x+2}} \leq -g_n\left(\tfrac{1}{2}\right) \leq \dfrac{x(x+1)}{24}\,\dfrac{1}{(n-1)^{x+2}}$.

---

c) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $-g_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t^x}-\frac{1}{n^x}\right)dt = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{t^x}\,dt - \left(n+\tfrac{1}{2}-n+\tfrac{1}{2}\right)\frac{1}{n^x}$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $-g_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{t^x}\,dt - \frac{1}{n^x}$.

Alors $\forall N \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall p \in [\![N+1,+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{p}\left(-g_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \int_{N+\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}}\frac{1}{t^x}\,dt - \sum_{n=N+1}^{p}\frac{1}{n^x}$

$\forall N \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall p \in [\![N+1,+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{p}\left(-g_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{(N+\frac{1}{2})^{x-1}} - \frac{1}{(p+\frac{1}{2})^{x-1}}\right] - \sum_{n=N+1}^{p}\frac{1}{n^x}$.

En faisant tendre p vers $+\infty$ il vient $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(-g_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{x-1}\,\frac{1}{(N+\frac{1}{2})^{x-1}} - R_N(x)$.

Reprenons l'encadrement de b) et sommons.

$\forall N \in [\![2,+\infty[\![$, $\dfrac{x(x+1)}{24}\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{x+2}} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(-g_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \leq \frac{x(x+1)}{24}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^{x+2}}$.

ces toutes les séries qui interviennent convergent.

Alors $\forall N \in [\![2,+\infty[\![$, $\dfrac{x(x+1)}{24}\displaystyle\sum_{n=N+2}^{+\infty}\frac{1}{n^{x+2}} \leq \frac{1}{x-1}\,\frac{1}{(N+\frac{1}{2})^{x-1}} - R_N(x) \leq \frac{x(x+1)}{24}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{n^{x+2}}$

$\forall N \in [\![2,+\infty[\![$, $\dfrac{x(x+1)}{24}R_{N+1}(x+2) \leq \dfrac{1}{(x-1)}\,\dfrac{1}{(N+\frac{1}{2})^{x-1}} - R_N(x) \leq \dfrac{x(x+1)}{24}R_{N-1}(x+2)$

D'après a) : $\dfrac{1}{x+1}\,\dfrac{1}{(N+2)^{x+1}} \leq R_{N+1}(x+2)$ et $R_{N-1}(x+2) \leq \dfrac{1}{x+1}\,\dfrac{1}{(N-1)^{x+1}}$ pour

tout N dans $[\![2,+\infty[\![$. Alors, pour tout N dans $[\![2,+\infty[\![$.

$$\frac{x(x+1)}{24}\times\frac{1}{x+1}\times\frac{1}{(N+2)^{x+1}}\leq\frac{1}{x-1}\frac{1}{(N+\frac{1}{2})^{x-1}}-R_N(x)\leq\frac{x(x+1)}{24}\times\frac{1}{x+1}\times\frac{1}{(N-1)^{x+1}}.$$

Finalement :

$$\forall N\in[\![2,+\infty[\![,\quad \frac{x}{24(N+2)^{x+1}}\leq\frac{1}{x-1}\frac{1}{(N+\frac{1}{2})^{x-1}}-R_N(x)\leq\frac{x}{24(N-1)^{x+1}}.$$

Soit $N\in[\![2,+\infty[\![$. Pour simplifier posons $a_N=\frac{x}{24(N+2)^{x+1}}$, $b_N=\frac{x}{24(N-1)^{x+1}}$ et

$c_N=\frac{1}{x-1}\frac{1}{(N+\frac{1}{2})^{x-1}}$. $a_N\leq c_N-R_N(x)\leq b_N$; $a_N-\frac{a_N+b_N}{2}\leq c_N-\frac{a_N+b_N}{2}-R_N(x)$
$\leq b_N-\frac{a_N+b_N}{2}$

Alors $\frac{a_N-b_N}{2}\leq c_N-\frac{a_N+b_N}{2}-(f(x)-S_N(x))\leq\frac{b_N-a_N}{2}$.

Par conséquent : $\left|S_N(x)+c_N-\frac{a_N+b_N}{2}-f(x)\right|\leq\frac{b_N-a_N}{2}$.

$S_N(x)+c_N-\frac{a_N+b_N}{2}$ est une valeur approchée de $f(x)$ à $\frac{b_N-a_N}{2}$ près.

$\frac{a_N+b_N}{2}=\frac{x}{48}\left[\frac{1}{(N+2)^{x+1}}+\frac{1}{(N-1)^{x+1}}\right]$ et $\frac{b_N-a_N}{2}=\frac{x}{48}\left[\frac{1}{(N-1)^{x+1}}-\frac{1}{(N+2)^{x+1}}\right]$

Donc $S_N(x)+\frac{1}{x-1}\frac{1}{(N+\frac{1}{2})^{x-1}}-\frac{x}{48}\left[\frac{1}{(N+2)^{x+1}}+\frac{1}{(N-1)^{x+1}}\right]$ est une valeur

---

approchée de $f(x)$ à $\frac{x}{48}\left[\frac{1}{(N-1)^{x+1}}-\frac{1}{(N+2)^{x+1}}\right]$ près.

---

d) Il convient donc de calculer $S_N(x)$ tant que $\frac{x}{48}\left[\frac{1}{(N-1)^{x+1}}-\frac{1}{(N+2)^{x+1}}\right]>10^{-6}$

Il ne reste plus alors qu'à ajouter à $S_N(x)$: $\frac{1}{x-1}\frac{1}{(N+\frac{1}{2})^{x-1}}-\frac{x}{48}\left[\frac{1}{(N+2)^{x+1}}+\frac{1}{(N-1)^{x+1}}\right]$.

```
program approxime_dzeta;

const epsilon=1e-6;
var n:integer;x,s:real;

begin

write('Donnez la valeur de x. x=');readln(x);

n:=2;s:=1+exp(-x*ln(2));

while(x/48*(exp(-(x+1)*ln(n-1))-exp(-(x+1)*ln(n+2)))>epsilon) do
   begin
   n:=n+1;
   s:=s+exp(-x*ln(n))
   end;
s:=s+1/(x-1)*exp((1-x)*ln(n+0.5))-x/48*(exp(-(x+1)*ln(n-1))+
exp(-(x+1)*ln(n+2)));

writeln;writeln('Valeur de n : ',n);
writeln('Valeur approchée de la somme : ',s);


end.
```

```
Donnez la valeur de x. x=1.005

Valeur de n: 50
Valeur approchée de la somme :  2.0057757961E+02

Donnez la valeur de x. x=1.01

Valeur de n: 50
Valeur approchée de la somme :  1.0057794331E+02

Donnez la valeur de x. x=1.1

Valeur de n: 46
Valeur approchée de la somme :  1.0584448415E+01

Donnez la valeur de x. x=1.5

Valeur de n: 34
Valeur approchée de la somme :  2.6123752725E+00

Donnez la valeur de x. x=2
```

```
f(1.1)=10.584448
f(1.2)=5.591582
f(1.3)=3.931949
f(1.4)=3.105547
f(1.5)=2.612375
f(1.6)=2.285766
f(1.7)=2.054289
f(1.8)=1.882230
f(1.9)=1.749746

f(2)=1.644934
f(3)=1.202057
f(4)=1.082323
f(5)=1.036927
f(6)=1.017343
f(7)=1.008349
f(8)=1.004077
f(9)=1.002008
f(10)=1.000995
```

$f(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$; $f(4)=\frac{\pi^4}{90}$; $f(6)=\frac{\pi^6}{945}$; $f(8)=\frac{\pi^8}{9450}$. Plus généralement :

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ f(2k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k+1}\frac{(4\pi^2)^k}{2}\,r_{2k}$ où $(r_n)_{n\geq 0}$ est la suite de réels définie par $r_0=1$ et $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{r_j}{(n-j)!}=0$ ... Voir HEC 89.

PARTIE III Etude de $F : x \mapsto \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} f(k) x^k$.

Q1 a) Soit $x \in]-1,1[$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $|f(k)| = f(k) \leq 1 + \frac{1}{k-1} \leq 1 + \frac{1}{2-1} = 2$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $0 \leq \left|\frac{(-1)^k}{k} f(k) x^k\right| = \frac{1}{k}|f(k)|\,|x|^k \leq \frac{1}{k} \times 2 \times |x|^k \leq |x|^k$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $0 \leq \left|\frac{(-1)^k}{k} f(k) x^k\right| \leq |x|^k$ et la série de terme général $|x|^k$ converge car $|x| < 1$.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent alors la convergence de la série de terme général $\left|\frac{(-1)^k}{k} f(k) x^k\right|$.

La série de terme général $\frac{(-1)^k}{k} f(k) x^k$ est alors absolument convergente donc convergente ; ainsi $x \in D_F$.

Soit $x \in \mathbb{R} - [-1,1]$. $\lim_{k \to +\infty} f(k) = 1$ et $\lim_{k \to +\infty} \frac{|x|^k}{k} = +\infty$ car $|x| > 1$

Donc $\lim_{k \to +\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k} f(k) x^k\right| = \lim_{k \to +\infty} \left(f(k) \frac{|x|^k}{k}\right) = +\infty$.

La suite de terme général $\frac{(-1)^k}{k} f(k) x^k$ ne converge pas vers 0 donc la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k} f(k) x^k$ diverge ; $x \notin D_F$.

$\forall x \in]-1,1[$, $x \in D_F$ et $\forall x \in \mathbb{R} - [-1,1]$, $x \notin D_F$.

Alors $\underline{\underline{]-1,1[\subset D_F \subset [-1,1]}}$.

b) Les suites $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \geq 2}$ et $(f(k))_{k \geq 2}$ sont décroissantes et à termes positifs ; alors la suite $\underline{\left(\frac{f(k)}{k}\right)_{k \geq 2} \text{ est décroissante}}$.

De plus $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$ et $\lim_{k \to +\infty} f(k) = 1$ donne $\underline{\lim_{k \to +\infty} \frac{f(k)}{k} = 0}$.

des deux points précédents et le rappel montrent alors la convergence de la série de terme général $(-1)^k \frac{f(k)}{k}$; ainsi <u>F est définie en 1.</u>

c) Pour $x=-1$. $\frac{(-1)^k}{k} f(k) x^k = \frac{1}{k} f(k)$. Or $\lim_{k\to+\infty} f(k) = 1$.

Ainsi $\frac{(-1)^k}{k} f(k)\, x^k \sim \frac{1}{k}$. La série de terme général $\frac{1}{k}$ étant divergente et à termes positifs on peut alors dire que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k} f(k)\, x^k$ diverge ; $-1 \notin D_F$.

Finalement $\underline{\underline{D_F =]-1,1]}}$.

(Q2) a) Fixons n dans $\mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $\frac{(-1)^k x^k}{k n^k} = \frac{(-x/n)^k}{k}$.

Ainsi la série de terme général $\frac{(-1)^k x^k}{k n^k}$ converge si et seulement $\frac{-x}{n} \in [-1,1[$ d'après I Q2.

Notons que $-\frac{x}{n} \in [-1,1[\Leftrightarrow x \in]-n,n]$.

<u>Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, le domaine de définition de $u_n : x \mapsto \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k n^k}$ est $]-n,n]$.</u>

$$\forall x \in]-n,n],\ u_n(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-x/n)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-x/n)^k}{k} + \frac{x}{n} \overset{\text{I Q2}}{=} -\ln\left(1-\left(-\frac{x}{n}\right)\right) + \frac{x}{n}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-n,n],\ u_n(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k n^k} = \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

b) $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1]$. Notons alors que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in D_{u_n}$.

$$F(x) - \sum_{n=1}^{N} u_n(x) = F(x) - \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k n^k} \right) = F(x) - \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k n^k}$$

! La somme d'une combinaison linéaire de séries convergentes est la combinaison linéaire des sommes

$$F(x)-\sum_{n=1}^{N} u_n(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} f(k) x^k - \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k} x^k \left(f(k) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k} \right) \right).$$

$$F(x)-\sum_{n=1}^{N} u_n(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k} x^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k} \right) \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k x^k}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right).$$

Finalement $\forall x \in]-1,1]$, $F(x)-\sum_{n=1}^{N} u_n(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k x^k}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right)$.

Soit $r \in [\![2,+\infty[\![$. Soit $x \in]-1,1[$

$$\left| \sum_{k=2}^{r} \left(\frac{(-1)^k x^k}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right) \right| \leq \sum_{k=2}^{r} \left| \frac{(-1)^k x^k}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right| = \sum_{k=2}^{r} \left(\frac{|x|^k}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right).$$

Or $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Ainsi :

$$\left| \sum_{k=2}^{r} \left(\frac{(-1)^k x^k}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right) \right| \leq \sum_{k=2}^{r} \left(\frac{|x|^k}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \left(\sum_{k=2}^{r} \frac{|x|^k}{k} \right) \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right).$$

Rappelons que $\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k x^k}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right)$ existe et vaut $F(x)-\sum_{n=1}^{N} u_n(x)$

et $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k}$ existe car $|x|<1$.

Ainsi en faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient :

$$\left| F(x) - \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \right| \leq \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k} \right) \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[.$$

$\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = 0$ (... reste d'une série convergente) donc, par encadrement : $\lim_{N \to +\infty} \left(F(x) - \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \right) = 0$.

Alors la série de terme général $u_n(x)$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = F(x)$.

$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k n^k}$ et $\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$.

Q3 a) Pour montrer que $x \mapsto [x]$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$, il suffit de prouver qu'elle est continue par morceaux sur tout segment de $[1,+\infty[$.

Remarquons que tout segment de $[1,+\infty[$ est contenu dans un segment du type $[1,r]$ avec $r \in [\![2,+\infty[\![$.

Ainsi pour prouver que $x \mapsto [x]$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ il suffit de prouver qu'elle est continue par morceaux sur $[1,r]$ pour tout r dans $[\![2,+\infty[\![$.

Fixons r dans $[\![2,+\infty[\![$.

$(1,2,\dots,r)$ est une subdivision de $[1,r]$ et pour tout $k \in [\![1,r-1]\!]$, la restriction de $x \mapsto [x]$ à $]k,k+1[$, qui vaut constamment k, est continue sur $]k,k+1[$ et prolongable en une fonction continue sur $[k,k+1]$

Ainsi $x \mapsto [x]$ est continue par morceaux sur $[1,r]$ pour tout r dans $[\![2,+\infty[\![$.

Ceci achève de prouver que <u>$x \mapsto [x]$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.</u>

Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$. $x \mapsto \frac{1}{x^{k+1}}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.

Alors <u>φ_k est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$</u> comme produit de deux fonctions continues par morceaux sur $[1,+\infty[$.

De même $x \mapsto \frac{1}{x^k(x+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.

<u>ϕ est alors continue par morceaux</u> sur $[1,+\infty[$ comme produit de deux fonctions continues par morceaux sur $[1,+\infty[$.

Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$

$\rightarrow$ φ_k est continue par morceaux et <u>positive</u> sur $[1,+\infty[$.

$\rightarrow$ $\varphi_k(x) = \frac{[x]}{x^{k+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^k}$

$\rightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^k}$ converge $(k>1)$

Les trois points précédents donnent la convergence de $\underline{\underline{s_\ell = \int_1^{+\infty} \varphi_\ell(t)\,dt}}$.

→ ϕ est continue par morceaux et positive sur $[1,+\infty[$.

→ $\phi(x) = \dfrac{[x]}{x^\ell(1+x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}$

→ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Alors $\underline{\underline{S = \int_1^{+\infty} \phi(t)\,dt \text{ converge.}}}$

b) Soit $\ell \in [\![2,+\infty[\![$; soit $n \in \mathbb{N}^*$; $\forall t \in [n,n+1[$, $\varphi_\ell(t) = \dfrac{n}{t^{\ell+1}}$. $\displaystyle\int_n^{n+1} \varphi_\ell(t)\,dt = n\left[\frac{t^{-\ell}}{-\ell}\right]_n^{n+1}$

$$\underline{\underline{\int_n^{n+1} \varphi_\ell(t)\,dt = \frac{n}{\ell}\left[\frac{1}{n^\ell} - \frac{1}{(n+1)^\ell}\right].}}$$

$s_\ell = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \displaystyle\int_1^x \varphi_\ell(t)\,dt$; en particulier $s_\ell = \lim\limits_{N\mapsto+\infty} \displaystyle\int_1^N \varphi_\ell(t)\,dt = \lim\limits_{N\mapsto+\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \varphi_\ell(t)\,dt$

Soit $N \in [\![2,+\infty[\![$.

$$\sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \varphi_\ell(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{\ell}\left[\frac{1}{n^\ell} - \frac{1}{(n+1)^\ell}\right] = \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{n^\ell} - \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{(n+1)^\ell}.$$

$$\int_1^N \varphi_\ell(t)\,dt = \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{n^\ell} - \frac{1}{\ell}\sum_{n=2 \text{ ou } \underline{1}}^{N} \frac{n-1}{n^\ell} = \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{n-(n-1)}{n^\ell} - \frac{1}{\ell}\,\frac{N-1}{N^\ell}.$$

$$\int_1^N \varphi_\ell(t)\,dt = \frac{1}{\ell}\sum_{\ell=1}^{N-1} \frac{1}{n^\ell} - \frac{1}{\ell}\,\frac{N-1}{N^\ell}.$$

Or $\lim\limits_{N\mapsto+\infty} \displaystyle\int_1^N \varphi_\ell(t)\,dt = s_\ell$, $\lim\limits_{N\mapsto+\infty}\left(\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^\ell}\right) = \dfrac{\zeta(\ell)}{\ell}$ et $\lim\limits_{N\mapsto+\infty}\left(\dfrac{1}{\ell}\,\dfrac{N-1}{N^\ell}\right) = 0$ $\Leftarrow$ $\ell \geqslant 2$.

Ainsi $\underline{\underline{s_\ell = \displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_\ell(t)\,dt = \frac{\zeta(\ell)}{\ell}.}}$

c) $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{t(t+1)}$ et $\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t^2(t+1)}$.

$\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{1}{t^2} - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [n,n+1[$, $\phi(t) = \frac{[t]}{t^2(t+1)} = \frac{n}{t^2(t+1)} = n\left[\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right]$.

$$\int_n^{n+1} \phi(t)dt = n\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right)dt = n\left[-\frac{1}{t} + \ln\frac{t+1}{t}\right]_n^{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_n^{n+1} \phi(t)dt = n\left(-\frac{1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right) - n\left(-\frac{1}{n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\int_1^{N+1} \phi(t)dt = \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \phi(t)dt$ $\boxed{= \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}}$.

$$\int_1^{N+1} \phi(t)dt = \sum_{n=1}^{N} n\left(-\frac{1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right) - \sum_{n=1}^{N} n\left(-\frac{1}{n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\int_1^{N+1} \phi(t)dt = \sum_{n=2 \text{ ou } 1}^{N+1} (n-1)\left(-\frac{1}{n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \sum_{n=1}^{N} n\left(-\frac{1}{n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

$$\int_1^{N+1} \phi(t)dt = \sum_{n=1}^{N} (n-1-n)\left(-\frac{1}{n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - N\left(-\frac{1}{N+1} + \ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right)\right)$$

$$\int_1^{N+1} \phi(t)dt = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + N\left(\frac{1}{N+1} - \ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right)\right).$$

$\lim_{N\to+\infty} \int_1^{N+1} \phi(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \phi(t)dt$ car $\int_1^{+\infty} \phi(t)dt$ converge.

$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ car la série de terme général $\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge.

$N\left(\frac{1}{N+1} - \ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} N \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1}\right)^2 \sim \frac{1}{2N}$; $\lim_{N\to+\infty} N\left(\frac{1}{N+1} - \ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right)\right) = 0$.

Alors $\int_1^{+\infty} \phi(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \gamma$.

d) Soit $N \in [\![2,+\infty[\![$.

$$\int_1^{+\infty} \phi(t)\,dt - \sum_{k=2}^{N} (-1)^k s_k = \int_1^{+\infty} \left(\phi(t) - \sum_{k=2}^{N} (-1)^k \frac{[t]}{t^{k+1}}\right) dt.$$

$$\int_1^{+\infty} \phi(t)\,dt - \sum_{k=2}^{N} (-1)^k s_k = \int_1^{+\infty} \left(\frac{[t]}{t^2(1+t)} - \frac{[t]}{t} \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{-1}{t}\right)^k\right) dt.$$

$$\int_1^{+\infty} \phi(t)\,dt - \sum_{k=2}^{N} (-1)^k s_k = \int_1^{+\infty} \left(\frac{[t]}{t^2(1+t)} - \frac{[t]}{t}\left(-\frac{1}{t}\right)^2 \frac{1-\left(-\frac{1}{t}\right)^{N-1}}{1-\left(-\frac{1}{t}\right)}\right) dt.$$

$$\int_1^{+\infty} \phi(t)\,dt - \sum_{k=2}^{N} (-1)^k s_k = \int_1^{+\infty} \left[\frac{[t]}{t^2(1+t)} - \frac{[t]}{t^2(1+t)}\left(1-\left(-\frac{1}{t}\right)^{N-1}\right)\right] dt = \int_1^{+\infty} \frac{[t](-1)^{N-1}}{t^2(1+t)}\,dt.$$

$$\left|\int_1^{+\infty} \phi(t)\,dt - \sum_{k=2}^{N} (-1)^k s_k\right| = \left|(-1)^{N-1} \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{N+1}(1+t)}\,dt\right| = \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{N+1}(1+t)}\,dt.$$

$$\forall N \in [\![2,+\infty[\![,\ \left|\int_1^{+\infty} \phi(t)\,dt - \sum_{k=2}^{N} (-1)^k s_k\right| = \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{N+1}(1+t)}\,dt.$$

$\forall t \in [1,+\infty[,\quad \dfrac{[t]}{1+t} \leq 1$

$\forall N \in [\![2,+\infty[\![,\ \forall t \in [1,+\infty[,\quad 0 \leq \dfrac{[t]}{t^{N+1}(1+t)} \leq \dfrac{1}{t^{N+1}}.$

$\forall N \in [\![2,+\infty[\![,\ \forall A \in [1,+\infty[,\quad 0 \leq \displaystyle\int_1^A \frac{[t]}{t^{N+1}(1+t)}\,dt \leq \int_1^A \frac{1}{t^{N+1}}\,dt = \frac{1}{N}\left[1 - \frac{1}{A^N}\right]$

En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient :

$\forall N \in [\![2,+\infty[\![,\quad 0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{N+1}(1+t)}\,dt \leq \frac{1}{N}.$

Le théorème d'encadrement donne alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{N+1}(1+t)}\,dt = 0.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=2}^{N} (-1)^k s_k = \int_1^{+\infty} \phi(t)\,dt$ ou $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=2}^{N} (-1)^k \frac{f(k)}{k} = S.$

Alors $F(1) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{f(k)}{k} = S = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

$F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \gamma$. Ainsi $\forall x \in]-1,1]$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$.

Q4 a) D'après le rappel, la série de terme général $(-1)^k a_k$ converge.
Posons $T = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k a_k$.

$T = \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=2}^{K} (-1)^k a_k$ donc $T = \lim_{K\to+\infty} \left(\sum_{n=2}^{2K+1} (-1)^k a_k\right) = \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=1}^{K} \left[(-1)^{2k} a_{2k} + (-1)^{2k+1} a_{2k+1}\right]$

$T = \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=1}^{K} (a_{2k} - a_{2k+1})$. $\forall k \in [\![1,+\infty[\![$, $a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0$ donc

$\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{K} (a_{2k} - a_{2k+1}) \geq 0$. Alors $T \geq 0$.

$T - a_2 = \sum_{k=3}^{+\infty} (-1)^k a_k = \lim_{K\to+\infty} \left(\sum_{k=3}^{2K} (-1)^k a_k\right) = \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=2}^{K} \left((-1)^{2k-1} a_{2k-1} + (-1)^{2k} a_{2k}\right)$

$T - a_2 = \lim_{K\to+\infty} \left(\sum_{k=2}^{K} (a_{2k} - a_{2k-1})\right) \leq 0$ car $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $a_{2k} - a_{2k-1} \leq 0$.

Finalement : $0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k a_k \leq a_2$.

b) D'après Q2 b) $F(1) - \sum_{n=1}^{N} u_n(1) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}\right)$ pour tout N dans $\mathbb{N}^*$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $a_k = \frac{1}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $0 \leq \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ et $0 \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

Par produit $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $a_{k+1} \leq a_k$; $(a_k)_{k\geq 2}$ est décroissante.

$\forall k \in [2, +\infty[$, $0 \leq a_k \leq \frac{1}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = 0$ donc par encadrement : $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$.

En appliquant a) au dit ici alors :

$$0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k a_k \leq a_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq F(1) - \sum_{n=1}^{N} u_n(1) \leq \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Or $\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = 0$ (suite des restes d'une série convergente.

Ainsi par encadrement : $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n(1) = F(1)$.

Alors $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \gamma$.